

그래프의 교수학적 변환 방식 비교 -우리나라 교과서와 MiC 교과서의 초등 통계 내용을 중심으로-

이 경 화* · 지 은 정**

본 연구는 우리나라 제7차 초등학교 교육과정과 NCTM(2000)의 「학교수학을 위한 원리와 기준」에서 제시하고 있는 그래프 지도의 목표를 살펴보고, 우리나라 교과서와 MiC 교과서에서 그래프를 어떻게 교수학적으로 변환하여 다루고 있는지 비교한다. 이를 위해 그래프 단원의 내용 요소로서 그래프의 종류와 정의 방식, 그래프 비교 활동에 대한 교수학적 변환 방식을 비교하여 살펴보았다. 연구 결과, 그래프 지도 목표에서 우리나라에 비해 NCTM(2000)에서는 학생 스스로 자료를 표현하는 방법의 개발을 허용하며, 그래픽 표현 방법에 따른 분석 결과를 비교하도록 한다. 또, 그래프를 통해 자료 전체에 주목하여 설명하도록 한다는 차이점을 확인하였다. 두 교과서에서 다루는 그래프의 종류는 우리나라에 비해 MiC 교과서에서 number-line plot과 상자 그림을 더 다루고 있었다. 그래프를 정의하는 방법은 두 나라가 외연적 정의 방법을 주로 사용하고 있으나, 우리나라 교과서는 외연적 방법과 동의적 방법을 혼합하여 사용하고, MiC 교과서는 외연적 정의 방법을 그래프의 특징과 함께 사용하는 경우가 있었다. 그래프 간의 비교 활동은 우리나라 교과서가 매우 빈약한 반면에, MiC 교과서는 여러 가지 형태의 비교 활동이 이루어지고 있음을 확인하였다.

1. 들어가는 말

통계는 불확실성과 변화 가능한 것을 기본 현상으로 한다. 변화 가능한 것에서 패턴을 찾기 위해, 표본을 선택하고 측정하여 자료를 얻는다. 자료를 얻은 후에는 적절한 다이어그램을 이용하여 자료 집합의 패턴과 경향을 분석할 수 있다. 이런 분석과정에서, 변화 가능한 것에서 패턴으로 나타날 수 있는 분포의 개념은 중요하다. 분포는 중심, 산포도 등의 다양한 측면을 가지고 있다. 통계적 자료 분석의 위력은 개별적인 자료에서는 나타날 수 없는 자료 전체의 포괄적인 특징을 기술하고 예측하게 하

는데 있다. 자료의 포괄적인 특징은 분포에 대한 교수학적 현상학에서 필수적인 주제이다 (Bakker, 2004: 100).

자료의 포괄적인 특징은 자료가 어디에 집중되어 있는지, 어떻게 분포되어 있는지, 혹은 시간이 지나면서 어떻게 변하는지에 주목하여 자료의 각 요소를 비교함으로써 확인할 수 있다. 그래프는 전체 자료에 대한 개요를 제공하며 수치에서는 드러나지 않는 자료의 특별한 특징들을 보여줌으로써 자료의 포괄적인 특징을 쉽게 파악하게 한다. 그러나 학생들은 그래프에서 자료 전체에 대한 포괄적인 특징을 파악하는데 많은 어려움을 가지고 있다(Hancock, Kaput, and Goldsmith, 1992; Konold, Pollatsek

* 한국교원대학교, khmath@knu.ac.kr

** 한국교원대학교 대학원, stasis3@hanmail.net

and Well, 1997; Ben-Zvi & Arcavi, 2001). 학생들이 왜 이러한 어려움에 처하는지 파악하기 위하여 먼저 학교수학에서 그래프의 교수학적 변환이 어떻게 이루어져 있는지 살펴볼 필요가 있다.

이 연구에서는 우리나라 제7차 초등학교 교육과정과 NCTM(2000)의 「학교수학을 위한 원리와 기준」에서 제시하고 있는 그래프 지도의 목표를 살펴보고, 우리나라 교과서와 MiC 교과서¹⁾에서 그래프를 어떻게 교수학적으로 변환하여 다루고 있는지 비교·분석하였다. 이 연구의 결과는 현재 그래프 지도의 관점을 개선하는 데 시사점을 제공할 것으로 기대한다.

II. 자료에 대한 전체적 조망과 그래프

1. 자료에 대한 국소적 조망과 전체적 조망

하나의 자료 집합이 단지 자료를 나열해 놓은 것이 아닌 하나의 단위로 여겨지기 전에는 각각의 자료들을 모아둔 것 이상으로 설명하기 어렵다(Morkors & Russell, 1995; Ciancetta, 2007, 재인용). 자료 집합이 하나의 전체적인 실체로써 고려될 때, 자료는 중심, 퍼짐, 형태와 같은 경향과 패턴으로 설명될 수 있다. 이러한 경향과 패턴은 하나의 자료 집합을 분석하거나, 자료 집합 사이의 통계적 비교를 하는데 사용된다. 자료 집합 전체의 경향과 패턴을 찾아 설명하고, 비교하고, 판단하고, 의사를 결

정하는 것은 통계적 방법에서 가장 기초적이다. 이것을 통계적 탐구 과정이라 한다.

학생들은 통계적 탐구 과정을 경험하는 초기에 자료를 하나의 실체로 보지 못하고, 각각의 자료값을 보거나 그와 비슷한 값에만 관심을 보이며 설명하는 경향이 있다. 예를 들어, 어떤 집단에서 사람들의 키를 측정하였을 때, '185cm'를 키가 큰 한 사람의 개인적 특성으로만 고려하고, 185cm 주변의 값에만 관심을 갖는 것이다. 이와 같이, 자료 집합을 다룰 때 각각의 자료값에 초점을 두거나, 자료 집합을 단지 자료값들을 열거한 것으로 보는 특징을 자료에 대한 국소적 조망(local view 또는, individual view)이라 한다(Bakker & Gravemeijer, 2004; Konold & Higgings, 2003; Ciancetta, 2007).

통계적 탐구 과정에서 자료를 국소적으로 보는 것에서 하나의 전체적인 실체로 보는 것으로의 전환은 중요하다. 자료 집합을 하나의 실체로써 고려하는 것은 자료를 전체적으로 볼 수 있도록 한다. 예를 들어, 어떤 집단에서 사람들의 키를 측정하였을 때, '185cm'를 키가 큰 한 사람의 개인적 특성으로 여기는 것에서 좀 더 나아가 160cm보다 25cm가 큰 것과 같이, 모든 가능한 키의 측정값 범위에서 다른 자료값과 관련되어 있는 하나의 측정값으로 생각하는 것이다. 이와 같이 자료 집합을 하나의 실체로써 고려하고, 다른 자료값들과 관련지어 보는 특징을 자료에 대한 전체적 조망(aggregate view 또는, global view)이라 한다.

자료에 대한 전체적 조망은 자료가 나타날 수 있는 모든 가능한 결과의 공간에서 분포할 수 있음을 인지하는 것이다(Ciancetta, 2007).

1) MiC 교과서는 미국 국립과학재단(National Science Foundation/NSF)의 후원 하에 미국 매디슨 위스콘신 대학교의 교육 연구 센터와 네덜란드 위트레흐트대학교의 프로이덴탈 연구소가 협력하여 개발하였다. MiC 교과서 개발 프로젝트 팀에서는 「학교 수학을 위한 원리와 기준」에 기초하여 개발하였음을 명시하고 있기 때문에, 그 배경으로 NCTM(2000)을 조사하여 비교하였다.

즉, 자료의 변이성을 인식하는 것이라 볼 수 있다. 자료에 대한 전체적 조망의 또 다른 특징은 임의의 하나의 자료값에는 존재하지 않는 자료의 변이성에서 성질, 패턴, 관계가 존재함을 인식하는 것이다(Konold & Higgins, 2003; Pfannkuch & Wild, 2004). 이러한 성질, 패턴, 관계는 중심, 퍼짐, 형태 등으로 나타나며, 이것들은 분포의 개념으로 통합되어 표현된다.

Ben-Zvi와 Arcavi(2001)는 탐색적 자료 분석 과정에서 자료와 자료 표현에 대한 국소적 이해(local understanding)와 전체적 이해(global understanding)를 다음과 같이 설명한다.

자료에 대한 국소적 이해는 표에 제시된 하나의 자료 집합에서 각각의 값, 또는 그것들 중 몇 개의 값에 초점을 둔다(예를 들어, 표에서 하나의 특별한 열 또는 그래프에서 단일점). 자료에 대한 전체적인 이해는 분포를 육안으로 직접 관찰하거나, 통계적 매개변수나 기술을 통하여 자료 집합에서 일반적인 패턴이나 경향을 찾고, 인식하고, 묘사하고 설명하는 능력을 일컫는다(Ben-Zvi & Arcavi, 2001: 38).

