韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2008. 5. 제 11권, 제 1호, 1-19

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2008, Vol. 11, No. 1, 1-19

초등학생들이 분수의 나눗셈에서 보이는 반복적 오류 분석

김 경 미 (서울소의초등학교)[1)]
강 완 (서울교육대학교)

지금까지 분수의 나눗셈에 대한 오류 분석 연구는 대부분 단 1회의 검사를 통해 분석을 한 후 오류를 검증하였다. 즉, 학생들이 반복적으로 보이는 다양한 오류에 대한 분석한 선행연구는 없었다. 이에 본 연구에서는 수학의 연산 영역 중 초등학교 수학 교육과정의 마지막을 장식한다고도 볼 수 있는 '분수의 나눗셈'에 대한 학생들의 반복적 오류 유형을 살펴봄으로써 학생들의 사고를 엿봄과 동시에 학생들에게 좀 더 신중하고 정확하게 가르쳐야 하는 정보를 얻는 것이 목적이다. 이를 위해 6학년 학생들이 분수의 나눗셈을 모두 학습한 후 시간의 흐름에 따라 나타나는 오류를 찾아내기 위해 학생들이 해결한 학습지를 바탕으로 관찰 분석 연구를 진행하였다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

교사는 한 시간의 수업을 위해 많은 준비를 한다. 수업 내용을 연구하기도 하고, 학생들의 이해를 높이기 위해 효과적인 자료를 준비하기도 한다. 또한, 학생들의 예상되는 반응을 생각해 보고 이에 적절한 반응을 마련해두기도 한다. 교사는 학생들이 흔히 범하기 쉬운 오류의 경향을 파악해 두고, 그에 대한 조언을 준비해 두는 것이 필요하다. 학생들의 약점을 교사가 사전에 파악하고 있으면서, 경우에 따라 적절히 대처할 수 있는 조언을 미리 준비해 둔다면 막상 지도에 임했을 때 예상 밖의 좋은 효과를 거둘 수 있을 것이다(강문봉 외, 2001, p. 274-275). 학생들은 다양한 사고를 하는 개체이며, 교사가 학생들의 사고를 미리 예상 할 수 있거나, 파악할 수 있다면 더욱 효과적인 피드백이 이루어질 수 있다. 더 나아가 교사와 학생간의 활발한 의사소통(communication)이 일어날 수 있다.

이에 대해 Von Glaserfeld(1988)는 "학생이 교사의 관섬에서는 오류인 것을 만들었지만, 학생에게는 오류가 아닌 매우 흥미로운 것으로 여겨질 수 있다."라고 말하고, "교사의 과제는 학생들의 관점에서 논리적인 답으로 여겨지는 이것을 바르게 해 주는 방법이 무엇인지 발견하는 것이다."라고 했다(Frank. K, 2003, 재인용). 즉, 학생은 자기 나름의 논리에 따라 적어도 자신의 입장에서는 올바르게 해결했다고 생각할 수 있다는 것이다. 이 점을 생각한다면, 오류는 무조건 잘못된 것이 아니라, 학생이 '어느 부분을 잘못 이해하고 있는가?'에 대한 정보를 교사에게 알려주는 시작점으로서 피드백을 위한 훌륭한 기초자료가 될 수 있다. 이런 관점에서 학생들의 사고를 다양하게 알고 있는 교사와 아닌 교사는 '학생에게 더욱 직접적이고 효과적인 피드백을 얼마만큼, 어떻게 줄 수 있는가?'라는 부분에서 큰 차이가 있을 수밖에 없다. 따라서, 교사는 학생들의 수학적 사고 과정을 이해할 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 오류에 대한 위와 같은 생각을 바탕으로, 초등학생들이 '분수의 나눗셈'에서 보이는 오류 유형 중 어느 것이 가장 빈번하게 일어나며, 그것이 시간에 따라 어떤 형태로 변화를 보이는지를 살펴보는 데 그 목적이 있다. 이를 위해 학생들의 풀이 과정을 살펴볼 수 있는 학습지를 바탕으로 관찰 분석 연구를 진행하고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구는 다음과 같은 문제를 해결하고자 한다.

1) 제 1저자

* 2008년 4월 투고, 2008년 5월 심사 완료.
* ZDM 분류 : D73
* MSC2000 분류 : 97D70
* 주제어 : 반복적 오류, 오류 유형, 1회성 오류, 유의미한 오류, 알파형, 베타형, 감마형, 델타형

가. 초등학생들이 분수의 나눗셈에서 가장 빈번하게 보이는 오류 유형은 무엇인가?

나. 초등학생들이 분수의 나눗셈에서 보이는 반복적 오류 유형 중 가장 큰 변화를 보이는 것은 무엇인가?

3. 용어의 정의

가. 1회성 오류

단 한 차의 검사에서만 같은 유형의 오류가 나타나는 경우를 말한다.

나. 유의미한 오류

분수의 나눗셈을 학습한 후 실시하는 학습지 풀이 과정에서 보이는 오류를 살펴봄에 있어, 한 학습지에서 같은 유형의 오류를 2회 이상 보인 오류를 말한다.

다. 반복적 오류

일정한 시간이 흐른 후 실시하는 학습지 검사에서 체크되는 유의미한 오류가 같은 유형으로 반복적으로 나타나는 경우를 말한다.

II. 이론적 배경

1. 오류 개념의 이해

국립국어원에서 제공하는 자료에 따르면 오류의 사전적 정의는 '그릇되어 이치에 맞지 않는 일', '<논리> 사유의 혼란, 감정적인 동기 때문에 논리적 규칙을 소홀히 함으로써 저지르게 되는 바르지 못한 추리'를 말한다. 하지만, 이것은 오류에 대한 일반적이고 포괄적인 내용을 담고 있다. 일상생활이 아닌 수학수업시간에서의 오류에 대해 학자들이 정확하게 정의를 내리고 있지는 않지만, 우리는 일반적으로 다음과 같은 내용을 생각해 볼 수 있다.

교사는 학생이 보인 오류를 틀린 반응으로 간주하고 그냥 지나치기 보다는 이를 분석하여 학생들이 교정할 수 있도록 도와줌으로써 학생들의 이해를 넓힐 수 있다. 하지만 매번 발생되는 오류가 교사에게 있어 새로운 것이라면 학생에게 알맞은 도움을 즉각적으로 줄 수 없다. 그러므로 교사는 각각의 수학 주제에 대해 학생들이 보일 수 있는 오류 유형이 무엇인지 미리 파악하고 있어야 하며, 발생된 오류가 고착되지 않고 교정될 수 있도록 지속적인 지도를 해 주어야 한다.