자료 집합의 패턴과 경향을 인식하는 하나의 방법으로써 그래프를 전체적으로 보는 것은 통계와 수학 모두에서 본질적인 것이다(Ben-Zvi & Arcavi, 2001). 통계에서 자료에 대한 전체적인 이해는 각 자료의 고유한 특징을 다루는 것이 아니라, 자료가 어디에 집중되어 있는지, 어떻게 분포되어 있는지, 또는 시간이 지나면서 어떻게 변하는지에 주목함으로써 이것들을 비교하여 전체적인 특징을 파악하는 것이다.

Ben-Zvi와 Arcavi(2001)는 7학년 학생들이 표와 그래프로 제시된 자료를 국소적으로 조망하는 것에서 어떻게 발전하여 전체적으로 조망하는지를 6단계로 설명한다. 엉뚱한 것에서 적절한 정보에 관심 갖기, 표와 그래프에서 국소적 정보를 읽고 이해하기, 이웃한 국소적 자료 사

이의 차이점에 주목하기, 경향이나 패턴과 같은 전체적으로 조망하기의 기본적 개념과 이런 개념들을 설명하는 언어 학습하기, 특별한 국소적 자료의 조작을 통해 전체적으로 조망하기, 그래프를 재설계하여 국소적 조망과 전체적 조망 사이를 유연성 있게 이동하기.

이 연구에서 7학년의 두 학생은 선행 지식과 통계적 자료 집합에 관한 지식의 부족으로 오랫동안 국소적 자료값과 그에 이웃한 자료값의 차이에만 주목하였다. 학생들은 통계적 자료에서 경향의 개념을 이해한 후에도 이웃한 자료값의 편차에만 관심을 보였으며, 이것은 자료를 전체적으로 이해하는데 걸림돌이 되었다. 학생들은 몇 개의 특이값을 제외하며 자료를 국소적으로 관찰하는 과정을 통해 자료의 그래프 형태에 관심을 갖게 되었다. 그리고 자료 집합을 하나의 실체로 보기 시작하였다. 그래프에서 축의 눈금의 크기를 조절하며 그래프의 형태를 관찰하고 자료 집합의 경향을 확인할 수 있었다.

자료를 국소적으로 조망하는 것은 전체적으로 조망하기 위한 출발점이며, 동시에 전체적으로 조망하는 과정의 일부이기도 하다. 자료 분석과정에서 학생들이 어떻게 안내되는냐에 따라 자료에 대한 국소적 조망에서 멈추거나, 전체적으로 조망하는 과정으로 발전할 수 있다. 자료를 국소적으로 조망하는 것에서 전체적으로 조망하는 것으로의 전환은 자료의 변이성을 인식하고, 이러한 변이성에서 나타나는 경향이나 패턴을 찾는 과정이다.

Watson, Kelly, Callingham와 Shaughnessy (2003)의 연구는 가능성, 자료, 표본 추출 상황의 과제에 대한 학생들의 반응을 분류하여 학생들의 변이성에 대한 이해 발전 과정을 4수준으로 제시하였다. 자료에 대한 전체적 조망을 자료의 변이성을 인식하고, 이러한 변이성에서

나타나는 자료 집합의 패턴과 경향을 찾는 과정으로 볼 때, 이 연구는 자료를 국소적으로 조망하는 것에서 전체적으로 조망하는 것으로의 발전 과정으로 해석할 수 있다. 이 연구에서 제 1수준의 학생들은 표나 간단한 그래프를 읽을 수 있으며, 가능성에 대해 직관적으로 추론할 수 있다. 제 2수준은 자료의 한 측면에만 주목하며 다른 측면들은 무시하는 경향을 보이며, 제 3수준은 자료의 가장 두드러진 특징에 주목하며, 상황을 고려한다. 제 4수준은 자료에 대해 비평적인 추론을 하며, 추론에 대해 정당화를 시도한다. 제 2수준은 자료에 대해 국소적으로 조망하는 단계, 제 3수준은 전체적 조망으로 나아가는 과도기적 단계, 제 4수준은 자료에 대해 전체적으로 조망하고, 자료에 대해 비평적인 추론을 하는 단계로 볼 수 있다.

자료를 전체적으로 조망하는 하나의 방법은 자료를 재구성하여 관찰하는 것이다. Pfannkuch와 Reading(2006)은 다이어그램이나 자료의 도수 분포, 또는 그래프 등을 통하여 자료의 변이성을 직관적으로 표현할 수 있다고 말한다. 그래프는 자료를 시각적으로 정리하여 자료의 분포, 중심과 퍼짐, 대칭성, 형태, 이상점 등을 쉽게 관찰할 수 있도록 한다. 그래프를 통한 관찰은 자료 집합을 하나의 실체로써 전체적으로 이해하도록 돕는다. 특히, 그래프의 축의 눈금 변화를 통한 자료의 관찰은 학생들로 하여금 자료를 국소적으로 조망하는 것에서 멈추지 않고 전체적으로 조망할 수 있게 한다.

2. 그래프

자료를 통해 새로운 해석을 찾거나 자료가 지닌 의미를 확인하기 위해 자료의 표현 방법을 변화시키는 것은 통계적 사고의 근본이다. Pfannkuch와 Wild(2004)는 통계적 사고의 유형

을 설명하기 위하여 “이해하기 위해 표현 방법을 바꾼다.”는 뜻을 지닌 표현의 변형(transnumeration)이란 단어를 소개한다. 표현의 변형에 대한 사고는 수집된 본래의 자료를 다양한 그래픽 표현과 통계적 요약치 등으로 변형하여 자료로부터 그 의미를 찾고 해석하고자 할 때 일어난다. 그래프는 이러한 사고를 돕는 도구가 될 수 있다.

이산적이거나 연속적인 통계적 도해는 수학에서 카르테시안 좌표를 사용한 이후에 만들어지기 시작했다. 통계적 그래프를 포함하는 그래프는 양을 표현하기 위해 높이와 길이와 같은 공간적 특징을 사용하는 것으로 정의된다(Wainer, 1992). 1700년 대 말에 William Playfair는 표를 선형적 산술의 시각적 표현으로 바꾸며 그림그래프, 선그래프, 막대그래프, 원그래프, 히스토그램을 포함하여 현재 일반적으로 널리 사용되고 있는 통계 그래프를 소개하였다. 그러나 19세기까지만 해도 학술적인 보고서에서 그래프는 일반적으로 사용되지 않았다. 현재 학교 교육과정에서 중요하게 고려되고 있는 표현으로 줄기와 잎 그림, 상자 그림은 Tukey(1977)에 의해 소개되었다(Friel, Curcio, & Bright, 2001).

이후에 많은 연구자들이 학생들의 그래프 학습을 위한 그래프의 서열화를 고려해왔다. 그래프 안에서 자료를 확인하는 것이 쉬운 정도에 따라(Feldman, Konold, & Coulter, 2000), 해석이 간단한 것에서부터 복잡한 것으로(Bright & Friel, 1998), 자료가 항목별로 나타나는 것에서 그룹별로 나타나는 것으로(Bakker, 2004), Minitool을 이용하여 막대그래프에서 시작하여 점 그림을 학습하는 것(Cobb, McClain, & Gravemeijer, 2003) 등으로 그래프 서열을 제안하였다. 이들의 결론은 막대그래프나 점 그림과 같이 각 자료값의 확인이 쉽고, 해석이 간

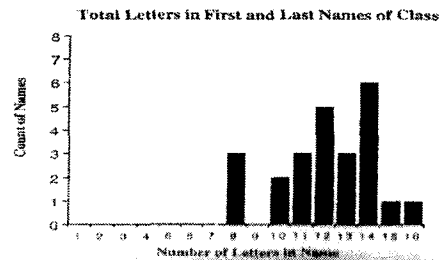
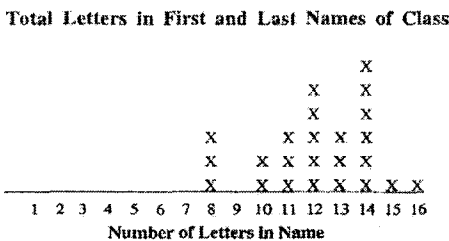
단한 항목별로 자료값이 나타나는 그래프(case-value plot)로 시작하여 히스토그램이나 상자 그림과 같이 자료값이 집합적으로 나타나는 그래프(aggregate plot)의 순서로 학습을 해야 한다는 것이다(Bakker, 2004, 재인용). 히스토그램이나 상자그림과 같은 그래프는 개념적 요소들과 숨겨진 규약들이 담겨져 있기 때문에 학생들이 그래프를 하나의 집합으로 인식하고 개념적 구조들을 이해하였을 때에만 세밀한 분석이 이루어질 수 있다.²⁾

3. 그래프 간의 연결

같은 정보를 제공하는 그래프, 다른 정보를 제공하는 그래프 사이의 다양한 비교 활동은 여러 가지 형태의 그래프들을 연결하여 이해하는 기회를 제공한다. 이러한 그래프간의 연결은 학생들로 하여금 문제를 해결하는데 각각의 그래프에 대한 개념을 사용할 수 있도록 내면화하게 돕는다. 학생들이 그래프의 특징을 간단히 말할 수 있더라도, 그래프로부터 원하는 정보를 얻고 문제를 해결하는데 충분하지는 않

다. Bright와 Friel(1998)은 특별한 한 쌍의 그래프에 관련된 특정한 전략이 필요하다고 주장한다. 특히, 그래프를 이해하기 위해서는 표와 그래프 사이의 변화와 함께 그래프들 사이의 구체적인 변화에 주목해야 한다. 이것은 그래프들 사이의 구조적 관계를 이해하도록 돕는다. 예를 들어, 하나의 자료를 number-line plot³⁾과 막대그래프로 나타내는 과정은 두 그래프 사이의 유사한 점과 차이점을 확인할 수 있으며, 이런 과정을 통해 그룹화된 자료를 좀 더 쉽게 막대그래프 나타낼 수 있다(p.75).