이러한 오류에 대해 숀펠드는 개인에 따라 인지적 자원이 불안정하여 때로는 오류적인 인지적 자원을 소지하고 있을 수 있다고 하였다. 이와 같은 현상에 대한 연구에 의하면, 수학을 배우는 학생들에게서 다양한 범위에서의 일관된 오류 양상이 존재하고 있음이 지적되고 있다. 이러한 오류를 보이는 학생의 경우에 대해 교사는 단순히 아직 그 학생이 주어진 문제의 해결에 필요한 바른 인지적 자원을 갖추고 있지 못하다는 판단을 할 수도 있지만, 사실은 잘못된 인지적 자원을 소지하고 있으면서 일관되게 그 자원을 사용하는 오류를 보일 수도 있다는 점을 주목해야 한다고 말한다(강완, 백석윤, 1998, 재인용). 이러한 경우, 교사의 필요한 지도 활동은 반복하여 올바른 내용의 지도가 아니라, 그 학생이 보여 주고 있는 오류를 추출해서 이를 근본적으로 제거시키는 방식의 지도 활동이다(강완, 백석윤, 1998).

따라서, 본 논문에서 사용되는 '오류'는 학생들이 분수의 나눗셈을 해결하며 보이는 올바르지 못한 계산 과정을 의미한다.

2. 오류 분석

오류 분석을 통한 수학 학습에 대한 연구가 갖는 목적은, 수학 학습의 여러 오류들이 어떤 이유로 인해 발생하게 되는가를 설명할 수 있는 일반적인 이론을 개발하기 위함이다. 이러한 연구에서는 일반적으로 학생들 자신이 배운 알고리즘을 적용하기에 앞서, 적합하지 않은 문제와 맞부딪혔을 경우 그러한 오류가 발생하게 된다는 가정을 한다. 그리고 학생들은 이러한 문제적 상황을 해결하기 위해, 현재 알고 있는 알고리즘을 새로운 문제 상황에 적합하도록 수정하게 되는데, 만일 그 알고리즘이 의미 없는 단순한 일단의 수학적 기술과 관련된 경우에는 학생들이 수정한 알고리즘은 바로 오류적인 형태의 알고리즘으로 되기 쉽다는 것이다. 이와 같이 학생들의 수학 학습에서 발생하는 오류의 유형을 파악하고, 그 오류가 체계성을 갖고 있을 때 그러한 오류의 발생 원인을 규명해서 오류 발생의 소지를 해소시키는 방식의 지도 방법을 고안해야 한다. 그러므로, 수학 학습 지도의 방법을 개선하려는 연구

노력은 실제적이며, 수학교육의 현장과 밀접한 연구 방법이라고 할 수 있다(강완, 백석윤, 1998).

또한, 오류의 분석은 학생들을 문제해결과정에 참여시키는 매우 가치 있는 도구이다. 무엇보다도 오류의 원인을 발견하고 그것을 고치는 문제는 학생들에게 있어서는 극도의 자극이 된다. 이 때 문제는 교사에 의해 먼저 단순화 혹은 조직화되지 않는다. 중요한 문제는 오류를 고치려고 시도하기 전에 오류의 원인을 명확히 하기위한 알맞은 질문을 하는 것이다. 더불어 간단하게 공식을 적용시키거나 많은 유사한 문제에서 보아온 기본적인 접근으로는 해를 얻을 수 없을 것이다. 학생은 실제로 "문제해결전략"이 필요할 것이고 성공하기까지 몇 가지 시도를 해봐야 한다. 마지막으로 해 그 자체는 유일하지 않을 수도 있으며, 놀라울 수도 있다(노은정, 2001).

Borasi(1986)에 의하면 수학교육에서는 주로 학생 오류에 관심을 가지며, 오류분석연구는 주로 다음과 같은 데에 초점을 맞춘다(노은정, 2001, 재인용).

- 오류의 잠재적인 원인을 결정하고 분류하려고 시도한다.
- 잠재적인 오류 기술들을 명확히 한다. (특히 산술과 같은 커리큘럼에서)
- 오류 기술의 빈도분포를 측정한다.
- 오류를 분류하고 그룹화하려고 시도한다.
- 개인적 오류 기술의 지속성을 측정한다.
- 부분적인 학습의 어려움과 오류를 치료하기 위한 교육적인 수단을 개발한다.

결국 학생들의 학습을 도와주고 올바른 이해로 안내해 주기 위해 필요한 오류 분석은 다양한 방법으로 이루어진다.

Greer와 Mulhern(1990)은 수학에서 오류에 관한 연구의 문헌을 통해 다음과 같이 다양한 접근 방법을 제시하였다(김경훈, 2005, 재인용).

첫째, 다양한 문제에 대한 오답의 '수'를 조사하는 방법으로 제한된 진단 값을 갖는 이러한 접근은 심리 접근과 유사하다.
둘째, 발생한 오류의 '형태'의 분석인데, 이러한 기술은 오류의 다양한 형태를 분류하고 오류 형태가 정답으로부터 어느 정도 벗어나 있나를 점검하며, 어떤 요인에 의해 오류가 발생하는가에 대한 추론을 하는 것 등을 포함한다.
셋째, '오류 유형'의 분석으로, 이것은 오개념의 징후가 되는 체계적인 오류를 밝힐 수 있고, 다양한 과제로부터 이끌어진 오류 유형은 사용되고 있는 전략에 대한 실마리를 가져다 줄 수 있다.
넷째, 개인차에 따라 오류를 '이끌어 내는' 것과 같은 방법으로 문제를 구상하는 것인데 여기서 연구자들은 개인차에 의해 발생하는 오류 유형을 관찰하고, 이들 오류의 원인에 대하여 추측하며, 유사한 오류가 발생할 것을 예언하는 새로운 문제를 체계적으로 구성한다.

이 중 본 연구자가 관심을 갖고 살펴보고자 하는 점은 바로 셋째에서 제시된 '오류 유형'을 통한 분석이다. Borasi가 말한 것처럼, 오류 유형 분석은 학생이 오류를 보이는 내용에 대해 좀 더 구체적으로 확인할 수 있고, 그러한 오류에 어떤 해결 방법으로 도움을 줘야 하는지에 대한 실마리를 얻을 수 있다고 여겨졌기 때문이다.

3. 선행 연구

오류 분석에 대한 연구들은 지금까지 각 분야의 주제별로 세분화되어 다수가 있지만, 여기서는 본 논문의 주제와 직접적으로 연관된 오류 분석 연구들만을 살펴보았다.

윤희태(2002)는 수원시에 있는 6개 초등학교의 3~6학년 학생 2,950명(3학년 498명, 4학년 498명, 5학년 990명, 6학년 964명)을 대상으로 자연수, 분수, 소수의 곱셈과 나눗셈을 중심으로 계산 오류를 확인하고, 그 원인을 분석하는데 초점을 맞추었다. 이를 위해 자연수의 곱셈과 나눗셈, 분수의 곱셈과 나눗셈, 소수의 곱셈과 나눗셈 등과 같이 계산 유형별로 오류를 조사하고 유형화하였다. 이 때 오류 유형을 알고리즘 오류, 받아올림 오류, 0처리 오류, 기수법 오류, 덧셈 오류, 곱셈구구 오류, 기술적 오류, 가정꾼 오류, 받아 내림 오류, 뺄셈 오류로 구분하였다. 분석 결과 중 분수 나눗셈 오류 유형별 오답율은 역수 오류, 알고리즘 오류, 대분수 변환 오류의 순으로 나타났다. 윤희태(2002)의 연구는 많은 학생을 대상으로 광범위하게 연구했다는 것과 각 교수-학습 주제별로 오류 유형의 비율을 파악했으며, 곱셈과 나눗셈의 특성을 반영하여 오류 유형 분석틀을 고안했다는 점에서 의미가 있다. 하지만, 3-4학년은 7차 교육과정, 5-6학년은 6차 교육과정으로 진행되었다.