Number-line plot과 막대그래프는 비슷해 보이지만, 두 그래프 사이에는 중요한 차이점이 있다([그림 II-1] 참고). 첫째, 막대그래프에서는 각 자료값에 대한 도수들이 시각적으로 분리되어 보이지 않는다. 각각의 막대는 하나의 자료에 대한 그룹을 나타낸다. 그러나 number-line plot에서는 자료값의 수를 셀 수 있다. 둘째, number-line plot이 하나의 축을 갖는 반면에, 막대그래프는 두 개의 축을 갖는다. 막대그래프에서는 자료의 도수를 읽기 위해 y축을 고려해야 한다.

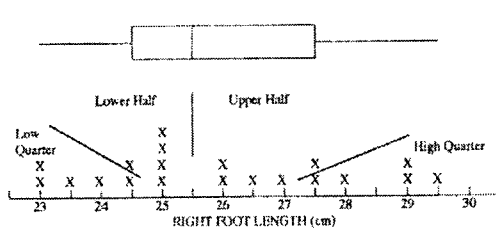


[그림 II-1] number-line plot과 막대그래프(Bright & Friel, 1998: 76)

- 2) 예를 들어, 상자 그림은 중앙값과 사분위수와 같은 개념적 요소를 담고 있다.
- 3) Number-line plot은 수직선 위의 각 값에 점이나 X를 쌓아 기록하는 형태로, y축은 각 자료값의 도수를 암묵적으로 나타내고 있으며 하나의 축만이 사용된다. number-line plot을 번역하여 사용할 경우, 수직선과 혼동될 수 있으며, 실제로 이 그래프가 의미하는 바를 전달하지 못할 수 있으므로, MiC 교과서에서 제시하고 있는 원어를 그대로 사용한다. number-line plot은 일부 교육과정 문서와 교과서, 또는 연구자에 따라 stacked dot plot이나 dot plot, line plot이라고도 한다.

그러나 학생들은 두 개의 변수를 동시에 고려하여 정보를 읽는 것에 익숙하지 않아 막대 그래프를 이해하는데 어려움을 가질 수 있다. Bright와 Friel(1998)은 6-8학년의 학생들이 number-line plot과 막대그래프로 제시된 자료를 해석할 때, number-line plot에서는 y축에 대해 해석할 필요가 없기 때문에 자료를 더 쉽게 해석하는 것을 확인하였다. 막대그래프를 학습하기 이전에 Number-line plot이 소개된다면 두 그래프의 유사점과 차이점뿐만 아니라, 막대그래프에 대한 이해를 강화할 수 있을 것이다.

Number-line plot은 여러 가지 그래픽 기술을 필요로 하지 않으며 쉽게 자료를 시각적으로 나타낼 수 있다. 이러한 number-line plot은 상자 그림을 도입하는데도 이용될 수도 있다. Number-line plot을 이용하여 X의 개수를 세어 자료의 중간을 찾아가며 중앙값에 대한 아이디어를 강화할 수 있다. 또, 이와 같은 방법으로 자료의 중간에서 위쪽 반과 아래쪽 반의 중간을 찾을 수 있다. 이것은 4분위수와 구체적으로 연결되며, 이를 이용하여 number-line plot 위에 상자그림을 그릴 수 있다([그림 II-2]참고). 이런 과정을 통해 5개의 값을 확인하고, 상자 그림을 이용하여 자료의 특성을 파악할 수 있다. 이와 같은 그래프의 이중표현은 상자의 넓이와 수염의 길이에 대응하는 number-line plot에 표현된 자료들의 밀도를 확인할 수 있는 기회를 제공한다(Watson, 2006: 91-92).



[그림 II-2] Number-line plot을 이용하여 상자그림 그리기(Watson, 2006: 92)

줄기와 옆 그림은 히스토그램을 만들 때 같은 넓이의 계급으로 자료를 그룹화하기 위해 사용되는 자연스러운 변화 과정이 될 수 있다. 히스토그램은 계급으로 그룹이 된 자료를 나타내는데, 줄기와 옆 그림은 이때 계급이 10인 특별한 형태로 볼 수 있다. 사실상 줄기와 옆 그림을 시계 반대 방향으로 90도 회전하면 히스토그램의 형태를 확인할 수 있다. 두 그래프 간의 연결은 학생들로 하여금 이산적인 자료를 나타내는 막대그래프와 연속적인 자료를 나타내는 히스토그램의 차이점을 분명히 인식할 수 있도록 하며, 히스토그램의 특징을 쉽게 파악할 수 있도록 한다. 그러나 줄기와 옆 그림에서 20이라는 줄기에 있는 자료의 최대값이 27인 경우, 학생들이 줄기의 크기를 20부터 27까지로 인식하는 경우에는 같은 크기의 계급을 갖는 히스토그램으로 그려질 수 없다(Bright & Friel, 1998: 80).

Folletie(1980)는 상자그림이 분포적 관점에서 히스토그램과 밀접히 관련되어 있음을 설명한다. 두 그래프는 모두 자료의 분포를 특징짓기 위해 비례적인 계급을 사용한다. 그러나 상자그림은 자료 분포의 전체적인 형태보다는 중심과 변동(variation)에 대한 정보를 제공하며, 히스토그램은 비례적인 적절한 계급 구간을 설정하면 분포의 전체적인 형태를 통찰할 수 있다(Friel, Curcio, & Bright, 2001, 재인용).

학생들이 상자그림을 이해하고 이를 분석하기 위해서는 중앙값과 4분위수라는 개념적 요소를 이해하는 것이 선행되어야 한다. 두 개념적 요소를 포함하는 상자그림은 자료를 국소적으로 보는 것에서 벗어나 전체적으로 조망하도록 하는데 좋은 도구가 된다. 그러나 우리나라 제7차 교육과정에서는 소개하지 않는 그래프 중 하나이다. 앞에서 언급한 바와 같이 number-line plot을 이용하여 두 개념적 요소와 더불어

상자그림을 비형식적으로 소개하는 것이 가능할 수 있다.

다른 형태의 그래프들은 또 다른 그래프로부터 필연적으로 발전되지 않는 관계가 있기도 하다. 예를 들어, 원그래프에 나타난 자료는 막대그래프로 나타낼 수 있으나, 막대그래프에 나타난 자료는 원그래프로 나타내는 것이 어렵다. 선 그래프는 전형적으로 함수적 관계나 시계열 자료를 반영한다. 시계열 자료는 막대그래프로 나타낼 수도 있으나, 편의상 함수적 관계를 표현하는데 막대그래프를 사용하지는 않는다(Bright & Friel, 1998). 하나의 그래프에서 자료를 재구성하여 다른 그래프로 나타낼 수 있는지에 대해 고려해보는 것은 두 그래프의 미묘한 차이를 인식하고 이해하는 것을 발달시키도록 도우며, 두 그래프로부터 얻게 되는 정보에 차이가 있음을 알게 할 수 있다.

통계적 그래프와 관련된 국내 연구들을 살펴보면 많은 연구들이 우리나라 교과서와 외국 교과서에서 통계 그래프의 지도 관점, 내용, 지도 방법에 주목하거나, 그래프 구성하기, 그래프 해석하기 활동이 어떻게 이루어지는지에 주목하여 비교하였다(송정화, 2001; 송정화, 권오남, 2002; 이선애, 2007; 임지애, 2003; 정재현, 2006). 최근에는 그래프 이해(송정화, 이종희, 2007; 이미현, 2007; 황현미, 방정숙, 2007)와 통계적 분포에 주목한 연구(임지현, 2008; 김경란, 2007)가 증가하고 있다. 그러나 그래프의 정의 방식 및 그래프간의 연결에 주목한 연구는 찾아보기 어렵다. 이 연구에서는 우리나라 제7차 초등학교 교과서와 MiC 교과서에서 소개하는 그래프의 종류와 정의 방식, 그래프간의 연결을 위한 그래프 비교하기 활동의 측면에서 그래프의 교수학적 변환 방식을 비교하였다.