추은영(2003)은 5학년 36명을 대상으로 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈과정에서 아동들이 공통으로 범하는 오류를 분석하고, 오류 유형별로 선수학습 요인과 오류와의 관계를 밝혀 분수지도에 대한 올바른 시사점을 모색하였다. 이를 위하여 오류의 원인을 분수개념 형성과정에 두고 분수개념 구조도와 교육과정에 근거를 두고 만든 검사지를 분석하여 오류의 원인과 각각의 오류가 나타나는 원인을 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈연산을 위한 선수학습 요소와 관련지었다. 오류 유형은 여러 선행연구를 근거로 분석한 후 분류하였다. 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 위계도에 근거해 원인을 진단하고 지도할 수 있고, 통분의 필요성 및 개념을 확실히 지도하는 것이 선행되어야 하며, 결과를 제대로 나타내는 것도 강조되어 지도되어야 됨을 알 수 있었다. 또한, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 통분하기, 받아내림이나 받아올림이 있는 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈, 이산량의 분수 - 이 세 가지에 대한 이해를 바탕으로 지도되어야 함을 알 수 있었다.

송정화(2005)는 분수의 곱셈과 나눗셈이 관련된 문제의 해결과정에서 초등학생들이 지식적인 측면에서 겪는 장애는 무엇이며, 그 원인은 무엇인지를 살펴보았다. 이를 위해 분수의 연산과 계산을 모두 학습한 전라북도 S초교 6학년 학생 39명과 N초교 6학년 59명을 연구 대상으로 하였다. 기본적인 분수 계산과 관련된 검사지를 작성하여 학생들의 계산 능력을 파악하고, 초등학교 5, 6학년 수학 교과서와 수학 익힘책에 있는 평범한 문제들로 이루어진 검사지를 작성하여 검사를 실시하였다. 그 결과 학생들은 계산 과정에서 곱셈과 나눗셈 모두 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 등 다른 연산과 혼동하고 있었으며, 많은 학생들이 일상적인 언어 표현을 분수라는 수학 표현으로 바꾸는 데 장애를 겪고 있었다. 또한, 그림을 보여주고 적합한 식을 만들어 보는 문제, 문장제 문제를 해결하기 위한 식을 고르는 문제, 주어진 식으로 해결할 수 있는 문장제 문제를 만들어 보는 문제 등에서 학생들이 많은 오답을 보였다.

민인영(2005)은 초등학교 과정에서 분수의 개념과 연산에 대한 학습을 모두 마친 6학년 82명의 학생과 교사 22명을 대상으로 분수의 나눗셈에서 보이는 오류의 유형을 조사하여, 어떤 특성을 보이는가를 분석하고, 학생들의 분수 개념 검사 및 교사들의 분수의 나눗셈에 대한 내용적 지식 및 방법적 지식을 조사 분석하였다. 이를 통해 아동 오류의 원인을 알아봄으로써 수학적인 사고와 기초적인 연산 기능을 신장시키고 문제 해결력을 함양시킬 수 있는 교수 학습 방법의 개선을 위한 기초자료로 삼고자 하였다. 학생들의 오류 분석 결과 학생들은 분수의 나눗셈에 대한 개념이 바르게 형성되어 있지 않으며 단순한 알고리즘의 적용을 통해 문제를 해결하는 경우가 많았다. 계산과정에서 나타나는 오류는 역수 오류가 가장 많았다. 학생들은 분수의 양적인 측면의 개념이 제대로 형성되어 있지 않았으며, 교사들 또한 분수의 나눗셈에 대한 올바른 개념 형성이 이루어져 있지 못한 경우가 많았다.

Ashlock(2006)은 학생들이 사용하는 오류 유형을 바탕으로 학생들의 이해를 돕고, 더 효과적인 교수법을 찾아, 학생의 활동을 분석적으로 살펴보려는 교사를 돕고자 하였다. 이를 위해, 정수의 덧셈과 뺄셈, 정수의 곱셈과 나눗셈, 분수와 소수의 개념과 동치, 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈, 분수와 소수의 곱셈과 나눗셈, 백분율과 비율, 기하와 측정의 7부분으로 나누어 각각의 오류 유형을 정의하고, 효과적인 교수법을 안내하였다. 이 중 분수의 나눗셈의 오류 유형은 두 가지 경우로 살펴보았다. 첫 번째 오류 유형은 분자끼리, 분모끼리 나누어 나눗셈의 몫을 결정하는 것이다. 이의 해결을 위해 여러 예시를 살펴보며 규칙을 발견하는 방법과 수직선과 종이 조각을 사용하여 어림하는 방법을 교수법으로 제시하였다. 두 번째 오류 유형은 나누는 수 대신 누누어지는 수를 역수로 하여 계산하는 것이다. 이를 해결하기 위해 단위 영역의 부분을 사용하는 방법과 수직선과 종이 조작을 사용하는 방법을 교수법으로 제시하였다. 결론적으로, 분수의 나눗셈을 하기에 앞서 정수의 나눗셈을 통해 의미를 복습하고, 절차에 맞춰 계산하기 전에 몫을 어림할 수 있는 시간을 주며, 곱셈과 나눗셈의 관계를 활용해야 함을 확실히 해야한다는 것을 제안하였다.

위의 연구들 중, 송정화(2005) 외의 다른 연구자들은 분수의 나눗셈과 분수의 개념을 검사하기 위해 나눗셈식 문제로 단 1회의 검사를 통해 학생들의 분수의 나눗셈 풀이과정 분석을 통해 오류를 검증하였다. 민인영(2005)은 좀 더 나아가 알고리즘 13문제에 분수의 나눗셈에 대한 개념 이해를 위해 분수의 나눗셈 문장제 4문제를 추가하여 연구하였으며, 교사의 측면까지 고려하며 조사 분석하였다. 하지만, 이것 역시 1회적

평가일 뿐이었다. 대부분의 오류 분석 연구에서는 이처럼 1회라는 적은 평가만으로 학생의 오류를 분석하고 있다. 그러나 이러한 것은 1회적 평가이기에 학생이 검사를 실시한 그 시점에서 오류를 범한 것이 실수일 수 있거나, 후에 그러한 오류가 사라지거나 계속 반복할 수 있음을 확인할 수 없는 것이다. Ashlock은 오류에 대한 교수법을 제안한 것은 좋았지만, 그 경우가 2명의 학생의 오류를 대표적으로 살펴본 것으로 그 대상 및 내용이 매우 적다. 또한, 윤희태(2002)를 제외한 다른 연구자들은 한 학급 또는 두 학급 정도인 약 35명에서 80명 정도의 적은 인원만을 연구 대상으로 설정하여 진행하였다. 학생들의 오류를 수치화하여 데이터로 비교하여 분석하는 오류 분석 연구에서는 연구 대상이 많을수록 일반화하여 받아들일 수 있는 측면이 높다고 보여진다.