III. 그래프 지도의 목표

1800년 이전까지 학자들은 자료를 표로 나타내는 것을 선호하여 그래프를 거의 사용하지 않았다(Bakker, 2004: 89). 그러나 그래프는 표에서 보여주는 값보다 더 많은 잠재적인 것을 가지고 있으며 복잡한 자료의 분포 경향과 변화의 패턴까지도 종합하여 보여준다. 그래프의 이러한 특징 때문에 수학의 다른 영역이나 다른 교과에서도 많이 사용된다. 이하에서는 학교 수학에서 그래프 지도의 기본 방향이 어떻게 설정되어 있는지를 우리나라 제7차 초등학교 교육과정과 NCTM(2000)의 「학교수학을 위한 원리와 기준」에서 살펴볼 것이다.

1. 우리나라의 교육과정 분석

제7차 수학과 교육과정의 초등학교 통계 영역에서 그래프 지도와 관련하여 제시하는 목표는 다음 세 종류이다(교육인적자원부, 1997: 44-62).

첫째, 자료 정리 도구로서의 그래프의 편리성을 인식하도록 한다. 예를 들어, “표나 그래프로 나타내는 것이 알아보기 쉽고, 비교하는데 편리함을 알게 한다.”와 같은 목표가 설정되어 있다.

둘째, 자료의 특성에 맞는 적절한 그래프를 선택하여 나타낼 수 있도록 한다. 예를 들어, “적절한 소재를 선택하여 자료를 수집하고, 이를 분류, 정리하여 알맞은 그래프로 나타내고 여러 가지 사실을 찾을 수 있다.”, “실생활에서 찾을 수 있는 여러 가지 자료를 목적에 맞는 그래프로 나타내고, 여러 가지 사실을 알 수 있다.”와 같은 것이 여기에 해당된다.

셋째, 그래프를 통해 자료의 특성을 파악할 수 있도록 한다. 예를 들어, “적절한 소재를 선택하여 자료를 수집하고, 이를 분류, 정리하여

알맞은 그래프로 나타내고 여러 가지 사실을 찾을 수 있다.”, “자료를 정리하여 이를 줄기와 옆 그림으로 나타내고 자료의 특성을 파악할 수 있다.”가 그 예이다.

2. 「학교수학을 위한 원리와 기준」의 그래프 지도 관점 분석

NCTM(2000)의 ‘자료 분석과 확률’ 기준에서 그래프 지도와 관련하여 제시하는 목표는 다음 네 가지이다(NCTM, 2000: 48-51, 108-114, 176-181).

첫째, 자료를 표현하는 방법(표, 그래프 등)의 유용함을 인식하도록 한다. 예를 들어, “자료를 표현하는 방법, 이를테면, 표, 차트 등이 어떤 역할을 하는 지 평가하는 데 많은 시간을 보내야만 한다.”, “자료, 차트, 그래프가 정보를 제공한다는 사실을 알아야 한다.”와 같은 목표가 제시된다.

둘째, 학생들 스스로 자료를 표현하는 방법을 개발하도록 한다. 예를 들어, “막대그래프나, 표, 선 그래프를 이용하여 자료를 표현하는 방법을 개발해야 한다.”와 같은 목표가 여기에 해당된다.

셋째, 표현 방법에 대하여 논의하여 최적의 방법을 찾도록 하며, 표현 방법에 따른 분석 결과를 비교하도록 한다. 예를 들어, “그래프나 다른 표현 도구가 무엇을 나타내는지에 초점을 둔 토론이 이루어져야 한다.”, “같은 자료를 다르게 표현한 후 비교하고, 각 표현 방법이 자료의 중요한 측면을 어떻게 드러내는지 평가해야 한다.”가 여기에 해당된다.

넷째, 자료를 정리하고 해석하면서 전체로서의 자료 집합에 대해 설명하고 두 개 이상의 자료 집합을 비교하여 설명하도록 한다. 예를 들어, “그래프에서 자료의 일부 뿐 아니라 자료

전체에 관심을 갖게 하며, 전체로서의 자료의 집합에 대하여 설명하도록 한다.”와 같은 목표가 설정되어 있다.

두 교육과정을 분석한 결과, 그래프를 사용하는 것이 자료를 정리하는데 편리하며 유용하다는 것을 알도록 한다는 점과 자료의 특성에 알맞은 그래프를 선택하여 자료를 나타내고 자료의 특성을 파악하여 설명하도록 한다는 점에서는 공통적임을 알 수 있다. 그러나 NCTM(2000)이 학생 스스로 자료를 표현하는 방법을 개발하도록 한다는 점, 그래픽 표현 방법에 따른 분석 결과를 비교하도록 한다는 점, 자료의 일부가 아니라 전체에 주목하여 설명하도록 한다는 점에서는 우리나라 교육과정과 다르다는 것을 알 수 있다.

IV. 그래프 지도의 내용

지금까지 우리나라 교육과정과 NCTM(2000)이 제시하고 있는 그래프 지도의 목표를 살펴 보았다. 이하에서는 우리나라 교과서와 MiC 교과서에서 그래프를 어떻게 교수학적으로 변환하여 다루고 있는지 비교·분석하였다 이를 위하여 우리나라 초등학교 2-나, 3-나, 4-나, 5-나, 6-나 단계의 수학 교과서와 MiC 교과서 중 통계 영역에서 그래프를 소개하는 *Picturing Numbers*(Boswinkel, N. et al., 1998)과 *Dealing with Data*(Wiler, M. et al., 1998)를 대상으로 하여, 그래프 단원의 내용 요소로서의 그래프의 종류와 정의 방식, 그래프 비교하기를 살펴보고자 한다.

1. 그래프의 종류

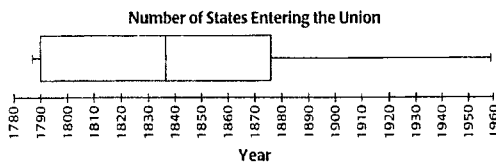
우리나라 교과서와 MiC 교과서에서 공통으

로 다루는 그래프의 종류는 막대그래프, 그림 그래프, 선그래프, 줄기와 잎 그림, 원그래프, 피그래프이다. MiC 교과서에서는 우리나라에서 다루지 않는 number-line plot과 상자 그림을 다루고 있다. MiC 교과서 *Picturing Numbers*에서 number-line plot을(Boswinkel, N. et al., 1998), 그리고 *Dealing with Data*에서 상자 그림을 다음과 같이 정의한다(Wiler, M. et al., 1998).

◆ 키를 측정하고 각자 종이에 그것을 기록해라. 자료를 묘사하는 하나의 방법은 수직선 위에 자료를 기록하는 것이다. ... 수직선 위의 적절한 지점에 키를 기록한 종이를 붙여라. 수를 나타내는 이런 방법을 **number-line plot**이라 부른다.

- number-line plot을 보고 학급에서 학생들의 키를 설명하라.
- 가장 많이 나타나는 키의 값은 무엇인가?
- 학급에서 키의 범위는 얼마나 되는가?
(Boswinkel, N. et al., 1998: 20)

◆ 앞에서 제시된 number-line plot은 상자 그림이라 불리는 형태의 그래프로 바꾸어 나타낼 수 있다. 상자 그림은 자료가 얼마나 퍼져있는지를 보여주는 그래프이다.



[그림 IV-1] 상자 그림

- number-line plot에서 어떻게 위와 같은 상자 그림을 얻었는가? 상자는 어디에서 나온 것인가?
- 상자의 끝에 있는 선분은 때때로 수염whiskers이라 불린다. 수염whiskers이 얼마나 긴지 아는가?(Wiler, M. et al., 1998: 84)

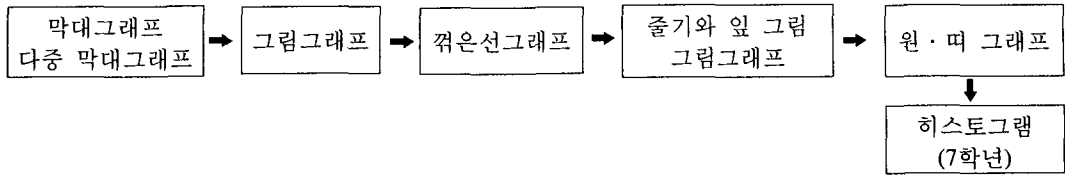
Number-line plot은 자료를 그래픽 표현으로

나타내는데 가장 쉬운 방법 중의 하나로 수직선 위의 각 값에 점이나 X를 쌓아 기록하는 형태이다. 이 그래프에서 y축은 각 자료값의 도수를 암묵적으로 나타내고 있으며, 단지 하나의 축만이 사용된다. 이것은 자료에 대한 도수 분포의 시각적 효과를 가지며 동시에 수평축에만 집중하게 한다(Bright & Friel, 1998: 74; Watson, 2006: 83). 그러나 점이나 X의 크기가 동일하게 그려지지 않을 경우에는 도수를 읽는데 어려움이 있어 혼란을 가져오기도 한다. 상자그림은 사분위수와 최소값, 최대값을 사용하여 자료의 중심과 흐트러진 정도를 그래프로 표현한 것이다(김기영 외, 2004: 100).

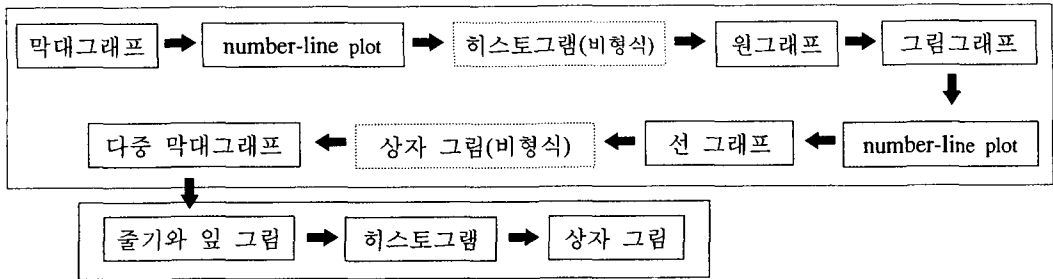
Number-line plot과 상자그림은 자료의 분포를 보여주는 그래프이다. MiC 교과서에서는 number-line plot을 통해 자료의 범위를 보도록 하며, 상자 그림은 자료의 50%가 상자에 있음을, whiskers를 통해 자료의 범위를 확인하도록 한다. 이러한 그래프들을 통하여 자료의 분포를 확인하는 것은 자료의 중심, 범위, 형태, 대칭성, 이상점 등을 쉽게 파악할 수 있다.

두 교과서에서 소개하는 그래프의 서열은 막대그래프, 그림그래프, 선 그래프, 줄기와 잎 그림, 히스토그램으로 동일하다([그림 IV-2], [그림 IV-3] 참고). 이러한 그래프의 서열은 여러 연구자들이 제시한 바와 같이, 자료가 항목별로 나타나는 막대그래프로 시작하여 자료가 집합적으로 나타나는 줄기와 잎 그림, 히스토그램 등의 순서로 제시되고 있다. 또한, 그래프를 해석하기에 간단한 것에서부터 시작하여 복잡한 것으로 나가고 있음을 확인할 수 있다.

MiC 교과서는 원그래프를 그림그래프 이전에 소개하고, 자료를 집합적으로 나타내는 히스토그램이나 상자 그림과 같은 그래프를 저학년에서 비형식적으로 소개함으로써 반복하여 다루고 있음을 알 수 있다([그림 IV-3] 참고).



[그림 IV-2] 우리나라 교과서에서 소개하는 그래프(3-7학년)



[그림 IV-3] MiC 교과서에서 소개하는 그래프(5-7학년)

2. 그래프 정의 방식

우리나라 교과서에서 그래프를 정의하는 방법은 외연적 정의 방법과 동의적 정의 방법이 사용된다. 외연적 정의 방법은 개념에 속하는 예를 사용하는 정의 방법이다. 동의적 정의 방법은 피정의항과 유사한 의미를 지닌 용어를 사용하여 정의하는 방법으로, 학생에게 친숙한 말이나 이해하기 쉬운 말을 사용하여 정의한다(조영미, 2001: 33-34). 우리나라 교과서는 막대 그래프, 그림그래프, 원·띠그래프를 정의하는데 외연적 방법과 동의적 방법을 결합하여 사용한다. 즉, 하나의 예를 들어 그래프를 소개하고, 피정의항과 유사한 용어를 사용하여 정의한다. 예를 들어, “의와 같이 조사한 수를 막대로 나타낸 그래프를 막대그래프라고 합니다(교육인적자원부, 2002a: 92).”, “위의 그림과 같이 전체에 대한 각 부분의 비율을 띠의 모양으로 나타낸 그래프를 띠그래프라 합니다(교육인적자원부, 2003: 108).”라고 정의한다. 동의적 정

의 방법은 우리나라 초등학교 수학의 다양한 내용 영역에서 사용되는 방법이지만, MiC 교과서에서 동의적 방법으로 정의되는 그래프는 없다.

외연적 정의 방법은 조영미(2001)에 따르면 여러 가지의 하위 유형으로 구분될 수 있다. 우리나라 교과서는 외연적 방법의 하위 유형 ‘[한 가지 예]인 V를 X라고 한다.’로 꺾은선그래프와 줄기와 잎 그림을 정의한다. 예를 들어, 줄기와 잎 그림의 정의는 다음과 같다.

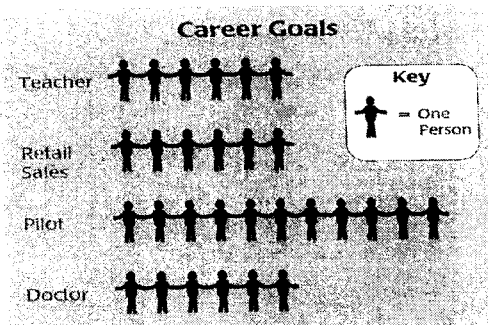
◆ 앞의 표를 보고 다음 방법으로 나타내어 보시오.
세로 선을 긋고 21살을 2 | 1과 같이 십의 자리 숫자는 세로선의 왼쪽, 일의 자리 숫자는 세로선의 오른쪽에 나타내어 보시오.

성민이네 마을 사람들의 나이 (단위: 세)	
줄기	잎
2	
3	
4	
5	
6	
7	

- 나이의 분포가 가장 많은 나이 대는 몇 십대입니까?
 - 40대는 몇 명입니까?
- 이와 같이 나타낸 그림을 줄기와 잎 그림이라고 합니다. 이 때, 세로선의 왼쪽에 있는 수를 줄기, 오른쪽에 있는 수를 잎이라고 합니다(교육인적자원부, 2002c: 109).

외연적 정의 방법은 예를 사용하는 방법으로 논리적으로 불완전하지만, 심리적 적합성을 가지고 있기 때문에 학교 수학에서, 특히 초등학교와 중학교 수학에서 적극적으로 사용되고 있다(조영미, 2001: 87). MiC 교과서에서 외연적 정의 방법을 통해 정의되는 그래프는 막대그래프, 그림 그래프, 선 그래프, 히스토그램이다. 예를 들어, 막대그래프의 경우 표로 주어진 자료를 보고 막대그래프를 그리도록 한 후, “방금 완성한 그래프를 막대그래프라 부른다(Boswinkel, N. et al., 1998: 16).”고 정의한다. 또한, 그림그래프는 다음과 같이 정의한다.

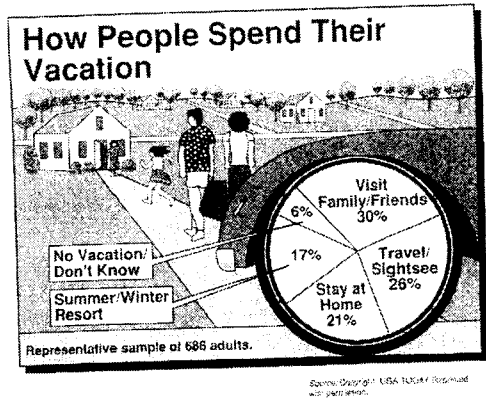
- ◆ Raisa는 커서 의사가 되려고 한다. Raisa는 자신의 학급에서 다른 학생들이 무엇이 되려고 하는 지 궁금하였다. Raisa는 학급 친구들을 조사하였다. 그 조사 결과에 기초하여, 아래와 같은 그림그래프를 그렸다(Boswinkel, N. et al., 1998: 50).



[그림 IV-4] 그림그래프

다른 그래프들이 정의된 후에 그래프를 해석

하는 활동이 이루어지는 것에 반하여, 원그래프는 아래와 같은 활동을 거쳐 정의된다. 이 정의 방법도 외연적 방법이나, 정의에 앞서 그래프의 의미를 알도록 하는 그래프를 해석하는 활동이 제시되어 있음은 주목할 만하다.