이에 본 연구자는 이러한 문제점을 보완하고 학생들이 반복적으로 보이는 다양한 오류를 분석함으로써 향후 분수의 나눗셈 교수학습에 도움이 되는 연구를 하고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

가. 오답율 조사

본 연구 중 오답율 조사는 서울특별시에 있는 6개의 학교 6학년 학생을 대상으로 하였다. 학교는 서울특별시에 있는 11개 교육청 중 6개 교육청에서 각각 한 학교씩을 임의로 선정하였으며, 각 학교에서는 6학년 3학급을 임의로 선정하여 조사하였다. 이를 통해 연구 대상이 된 학생은 남 300명, 여 254명으로 총 554명이었다.

이들 대상을 임의로 선정한 것은 오답 유형을 본격적으로 연구하기에 앞서 연구 학교 이외의 다른 학교 학생들은 6학년 교육과정에서 다루는 (분수) ÷ (분수) 등의 모든 경우의 분수의 나눗셈을 학습한 후에 어떤 경우의 문제에서 주로 오답을 보이는지를 살펴보기 위해서였다. 즉, 이 조사를 통해 나온 결과는 오류 유형을 조사하는 기초 자료로 활용되었다.

나. 반복적 오류 유형 분석

본 연구 중 반복적 오류 유형 분석은 서울특별시 마포구에 소재하고 있는 S 초등학교 6학년 6개 반 학생 총 181명(남 92명, 여 89명)을 대상으로 하였다. 6학년 전체 학생을 대상으로 한 것은 검사 초기에는 오류를 보이다가 점차 그 오류가 사라지는 학생도 있지만, 반대로 검사 초기에는 오류를 보이지 않다가 후기에 오류를 보이는 학생도 있을 수 있다고 가정했기 때문이다.

2. 연구 방법

가. 오답율 조사

오답율 조사는 반복적 오류 유형 분석을 진행하기에 앞서 연구 대상이 아닌 다른 학교의 일반 학생들이 분수의 나눗셈에서 어려움을 주로 보이는 문제 구성 내용을 확인하기 위하여 실시한 1회성 조사였다.

(1) 검사의 시행

오답율 조사는 각 학급의 사정을 고려하여 10일동안 이루어졌으며, 이 기간 중 각 학급별로 1회 실시하였다.

(2) 학습지 구성 내용

오답율 조사를 위한 학습지는 학생들이 문제를 해결하는 데 있어 부담을 느끼지 않고, 시험이라는 생각이 들지 않도록 구성하려 노력하였다. 또한, 문제 출제 형식 중 문장제 문제와 문제 만들기는 연구를 준비하기 위해 실시했던 예비 조사(pilot study) 결과, 학생들이 문제를 해결하기 위해 식을 세우는 과정에서 분수의 나눗셈과 관련된 이해 말고도 문제 이해를 위한 언어 이해 능력과 같은 다른 능력이 필요하다고 판단되어 제외하였다. 위와 같은 이유로 단순 계산 문제만으로 분수의 나눗셈 해결과정의 오류 유형을 발견하는 연구를 하기로 결정하였다.

또한, 오답율 조사는 다른 목적이 있는 것이 아니라, 오류 유형 분석을 위한 조사를 위하여 학생들이 좀 더 많은 오류를 보이는 문제들만을 추출해내기 위한 기초 작업이었다. 이에, 오답율 조사는 학생들이 (분수) ÷ (분수), (자연수) ÷ (분수), (분수) ÷ (자연수)의 모든 분수의 나눗셈 계산 중에서 어떤 문제 구성 내용에서 오류를 많이 보이는지를 확인하기 위한 조사임을 분명히 하였다.

'분수의 나눗셈'은 크게 (분수) ÷ (분수), (자연수) ÷ (분수), (분수) ÷ (자연수)라고 나누어 볼 수 있다. 또한, 분수는 진분수, 가분수, 대분수로 세분화할 수 있

다. 이를 각각의 경우에 적용시키면 (분수) ÷ (분수)의 경우는 9가지, (자연수) ÷ (분수)의 경우는 3가지, (분수) ÷ (자연수)의 경우는 3가지로 모두 15가지의 경우가 생긴다. 또한, 다시 각각의 경우에서 계산 과정에서 약분이 있는 경우와 없는 경우를 모두 생각하면 15가지의 2배인 총 30가지의 문제가 생긴다. 하지만, 이를 모두 한 학습지로 구성할 경우 학생들이 부담으로 여길 수 있으며, 문제 푸는 것을 지겨워 할 수 있는 역효과가 생길 수 있다고 여겨졌다. 이러한 점을 고려해 30가지의 분수의 나눗셈을 각각 10문제씩 나누어 오답율 조사 학습지 A, B, C형을 구성하였으며 그 내용은 <표 1>과 같다. 그리고 각 학교의 3학급은 A, B, C형 중 한 가지만을 임의로 선택해 해결하도록 하였다.

<표 1> 오답율 학습지 문제 구성 내용

문제 번호	약분 유무	학습지 A형 구성 내용	학습지 B형 구성 내용	학습지 C형 구성 내용
1	X	(진분수)÷(진분수)	(진분수)÷(가분수)	(진분수)÷(대분수)
2	○	(가분수)÷(대분수)	(가분수)÷(진분수)	(가분수)÷(가분수)
3	X	(대분수)÷(대분수)	(대분수)÷(진분수)	(대분수)÷(가분수)
4	○	(자연수)÷(가분수)	(자연수)÷(대분수)	(자연수)÷(진분수)
5	X	(가분수)÷(자연수)	(대분수)÷(자연수)	(진분수)÷(자연수)
6	○	(진분수)÷(가분수)	(진분수)÷(대분수)	(진분수)÷(진분수)
7	X	(가분수)÷(가분수)	(가분수)÷(대분수)	(가분수)÷(진분수)
8	○	(대분수)÷(진분수)	(대분수)÷(가분수)	(대분수)÷(대분수)
9	X	(자연수)÷(진분수)	(자연수)÷(가분수)	(자연수)÷(대분수)
10	○	(대분수)÷(자연수)	(진분수)÷(자연수)	(가분수)÷(자연수)

나. 반복적 오류 유형 분석

(1) 검사의 시행

학생들이 분수의 나눗셈에서 보이는 반복적 오류 유형을 발견하기 위하여 약 4개월 동안 시간 간격을 두고 1차부터 5차까지 총 5회에 걸쳐 학습지를 통한 검사를 실시하였다.

오류 유형 1차 검사는 학생들이 '분수의 나눗셈'을 학습하기 전인 2학기 개학식날 이루어졌다. 2차 검사는 오답율 조사를 통해 학생들이 주로 오답을 보인 문제를 정리하여 학습지 제작을 마친 후 실시하였다. 또, 3차 검사는 2차 검사를 실시한지 2주 후에, 4차 검사는 3차 검사를 실시한지 3주 후에, 5차 검사는 4차 검사를 실시한지 4주 후에 실시하였다.