[그림 IV-5] 원그래프

- 이 조사에서 100%를 나타내는 것이 무엇인가? 50%에 해당되는 사람이 몇 명인가?
- 이 그래프가 무엇을 알려주는가?
- 조사에서 관광을 하는 사람들은 대략 어느 정도의 비율인가?
- 휴가동안 친구나 가족을 방문하겠다고 말한 사람들은 대략 몇 명인가?
- 위의 그래프를 원그래프라 한다. 왜 원그래프라 부르는가?(Boswinkel, N. et al., 1998: 32)

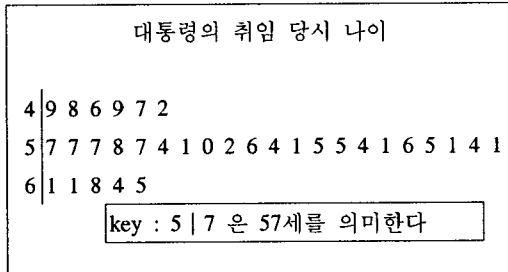
또, MiC 교과서에서 줄기와 잎 그림에 대한 정의는 그래프의 특징으로 소개된다. 즉, “불행하게도, Jamaal의 방법(tally chart)에서는 정확한 나이를 알 수가 없다. 모든 나이를 볼 수 있도록 나이를 기록하는 하나의 방법이 있다. 이것이 줄기와 잎 그림이다(Wiler, M. et al, 1998: 42).” 그리고 하나의 예를 통해 아래와 같이 구성 방법을 설명한다. 이 정의 방법 또한 외연적 방법이지만, 그래프의 특징을 강조하고 있다는 점에서 우리나라 교과서에서 사용

하는 외연적 방법과는 차이가 있다.

◆ 줄기와 잎 그림에서, 각각의 숫자는 십의 자리 수와 일의 자리 수로 분리된다. 자료 목록에 나와 있는 첫 번째 나이는 57이다. 이 57은 다음과 같이 쓴다.

5 | 7

너는 14쪽과 15쪽에 있는 대통령들의 목록에서, 대통령들의 취임시기의 나이에서 십의 자리 수와 일의 자리 수를 분리하여 아래와 같은 줄기와 잎 그림을 만들 수 있다.



주의: 다이어그램을 모든 사람이 읽을 수 있도록, 수들이 의미하는 바를 설명하기 위해, 오른쪽 하단에 항상 하나의 예(key)를 제시해야만 한다(Wiler, M. et al, 1998: 42).

앞에서 언급된 상자 그림 역시 줄기와 잎 그림의 정의처럼 그래프의 특징을 설명하고, 예를 제시하여 정의한다. 상자 그림과 함께 언급되었던 number-line plot⁴⁾은 조작적 방법으로 정의된다. 조작적 정의 방법은 일정한 조건을 제시하고 있는 내포적 방법 중에서 '한 개념이 관찰되는 상태를 정의의 한 부분으로 포함시키는 정의'를 의미한다(조영미, 2001: 30).

이상으로 두 교과서에서 사용한 그래프 정의 방법을 정리하면 다음 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 그래프 정의 방법

우리나라 교과서	
그래프의 종류	정의 방법
막대그래프	외연적+동의적
그림그래프	
꺾은선그래프	외연적
줄기와 잎 그림	외연적
원·띠그래프	외연적+동의적

MiC 교과서	
그래프의 종류	정의 방법
막대그래프	외연적
그림그래프	외연적
선 그래프	외연적
줄기와 잎 그림	그래프 특징+외연적
원그래프	
상자 그림	
number-line plot	조작적

두 교과서에서 그래프의 정의 방식을 비교한 결과, 그래프를 정의할 때 공통적으로 외연적 정의 방법이 주로 사용되고 있음을 확인하였다. 그러나 우리나라 교과서는 막대그래프, 그림그래프, 비울그래프를 정의할 때, 외연적 정의 방법과 동의적 정의 방법을 혼합하여 사용하였고, MiC 교과서는 줄기와 잎 그림, 원그래프, 상자 그림을 정의할 때, 모든 자료의 값을 보여주거나 자료의 분포를 알려주는 그래프의 특징을 강조하며 외연적 정의 방법을 사용한다는 점에서 차이를 발견할 수 있었다. 이런 정의 방법은 학생들이 그래프의 특징을 직접적으로 파악하고, 다른 그래프와 비교하도록 한다.

하나의 예를 통한 외연적 정의 방법은 심리적 적합성을 가지고 있기 때문에 초등학교 수학에서 많이 사용되지만, 각각의 개념을 고립되게 만드는 문제를 초래할 수 있다. 이런 문제는 그래프를 비교하는 활동을 통해 그래프간

4) 자료를 묘사하는 하나의 방법은 수직선 위에 자료를 기록하는 것이다. ... 수직선 위의 적절한 지점에 키를 기록한 종이를 붙여라. 수를 나타내는 이런 방법을 number-line plot이라 부른다(Boswinkel, N. et al., 1998: 20)

의 연결을 고려함으로써 해결될 수 있다고 본다. 이하에서는 두 교과서에서 그래프 비교 활동에 대한 교수학적 변환이 어떻게 이루어졌는지 살펴보고자 한다.

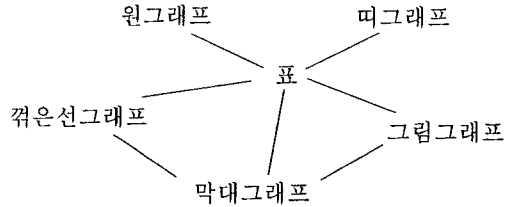
3. 그래프 비교하기

각각의 그래프의 특성을 파악하고 자료의 특성에 알맞은 적절한 그래프를 선택하기 위해서 그래프를 비교하는 활동은 필수적이다. 우리나라 교과서는 학년이 올라가면서 새로운 그래프를 하나씩 소개하고, 이전에 배운 그래프와 비교하도록 한다. 그러나 대부분의 자료가 표로 제시되고 이것을 그래프로 표현하므로, 표와 그래프를 비교하는 활동이 많은 부분을 차지한다. 실제로 그래프간의 비교는 막대그래프와 그림그래프, 막대그래프와 꺾은선그래프뿐이다([그림 IV-6] 참고). 예를 들어, 막대그래프와 그림그래프를 비교하는 활동은 다음과 같다.

- ◆ 막대그래프와 그림그래프를 비교하여 다음을 알아보시오.
 - 막대그래프와 그림그래프는 수량을 나타내는 방법이 어떻게 다른가?
 - 강아지를 기르는 가정이 많은 마을부터 차례로 알아보려면 어느 그래프가 더 편리합니까?
 - 강의 북쪽 마을과 남쪽 마을 중에서 강아지를 기르는 가정이 더 많은 쪽을 알아보려면 어느 그래프가 더 편리합니까?(교육인적자원부, 2002a: 108)

막대그래프와 그림그래프에서 수량을 나타내는 방법의 차이점을 통해 두 그래프의 자료 표현 방법에 차이가 있으며, 이로 인하여 두 그래프로부터 얻을 수 있는 정보가 다르다는 것

을 알게 한다.

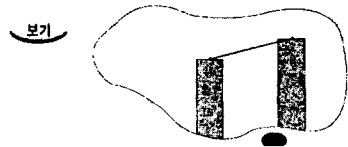


[그림 IV-6] 우리나라 교과서에서 그래프간의 비교

막대그래프와 꺾은선그래프의 비교는 꺾은선그래프를 도입하기 위해 비형식적인 방법으로 시작된다. 막대그래프에서는 알기 어려운 정보에 관한 문제를 해결하기 위한 방법으로 막대그래프를 변형하여 꺾은선그래프를 구성하는 방법을 소개하며 정의한다([그림 IV-7] 참고). 또한, 변화의 정도를 파악하기 쉬운 그래프를 선택하는 문제해결과정에서 막대그래프와 꺾은선그래프를 비교하게 한다.

● 이 그래프에서 12시 30분의 온도를 알 수 있는가?

② 앞의 막대그래프에 '보기'와 같이 그려 보아라.



[그림 IV-7] 막대그래프를 이용하여 꺾은선그래프 그리기

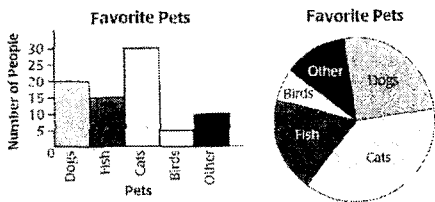
MiC 교과서에서도 우리나라와 같이, 이전에 배운 그래프와 새롭게 소개되는 그래프를 비교한다. 때때로 이 방법은 그래프를 정의할 때 사용되기도 한다. 줄기와 옆 그림의 정의 방법이 그 예이다⁵⁾. MiC 교과서에서 그래프 비교

5) 불행하게도, Jamaal의 방법(tally chart)에서는 정확한 나이를 알 수가 없다. 모든 나이를 볼 수 있도록 나이를 기록하는 하나의 방법이 있다. 이것이 줄기와 옆 그림이다(Wiler, M. et al, 1998: 42).