(2) 학습지 구성 내용

반복적 오류 유형 분석을 위한 학습지는 오답율 조사와 마찬가지로 학생들이 부담을 느끼지 않고, 시험이라는 생각이 들지 않도록 구성하려 노력하였다.

오류 유형 1차 검사에서는 학생들이 5학년 나 단계의 '분수의 나눗셈'에서 학습한 (분수) ÷ (자연수)를 얼마만큼 해결할 수 있는지를 확인하고, 어떤 문제점이 있는지를 확인하기 위해 (분수) ÷ (자연수)를 좀 더 세분화하여 구성하였다. 즉, 1차 검사에서 제시된 문제의 구성 내용은 다음 <표 2>와 같다.

<표 2> 1차 학습지 문제 구성 내용

문제 번호	약분 유무	구성 내용	문제 번호	약분 유무	구성 내용
1	X	(진분수)÷(자연수)	2	○	(진분수)÷(자연수)
3	X	(가분수)÷(자연수)	4	○	(가분수)÷(자연수)
5	X	(대분수)÷(자연수)	6	○	(대분수)÷(자연수)

반복적 오류 유형 분석에서는 학생들이 계속 보이는 오류를 좀 더 살펴보는데 목적이 있으므로, 오류유형 2차에서 5차 검사에서는 오답율 조사에서 나온 결과를 바탕으로 문제를 구성하였다. 오답율이 높은 문제 중 학생들의 부담을 고려하여 20문제를 10문제씩 A, B형으로 나누어 연구 대상 학생들에게 학습지 유형별로 3학급씩 조사를 실시하였다. 2차에서 5차까지의 학습지는 문제의 종류나 문제지의 유형과는 상관없이 단지 학생들이 분수의 나눗셈에서 보이는 오류의 유형을 조사, 분류, 정리하는 자료로만 이용되었다. 2차에서 5차 검사에 사용된 학습지 A형, B형의 문제 구성 내용은 다음 <표 3>과 같다.

<표 3> 2차에서 5차 검사에서 사용된 학습지 문제 구성 내용

문제 번호	약분 유무	학습지 A형 구성 내용	학습지 B형 구성 내용
1	X	(진분수)÷(진분수)	(가분수)÷(가분수)
2	○	(가분수)÷(가분수)	(가분수)÷(진분수)
3	X	(대분수)÷(진분수)	(가분수)÷(자연수)
4	○	(대분수)÷(가분수)	(대분수)÷(진분수)
5	X	(자연수)÷(대분수)	(자연수)÷(진분수)
6	○	(가분수)÷(자연수)	(자연수)÷(대분수)
7	X	(자연수)÷(가분수)	(가분수)÷(대분수)
8	○	(가분수)÷(대분수)	(대분수)÷(대분수)
9	X	(대분수)÷(자연수)	(진분수)÷(자연수)
10	○	(진분수)÷(자연수)	(대분수)÷(자연수)

앞의 과정에 따른 오답율 조사와 반복적 오류 유형 분석을 위한 검사 과정은 다음 <표 4>와 같다.

<표 4> 오답율 조사와 반복적 오류 유형 분석을 위한 검사 과정

<table>
<tr><th>목적</th><th>차수</th><th>검사 시기</th><th>검사 내용</th><th>검사 대상</th><th>검사 방법</th></tr>
<tr><td>반복적 오류 유형</td><td>1차</td><td>6-나 단계 1단원 '분수의 나눗셈'을 학습하기 전</td><td>분수÷자연수</td><td>S초등학교 6학년 181명</td><td rowspan="6">학습지</td></tr>
<tr><td>오답율</td><td></td><td>6-나 단계 1단원 '분수의 나눗셈'을 학습한 후</td><td rowspan="5">분수÷분수
분수÷자연수
자연수÷분수</td><td>6개 초등학교 6학년 554명</td></tr>
<tr><td rowspan="4">반복적 오류 유형</td><td>2차</td><td>6-나 단계 1단원 '분수의 나눗셈'을 학습한 후</td><td rowspan="4">S초등학교 6학년 181명</td></tr>
<tr><td>3차</td><td>2차 검사로부터 2주경과 후</td></tr>
<tr><td>4차</td><td>3차 검사로부터 3주경과 후</td></tr>
<tr><td>5차</td><td>4차 검사로부터 4주경과 후</td></tr>
</table>

Ⅳ. 분석

1. 오답율 조사

가. 조사 현황

(1) 학교별 위치 및 조사 학생 수

조사 대상이 된 6개 학교는 서울특별시 11개 교육청 중 임의로 선정된 성동, 남부, 동부, 북부, 중부, 서부 교육청에 소속된 학교이다. 오답율 조사에는 서울특별시의 6개 학교에서 각각 3학급씩 총 18학급에서 모두 554명(남 300명, 여 254명)이 조사 대상이 되었다. 이들 학생은 모두 A, B, C유형 중 한 유형의 학습지에 있는 10문제만을 15분 동안 해결함으로써 오답율 조사에 참여하였다. <표 5>는 오답율 조사 참여 학교와 학생 현황을 나타낸다.

<표 5> 오답율 조사 참여 학교 및 학생 현황

지역청		성동	남부	동부	북부	중부	서부	유형별 인원수(명)
학교명		S1초교	S2초교	C1초교	C2초교	C3초교	B초교	
A유형	남(명)	17	14	18	12	15	21	97
	여(명)	13	16	15	12	15	15	86
	계(명)	30	30	33	24	30	36	183
B유형	남(명)	18	15	16	14	17	21	101
	여(명)	15	16	15	11	12	16	85
	계(명)	33	31	31	25	29	37	186
C유형	남(명)	17	16	17	15	18	19	102
	여(명)	15	12	15	11	14	16	83
	계(명)	32	28	32	26	32	35	185
학교별 남자 인원수(명)		52	45	51	41	50	61	300
학교별 여자 인원수(명)		43	44	45	34	41	47	254
학교별 인원수(명)		95	89	96	75	91	108	554

나. 오답율 조사 결과

(1) 오답 확인

10월 2일까지 학습지를 모두 수합한 후, 추석 연휴기간인 10월 3일부터 8일까지 채점을 통해 오답을 확인하였다. 오답은 오류와 달리 문제에서 요구하는 내용에 맞추어 해결해야 하므로 첫째, 답이 옳지 않은 것, 둘째, 답이 옳더라도 계산 과정이 바르지 못한 것, 셋째, 계산 결과를 약분하지 않은 것은 오답으로 처리하였다.

(2) 오답율 조사 결과

오답을 확인한 후, 이를 문제 구성 내용을 중심으로 오답율을 정리하였다. 오답율 조사는 학생들이 모든 종류의 분수의 나눗셈을 다 학습한 후 실시하였는데도, 학생들 대부분이 약분이 있는 계산과 없는 계산, 그리고 분수의 종류에 상관없이 (분수) ÷ (자연수)에서 가장 높은 오답율을 차례로 보였다. 전체 오답율 조사 결과는 <표 6>과 같다.