활동의 두 번째 형태는 같은 자료가 여러 가지 그래프로 표현됨을 설명하며, 비교하도록 하는 것이다. 이를 통해 각 그래프마다 자료에 대한 다른 정보를 제공해줌을 알게 한다. 그래프의 종류에서 살펴본 number-line plot과 상자그림이 이 경우에 해당된다. 다음은 원그래프와 막대 그래프를 비교하는 예이다. MiC 교과서에서는 이와 같이 하나의 자료를 두 개의 그래프로 표현하고 비교하는 활동이 많은 부분을 차지하고 있다([그림 IV-9] 참고).

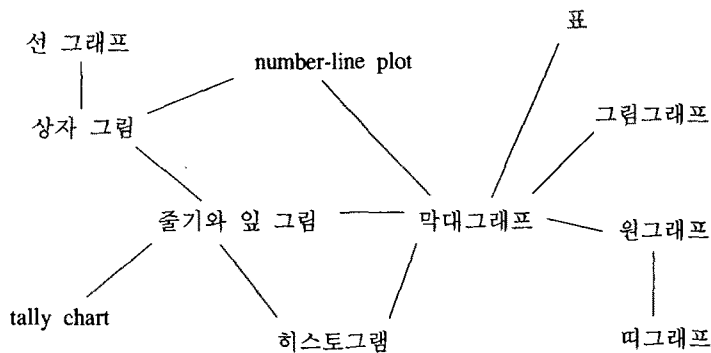
- ◆ 사람들이 좋아하는 애완동물에 대한 조사 결과가 아래와 같이 두 개의 그래프로 표현된다.

The two graphs below represent the results of a survey on the kinds of pets people like.



[그림 IV-8] 막대그래프와 원그래프 비교

- 같은 자료에 대해 두 개의 그래프로 나타낼 수 있는가?



[그림 IV-9] MiC 교과서에서 그래프간의 비교

- 막대그래프를 이용하여 가장 잘 대답할 수 있는 문제를 생각하여라.
- 원그래프를 이용하여 가장 잘 대답할 수 있는 문제를 생각하여라.

우리나라 교과서에서 막대그래프와 그림그래프의 비교하기는 주어진 문제 상황을 해결하기 알맞은 그래프를 선택하도록 하여 두 그래프가 나타내는 정보가 다름을 알게 한다. 이에 비해, MiC 교과서에서 막대그래프와 원그래프의 비교하기는 두 그래프로 대답할 수 있는 문제를 학생들 스스로 각각 만들어보도록 하여 두 그래프에서 얻어지는 정보가 무엇인지 알기 위해 두 그래프를 해석하는 과정까지 포함하고 있다고 볼 수 있다.

우리나라 교과서와 MiC 교과서에서 소개하는 그래프의 종류가 크게 차이하지 않음에도 불구하고, 우리나라 교과서는 그래프간의 비교가 많이 부족함을 확인할 수 있었다([그림 IV-6] 참고). 뿐만 아니라, 우리나라 교과서에서 그래프를 비교하는 활동은 같은 자료에 대한 여러 가지 그래프를 비교하는 것이 아니라, 다른 자료에 대해 각각의 그래프를 소개하고 해석하도록 하여 각각의 그래프 개념이 고립될 가능성이 더욱 더 높다고 할 수 있다.

V. 논의 및 맺는 말

지금까지 우리나라 교육과정과 NCTM(2000)이 제시하고 있는 그래프 지도의 목표를 살펴보고, 교과서에서 다루고 있는 내용 요소로서 그래프의 종류 및 정의 방식, 그래프를 비교하는 활동을 살펴보았다.

학생 주변에서 문제를 찾고, 문제 해결을 위해 자료를 수집하고, 다양한 표현 방법을 사용하여 정리하고, 해석하여 자료 전체의 특성을 파악하는 것은 두 교육과정이 통계 교육에서 공통적으로 추구하는 바이지만, 그래프 지도의 목표에서는 세 가지 차이점을 발견할 수 있었다. 첫째, 제한된 그래프를 소개하는 우리나라에 비해, NCTM(2000)은 학생 스스로 자료를 표현하는 방법의 개발을 허용한다. 둘째, NCTM(2000)은 그래프 표현 방법에 따른 분석 결과를 비교하도록 한다는 점이다. 그러나 우리나라의 경우, 교육과정에서는 이러한 결과 비교를 강조하고 있지 않았으나, 교과서에서 막대그래프와 그림그래프를 비교하는 활동에서 간접적으로 시도하고 있음을 확인할 수 있었다. 셋째, NCTM(2000)은 그래프를 통해 자료 전체에 주목하여 설명하도록 한다.

두 교과서에서의 내용 요소 측면 중 그래프의 종류에서는, MiC 교과서에서 number-line plot과 상자 그림을 포함하여 더 많은 그래프를 다루고 있었다. 그래프를 정의하는 방법은 두 나라가 외연적 정의 방법을 주로 사용하나, 우리나라 교과서는 외연적 방법과 동의적 방법을 혼합하여 사용하는 경우가 있었으며, MiC 교과서의 경우는 그래프의 특징과 함께 외연적 정의 방법을 사용하는 경우가 있었다. 또한, MiC 교과서에서만 다루어지는 number-line plot은 조작적 방법으로 정의되고 있었다. 그래프들간의 비교 활동은 우리나라 교과서가 매우 빈약한

반면에, MiC 교과서는 여러 가지 형태의 비교 활동이 이루어지고 있음을 확인할 수 있었다.

이상의 연구로 그래프의 바람직한 교수학적 변환을 위한 교육적 시사점 및 논의점을 다음과 같이 추출하였다.

첫째, 우리나라 교과서와 MiC 교과서의 가장 큰 차이점은 그래프간의 비교 활동이다. Bright와 Friel(1998)은 같은 특성을 갖는 자료를 표현하는 그래프 간의 연결과 여러 그래프 간의 해석이 학생들의 그래프에 대한 이해를 발전시키는 중요한 교수학적 방법이라 설명한다(p.82). 같은 정보를 제공하는 그래프끼리 또는, 다른 정보를 제공하는 그래프끼리 그래프 간의 다양한 비교 활동을 위해 이에 대한 체계적인 계획이 필요하다고 본다.

둘째, 우리나라 교과서나 MiC 교과서 모두 그래프 학습이 비울그래프를 제외하고는 막대 그래프, 그림그래프, 선 그래프, 줄기와 잎 그림, 히스토그램의 순서로 나타난다. MiC 교과서의 경우는 상자 그림을 포함하여 2-3개 학년에 걸쳐 3-5개의 그래프를 다루는데 비해, 우리나라의 교과서는 이러한 그래프를 5개 학년에 걸쳐 1년에 1-2개의 그래프를 다루고 있다. 이것은 우리나라 교과서에서 그래프간의 비교 활동이 빈약한 원인으로 추측해 볼 수 있다. 그러므로 학습 부담을 고려하여 현재와 같이 한 학년에서 하나의 그래프를 학습하는 것과 한 학년에서 여러 가지의 그래프를 학습하는 것에 대한 논의가 이루어져야 한다고 본다. 이와 동시에 한 학년에서 여러 가지의 그래프를 다룰 경우에 어떤 그래프들을 한 학년에서 다룰지, 또는 그래프의 서열을 어떤 기준으로 정할지에 대해서도 논의되어야 할 것이다.

셋째, MiC 교과서에서는 우리나라 교과서에서 다루지 않는 number-line plot과 상자그림을 다루고 있다. 앞에서 언급한 선행연구에 비추

어 볼 때, number-line plot은 저학년 학생들이 자료를 그래픽 표현으로 쉽게 나타낼 수 있도록 도우며, 이후에 학습하게 될 다른 그래프(예를 들어, 막대그래프, 줄기와 잎 그림, 상자 그림 등; Bright & Friel, 1998: 75, 80; Watson, 2006: 90)와 쉽게 연결 지어 비교하고, 그래프들 간의 유사점과 차이점을 확인할 수 있다. 또한, number-line plot은 각 자료값의 도수가 분리되어 나타나므로, 보상 전략을 이용하여 평균에 대한 시각적 해석을 가능하게 한다. 따라서 막대그래프를 학습하기 이전에 number-line plot을 소개한다면, number-line plot을 이용하여 막대그래프, 줄기와 잎 그림을 도입하고 이들 그래프 간의 비교활동을 추가할 수 있다. 또한 평균에 대한 형식적인 학습 이전에 number-line plot을 이용하여 평균에 대한 직관적인 이해를 도울 수 있으므로, 이에 대한 논의가 필요하다 고 본다.