<표 6> 분수의 나눗셈 문제 종류에 따른 오답율 조사 결과

순위	분수의 나눗셈 문제 종류	오답율
1	약분이 있는 (대분수) ÷ (자연수)	39.3%
2	약분이 있는 (가분수) ÷ (자연수)	31.9%
3	약분이 없는 (진분수) ÷ (자연수)	30.3%
4	약분이 없는 (대분수) ÷ (자연수)	28.0%
5	약분이 없는 (가분수) ÷ (자연수)	26.2%
6	약분이 있는 (진분수) ÷ (자연수)	24.7%
7	약분이 있는 (가분수) ÷ (진분수)	18.3%
8	약분이 없는 (자연수) ÷ (가분수)	17.7%
9	약분이 있는 (가분수) ÷ (대분수)	17.5%
10	약분이 없는 (가분수) ÷ (가분수)	15.8%
11	약분이 있는 (대분수) ÷ (대분수)	15.7%
12	약분이 없는 (대분수) ÷ (진분수)	15.6%
13	약분이 있는 (대분수) ÷ (가분수)	15.6%
14	약분이 없는 (가분수) ÷ (대분수)	15.1%
15	약분이 있는 (대분수) ÷ (진분수)	13.1%
16	약분이 있는 (자연수) ÷ (대분수)	12.9%
17	약분이 있는 (자연수) ÷ (가분수)	11.5%
18	약분이 있는 (가분수) ÷ (가분수)	10.8%
19	약분이 있는 (진분수) ÷ (대분수)	10.8%
20	약분이 없는 (자연수) ÷ (대분수)	10.8%
21	약분이 없는 (진분수) ÷ (진분수)	10.4%
22	약분이 없는 (자연수) ÷ (진분수)	10.4%
23	약분이 없는 (가분수) ÷ (진분수)	10.3%
24	약분이 없는 (대분수) ÷ (가분수)	9.2%
25	약분이 있는 (자연수) ÷ (진분수)	9.2%
26	약분이 있는 (진분수) ÷ (진분수)	8.1%
27	약분이 없는 (진분수) ÷ (대분수)	7.6%
28	약분이 없는 (진분수) ÷ (가분수)	7.0%
29	약분이 없는 (대분수) ÷ (대분수)	6.0%
30	약분이 있는 (진분수) ÷ (가분수)	2.7%

(3) 결과 활용

연구의 핵심인 반복적 오류 유형을 찾기 위해 오답율 조사 결과를 바탕으로 하여 오답율이 높은 문제를 중심으로 분수의 나눗셈 문제 종류를 선별하여 반복적 오류 유형 검사를 위한 학습지를 제작하였다.

오답율이 높았던 문제 중 반복적 오류 유형 검사를 위한 학습지에 활용할 문제 종류를 선별함에 있어 오답율 순위 10위~14위가 매우 근소한 차이를 보임으로써 10문제가 아닌 20문제를 선별해 각각 10문제씩의 A, B유형으로 두 종류의 학습지를 만들어 활용하기로 하였다. 이는 오답율 조사와 마찬가지로 학생들에게 심리적 부담감을 갖게 하지 않도록 하기 위함이었다. 즉, 오답율이 높은 문제를 먼저 선별하고, 약분이 있는 문제와 없는 문제를 같은 비율로 선별하였다.

A형과 B형은 각각 3반씩 나누어 실시하였고, 학생들이 A형과 B형을 해결한 결과는 학습지 유형에 상관없이 반복적 오류 유형을 확인하는 자료로만 활용하였다.

2. 반복적 오류 유형 분석

가. 오류 분석을 위한 준거 설정

학습지 채점은 일관성을 유지하기 위해 각 반에서 학습지 검사를 실시한 후 바로 모아 연구자가 직접 채점하였다. 오류를 관찰하여 분류 기록하면서, 정답으로 인정할 것과 오류로 분류할 내용에 대한 기준을 다음과 같이 설정하였다.

먼저, 채점하는 과정에서 정답으로 인정한 내용은 3가지이다. 첫째, 기본적으로 교육과정에서 제시하고 있는 풀이 과정을 정답으로 하였다. 둘째, 풀이 과정에서 자신만의 풀이 과정이 있으면 인정해 주었다. 예를 들어, 문제 위나 바로 옆에 제수를 바로 역수로 바꾸어 적은 후 계산한 경우와 역수를 나타냄에 있어 완전하지는 않더라도 의미가 전달되는 경우, 올바른 식은 아니더라도 풀이 과정이 옳은 경우이다. 셋째, 결과를 나타냄에 있어 약분을 하지 않거나, 대분수로 나타내지 않은 경우는 그 내용이 옳다면 정답으로 인정해 주었다. 이 연구는 학생들의 결과 처리의 정확성을 확인하는 것이 아니므로 약분을 하지 않거나 대분수로 나타내지 않은 것을 오류로 보지 않는다는 기준을 세웠기 때문이다.

다음으로, 채점하는 과정에서 정답으로 인정하지 않고, 오류로 분류한 내용은 4가지이다. 첫째, 정답으로 인정한 경우를 제외하고, 풀이과정과 답이 모두 올바르지 못한 경우는 정답으로 인정하지 않았다. 둘째, 답은 못 구했더라도 풀이 과정이 나타나 있는 중에 오류가 드러나면 체크했다. 셋째, 답은 맞았더라도 풀이 과정이 옳지 않으면 틀린 것으로 처리하고 오류 유형을 찾았다. 넷째, 등식으로 나타낸 경우, 등식이 올바르지 않거나, 등식이 완성되지 않으면 정답으로 인정하지 않았다.

나. 오류 유형 분류

오류 유형을 분류하기 위해 처음에는 학생들의 학습지를 수합해 연구자가 직접 채점하며 다양한 오류를 관찰하여 차례로 기록하였다. 2차 검사가 끝난 후에는

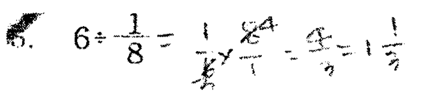
그러한 오류를 종류별로 묶어 8가지로 분류하였다. 3차에서 5차 검사가 진행되는 동안에는 이전에 분류한 오류를 좀 더 세분화하기도 하고, 통합하기도 하면서 오류 유형을 총 7가지로 정리하였다.

오류 유형은 크게 계산구조상의 오류와 단순계산오류로 나눌 수 있다.

먼저, 계산구조상의 오류는 4가지로 분류할 수 있었고, 이를 각각 오류 유형 1에서 오류 유형 4로 정리하였다. **오류 유형 1은 분수의 나눗셈 과정에서 피제수와 제수를 모두 역수로 취한 경우**이며, 피제수와 제수가 분수이든 자연수이든 상관없이 다 나타났다. 즉,

$$\bigcirc \div \frac{\triangle}{\square} = \frac{1}{\bigcirc} \times \frac{\square}{\triangle} \text{ 또는 } \frac{\bigcirc}{\diamond} \div \frac{\triangle}{\square} = \frac{\diamond}{\bigcirc} \times \frac{\square}{\triangle}$$

의 형태로, <그림 1>은 오류 유형 1의 예이다.



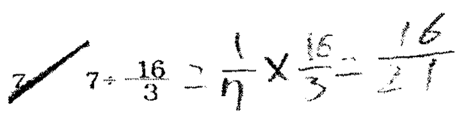
<그림 1> 5차에서 학생 520번이 보인 오류

오류 유형 2는 분수의 나눗셈 과정에서 제수가 아닌 피제수만을 역수로 바꾸어 계산한 경우이다. 즉,

$$\bigcirc \div \frac{\triangle}{\square} = \frac{1}{\bigcirc} \times \frac{\triangle}{\square} \left(\text{또는} = \frac{\triangle}{\square} \times \frac{1}{\bigcirc}\right),$$

$$\frac{\triangle}{\square} \div \bigcirc = \frac{\square}{\triangle} \times \bigcirc$$

의 형태로, 나눗셈을 곱셈으로 바꾸는 과정에서 제수를 역수로 바꾸는 것을 혼동한 경우라 하겠다. <그림 2>는 피제수를 역수로 취한 오류 유형 2의 예이다.

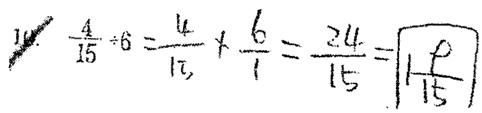


<그림 2> 5차에서 학생 215번이 보인 오류

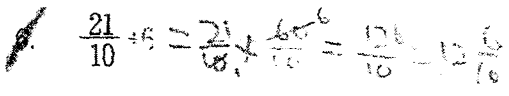
오류 유형 3은 제수를 올바르게 역수로 바꾸지 못한 경우이다. 즉,

$$\frac{\triangle}{\square} \div \bigcirc = \frac{\triangle}{\square} \times \frac{\bigcirc}{1} \text{ 또는 } \frac{\triangle}{\square} \div \bigcirc = \frac{\triangle \times \bigcirc}{\square}$$

등과 같은 형태로 나타난다. 주로 제수가 자연수인 경우에 나타났으며, 제수인 자연수를 역수로 취하지 않고, 분모가 1인 분수형태로만 바꾸어 나타낸 채 계산을 진행한 경우이다. 이러한 예는 <그림 3>, <그림 4>와 같다.



<그림 3> 4차에서 학생 121번이 보인 오류

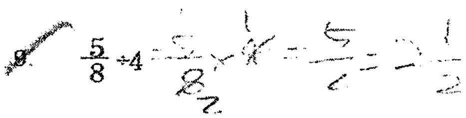


<그림 4> 3차에서 학생 110번이 보인 오류

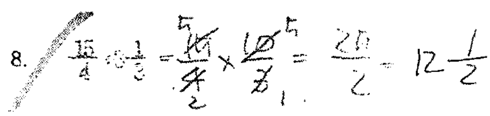
오류 유형 4는 분수의 나눗셈이 아닌 분수의 곱셈을 한 경우이다. 즉,

$$\frac{\triangle}{\square} \div \bigcirc = \frac{\triangle}{\square} \times \bigcirc \text{ 또는 } \frac{\triangle}{\square} \div \frac{\bigcirc}{\diamond} = \frac{\triangle}{\square} \times \frac{\bigcirc}{\diamond}$$

등과 같은 형태를 보이며, 제수를 역수로 취하지 않은 채 ÷만 ×로 바꾸어 분수의 나눗셈이 아닌 분수의 곱셈 계산을 한 것이다. <그림 5>, <그림 6>은 이러한 예를 보여준다.

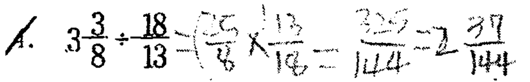


<그림 5> 2차에서 학생 425번이 보인 오류

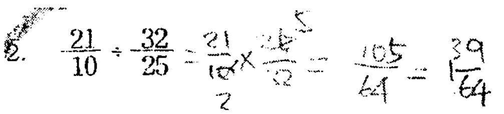


<그림 6> 2차에서 학생 228번이 보인 오류

다음으로, 단순계산오류는 3가지로 분류할 수 있었고, 이를 각각 오류 유형 5에서 오류 유형 7로 정리하였다. **오류 유형 5는 대분수와 가분수의 전환 문제 때문에 발생하는 오류**이다. 즉, 대분수를 가분수로 잘못 고치거나, 가분수를 대분수로 잘못 고쳐서 발생하는 오류이다. 이는 계산 과정 뿐만 아니라 계산 결과를 정리할 때도 함께 살펴서 체크하였다. <그림 7>과 <그림 8>은 이러한 예를 보여준다.



<그림 7> 2차에서 학생 306번이 보인 오류

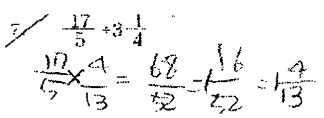


<그림 8> 5차에서 학생 206번이 보인 오류

오류 유형 6은 계산의 문제로 약분 관계를 잘못 짓거나, 약분 계산을 잘못하거나, 계산을 잘못하거나, 제수에 자연수가 있는 경우 분모와 분자에 둘 다 자연수를 곱하는 경우 등을 말한다. <그림 9>, <그림 10>, <그림 11>은 오류 유형 6의 예이다.

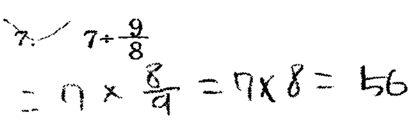
<그림 9> 2차에서 학생 522번이 보인 오류

<그림 10> 2차에서 학생 117번이 보인 오류

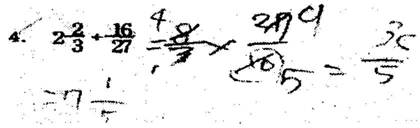


<그림 11> 4차에서 학생 622번이 보인 오류

오류 유형 7은 기록상의 문제로 계산 과정에서 숫자를 쓰지 않거나 반대로 숫자를 덧붙여 써 계산이 잘못된 경우, 그리고 계산 과정에서 숫자를 옮겨 쓸 때 잘못 써서 계산이 잘못된 경우이다. <그림 12>, <그림 13>은 오류 유형 7의 예이다.



<그림 12> 2차에서 학생 323번이 보인 오류



<그림 13> 2차에서 학생 515번이 보인 오류

다. 학생별 오류 유형 정리

오류 유형 7가지에 맞추어 학생들의 오류 유형을 분류하였다. 이 때, 한 문제에서 여러 가지 오류가 나타날 경우에는 그 중에서도 가장 근본적인 원인이라고 생각되는 오류를 우선적으로 체크하였다. 또한, 풀이가 여러 개 있는데, 그 중 옳은 것과 옳지 않은 것이 같이 있을 경우, 최종적으로 옳은 과정이 있으면 옳은 것을 기준으로 채점하였다. 왜냐하면 아이들이 사고하는 과정에서 스스로 검토하며 오류를 정정하였다고 여겼기 때문이다.