넷째, NCTM(2000)은 학생 스스로 자료를 표현하는 방법의 개발을 허용한다. Watson(2006)은 학생들에게 엄격한 규칙 없이 스스로 그래프를 구성할 수 있는 기회가 주어지면 그래프 구성 능력이 발전될 수 있다고 주장한다. 그리고 자신의 연구에서 학생들이 통계학자들이 사용하는 관습을 따르지 않고서도 의미 있는 표현을 만들 수 있음을 확인하였다. 따라서 현재 교육과정에서 다루고 있는 그래프의 종류에 대한 학습과 더불어 학생들 스스로 자료를 표현하는 방법을 개발하도록 허용하는 것에 대한 논의가 이루어져야 한다고 본다. 여러 가지 그래프에 대한 형식적인 학습 이전에 학생들의 자료 표현 방법에 대한 허용이 이루어질 경우, 학생들 스스로 자료를 그래프로 나타내는데 필요한 것들을 깨달을 수 있는 기회를 가질 수 있다. 또, 그래프에 대한 형식적인 학습 이후의 자료 표현 방법에 대한 허용은 학생들이 그래

프가 갖추어야 하는 기본 요소들을 알고 있으므로, 원하는 정보를 얻기 위해 자료의 특징이 잘 드러나도록 새로운 표현 방법을 개발할 수 있을 것이다.

마지막으로 NCTM(2000)은 학생들이 그래프를 통해 자료의 일부가 아닌 자료 전체에 주목하여 설명하도록 한다. 자료의 전체에 주목하여 자료의 변이성을 고려하고 패턴이나 경향을 확인하여 설명하고 예측하는 것은 통계적 탐구 과정의 최종 목표이다. 그러나 우리나라 교육과정에서는 이러한 관점에 대한 진술을 찾기 어려웠다. 이에 대해서는 두 교과서가 그래프를 해석하는 활동을 어떻게 전개시키고 있는지에 대한 연구가 필요하다고 본다.

이 연구에서는 그래프의 지도 목표, 정의 방식과 비교하기 활동에 초점을 맞추어 두 개의 교과서를 비교하고 분석하여 위와 같은 논의점을 추출하였다. 그래프 학습 활동은 그래프를 정의하는 것에서 시작하여 그래프 그리기, 그래프 해석하기, 그래프 비교하기로 나누어 볼 수 있다. 바람직한 그래프의 교수학적 변환을 위해서는 교과서에서 그래프 그리기와 해석하기 활동이 어떻게 교수학적으로 변환되어 있는지 살펴보는 연구 역시 필요하다.

참고문헌

- 김기영 외(2002). 통계적 탐구. 교우사.
 김경관(2007). 분포개념 발달 관점에서 본 초·중등 확률통계 교육과정 및 교과내용의 분석. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.
 교육인적자원부(1997). 초등학교 교육과정 해설. 서울:교육인적자원부.
 _____(2001a). 초등학교 수학 1-가. 서울:대한교과서주식회사.

- _____ (2001b). 초등학교 수학 2-나. 서울:대한교과서주식회사.
- _____ (2002a). 초등학교 수학 3-나. 서울:대한교과서주식회사.
- _____ (2002b). 초등학교 수학 4-나. 서울:대한교과서주식회사.
- _____ (2002c). 초등학교 수학 5-나. 서울:대한교과서주식회사.
- _____ (2003). 초등학교 수학 6-가. 서울:대한교과서주식회사.
- 송정화, 권오남(2002). 6차와 7차 교과서 분석을 통한 그래프 지도 방안. *학교수학* 4(2), 161-191. 대한수학교육학회.
- 송정화, 이종희(2007). 그래프에서 교사와 학생의 의미 구성에 대한 사례 연구. *학교수학* 9(3), 375-396. 대한수학교육학회.
- 우정호(2005). *학교 수학의 교육적 기초*. 서울대학교 출판부.
- 이미현(2007). 6학년 학생들의 인지 발달 단계와 자료 표현방법의 이해에 대한 실태 분석. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 이선애(2007). 통계 그래프의 지도에 대한 고찰과 학생들의 통계 그래프 이해 능력 분석. 서울대학교 대학원 석사학위논문.
- 임지애(2003). 초등학교 수학교과서에 나타난 통계 그래프 지도 방법에 대한 분석. 서울교육대학교 대학원 석사학위논문.
- 임지현(2008). 분포 개념의 지도에 관한 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위논문.
- 조영미(2001). 학교 수학에 제시된 정의에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 정재현(2006). 한국과 일본의 초등 수학 교과서 비교 연구 : 통계 그래프를 중심으로. 전주교육대학교 대학원 석사학위논문.
- 황현미·방정숙(2007). 초등학교 6학년 학생들의 그래프 이해 능력 실태 조사. *학교수학* 9(1), 45-64.
- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Wilco, Amersfoort.
- Bakkar, A., & Gravemeijer, K.(2004). Learning to reason about distribution. In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.) *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*(pp.147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ben-Zvi, D., & Arcavi, A. (2001). Junior high school students' construction of global views of data and data representations. *Educational Studies in Mathematics*. 45, 35-65.
- Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about variability in comparing distribution. *Statistics Education Research Journal*. 3(2), 42-63.
- Ben-Zvi, D., & Garfield, J.(2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.) *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*(pp.3-16). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Boswinkel, N., Niehaus, J., Gravermeijer, K., Middleton, J.A., Spance, M.S. Burril, G., Milinkovic, J. (1998). Picturing numbers-teacher guide. In National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute(Eds.), *Mathematics in Context: A connected curriculum for grades 5-8*, Chicago: Encyclopedia Britannica, Inc.

- Bright, G. W. & Friel, S. N.(1998). Graphical representations: Helping students interpret Data. In S. P. Lajoie(Eds.). *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12*(pp. 63-88). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Ciancetta, M. A.(2007). *Statistics students reasoning when comparing distributions of data*. Unpublished doctoral dissertation, Portland state University.
- Cobb, P.A.(1999). Individual and collective mathematics development: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(1), 5-44.
- Curcio, F. R.(1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W.(2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D.(2004). Research on Statistical literacy, reasoning, and thinking: Issues, challenges, and implications. In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.) *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*(pp.397-409). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Konold, C. & Higgins, T.L.(2003). Reasoning about data. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, D. Schifter(Eds.). *A Research companion to principles and standards for school mathematics*(pp. 193-215). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Konold, C., & Pollatsek, A.(2002). Data analysis as a search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(4). 259-289.
- Makar, K., & Confrey, J.(2004). Secondary teachers' statistical reasoning in comparing two groups. In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.) *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*(pp.353-373). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Moore(1990). Uncertainty. In L. Steen(Eds.) *On the shoulders of Giants*(pp.95-137). Washington, DC: National Academy Press.
- NCTM(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pfannkuch, M., & Reading, C.(2006). Reasoning about distribution: A complex process. *Statistics Principles and standards for school mathematics*. Education Research Journal, 5(2), 4-9.
- Pfannkuch, M., & Wild, C.(2004). Towards an understanding of Statistical thinking. In D. Ben-Zvi & J. Garfield(Eds.) *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*(pp.17-46). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B.(1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets, *Educational Studies in Mathematics*, 37, 145-168.

- Watson, J. M.(2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Wiler, M.; Jong, J, A.; Burrill, G.; Middleton, J.A.; Simon, A.N.(1998). Dealing with data-Teacher guide. In National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute(Eds.), *Mathematics in Context: A connected curriculum for grades 5-8*, Chicago: Encyclopedia Britannica, Inc.
- Wild, C.(2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 10-26.

The Study on Didactic Transposition for Teaching Statistical Graphs - The comparison between the Korean and MiC's textbooks

Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)

Ji, Eun Jeung (Korea National University of Education, Graduate School)

This study looks around the goals of teaching statistical graphs that are introduced in the seventh Korean Curriculum for Elementary School and in the Principles and Standards for School Mathematics(NCTM, 2000), and these are compared. We compare how to transpose statistical graphs didactically between the Korean and MiC textbooks. For it, it examines the types of statistical graphs, the methods defining them, and the making connections and comparing among them, which are content components in the chapters on statistical graphs. The results show that in contrast to the Korean textbooks, NCTM(2000) has allowed students to develop their own expression for data, to compare results analysed within different

graphs, and to consider a graph as a whole in the goals of teaching statistical graphs. MiC textbooks have introduced the number-line plot and the box plot more than Korean. Although both of Korean and MiC textbooks usually use extensive methods for defining individual graphs, the former use extensive methods together with synonymic methods and the latter use extensive methods with the characteristics of graphs. Also, the number-line plot is defined using operative method in the MiC textbooks. MiC textbooks contain various activities for connecting and comparing graphs, but there are comparatively few comparing activities in the Korean textbooks.

* **Key words** : statistical graphs(통계 그래프), definition method of graphs(그래프의 정의 방식), comparing graphs(그래프 비교하기)

논문접수: 2008. 7. 10

논문수정: 2008. 8. 11

심사완료: 2008. 8. 13