오류 유형 분류가 모두 끝난 후에는 반복적 오류 유형을 살펴보기 위해 학생별로 오류 유형의 변화를 한 눈에 볼 수 있는 표를 만들어 정리함으로써 분석 기초 자료로 삼았다.

<표 7> 학생별 오류 유형 정리표의 예

학생번호	문제번호	1차	2차	3차	4차	5차
119	1	X	O	O	O	O
	2	X	O	O	O	O
	3	X	O	O	O	O
	4	X	O	O	O	O
	5	X	O	4	6	O
	6	X	O	4	O	4
	7		O	O	4	O
	8		O	O	O	O
	9		O	4	4	4
	10		O	4	O	4

위 <표 7>에서 학생번호 세 자리 수는 반복적 오류 유형을 계속해서 살펴보기 위해 학생마다 연구자가 부여한 번호를 의미하며 그 이상의 의미는 없다. 1차에서 5차까지 학생의 분수의 나눗셈 문제 해결 결과를 담은 것 중 O는 올바르게 해결하여 오류를 발견할 수 없는 문제를 의미하고, X는 무응답 또는 오류 유형 1에서 7까지 중 어느 것에도 해당되지 않는 해석 불가능한 문제를 의미한다. 또, 숫자 1에서 7은 학생이 보인 오류 중 어느 오류 유형에 해당하는지를 나타낸다.

라. 유의미한 오류 체크

같은 오류 유형이 2번 이상 나타난 것만 유의미한 오류로 체크하여 반복성 오류로 분석하는 자료로 삼았다. 오류 유형이 1번 나타난 것은 학생들이 보일 수 있는 실수일 수도 있으며, 같은 오류가 나타나지 않은 것은 반복적인 오류라고 볼 수 없다고 생각했기 때문이다. <표 7>에서 학생 119번은 1차에서는 문제를 해결하지 못했고, 2차에서는 오류를 하나도 보이지 않았으나, 3차에서는 오류 유형 4가 4번 나타났으므로 유의미한 오류로 체크되었다. 그 후, 4차와 5차에서도 오류 유형 4가 각각 2번, 3번으로 2회 이상이므로 모두 유의미한 오류가 된다. 하지만, 4차에서 보이는 오류 유형 6은 1회이므로 유의미한 오류로 체크하지 않았다.

마. 분석 제외 대상 학생 체크

이번 연구에는 연구 대상이 총 181명이었다. 하지만, 이 중 유의미한 오류를 반복적으로 보이는 학생만을 중점적으로 살펴보기 위해 분석 제외 대상에 대한 기준을 다음과 같이 마련하여 최종 분석에서는 제외하였다.

첫째, 오류 유형 1차에서 5차의 검사 중 한 차례라도 검사를 받지 않은 학생으로 이 경우에 해당되는 학생은 20명이었다.

둘째, 오류 유형 2차에서 5차의 검사 중 한 차의 검사에서 60%이상 무응답 또는 오류 해석 불가인 학생으로 이 경우에 해당되는 학생은 12명이었다.

셋째, 오류 유형 1차에서 5차의 검사까지 단 한 차례의 오류도 보이지 않은 학생으로 이 경우에 해당되는 학생은 23명이었다.

넷째, 오류 유형 1차에서 5차의 검사까지 유의미한 오류가 1건도 없는 학생으로 이 경우에 해당되는 학생은 56명이었다.

이에 연구대상 181명 중 111명을 제외하니 분석대상이 되는 학생은 모두 70명이었다.

바. 분석 내용 정리 방법 설정

분석 내용을 정리하며, 총 5차에 걸쳐 나타난 반복적 오류의 경우는 총 32가지였다. 즉, 1차 검사에서 5차 검사까지 각각의 검사 차수에서 유의미한 오류가 발생할 수 있고, 없는 2가지 경우가 있으므로, 1차 검사에서 5차 검사까지의 분석에서는 모두 25=32(가지)의 경우가 발생할 수 있다. 이 많은 경우를 좀 더 쉽게 한 눈에 알아볼 수 있도록 다음과 같은 정리 방법을 사용하였다. 1차 검사, 2차 검사, 3차 검사, 4차 검사, 5차 검사에서 유의미한 오류가 발생하지 않은 경우는 각각 색칠안한 동그라미 '①', '②', '③', '④', '⑤'로 나타내었다. 또한, 1차 검사, 2차 검사, 3차 검사, 4차 검사, 5차 검사에서 유의미한 오류가 발생한 경우는 각각 색칠한 동그라미 '❶', '❷', '❸', '❹', '❺'로 나타내었다.

예를 들어, '❶-②-❸-❹-⑤'의 경우는 같은 유형의 오류가 1차, 3차, 4차 검사에서 각각 2회 이상 발생하여 유의미한 오류가 발생하였으나, 2차와 5차의 검사에서는 유의미한 오류가 관찰되지 않았다는 것을 의미한다.

이에 따라 본 연구에서 나타날 수 있는 반복적 오류의 경우 총 32가지는 다음과 같다.

오류 발생 0회 (1가지) :
'①-②-③-④-⑤'

오류 발생 1회 (5가지) :
'❶-②-③-④-⑤', '①-❷-③-④-⑤', '①-②-❸-④-⑤', '①-②-③-❹-⑤', '①-②-③-④-❺'

오류 발생 2회 (10가지) :
'❶-❷-③-④-⑤', '❶-②-❸-④-⑤', '❶-②-③-❹-⑤', '❶-②-③-④-❺', '①-❷-❸-④-⑤', '①-❷-③-❹-⑤', '①-❷-③-④-❺', '①-②-❸-❹-⑤', '①-②-❸-④-❺', '①-②-③-❹-❺'

오류 발생 3회 (10가지) :
'❶-❷-❸-④-⑤', '❶-❷-③-❹-⑤', '❶-❷-③-④-❺', '❶-②-❸-❹-⑤', '❶-②-❸-④-❺', '❶-②-③-❹-❺', '①-❷-❸-❹-⑤', '①-❷-❸-④-❺', '①-❷-③-❹-❺', '①-②-❸-❹-❺'

오류 발생 4회 (5가지) :
'❶-❷-❸-❹-⑤', '❶-❷-❸-④-❺', '❶-❷-③-❹-❺', '❶-②-❸-❹-❺', '①-❷-❸-❹-❺'

오류 발생 5회 (1가지) :
'❶-❷-❸-❹-❺'

이 중 '①-②-③-④-⑤'는 유의미한 오류가 1건도 없는 경우를 말한다. 하지만, 이 경우는 처음에 분석 제외 대상을 선정할 당시, 1차 검사에서 5차 검사까지 단 한 차례의 오류도 없거나 유의미한 오류가 한 차례도 없는 학생은 제외하기로 하였으므로, 본 분석에서 이 경우에 해당하는 학생은 한 명도 없다.

사. 반복적 오류 유형을 분류하기 위한 기준 설정

분수의 나눗셈에서 보이는 오류 유형은 앞에서 살펴본 7가지로 나눌 수 있었다. 하지만, 반복적 오류 유형을 살펴보기 위하여 또 다른 기준이 필요하였다. 연구를 시작하면서 반복적 오류를 '한 학습지에서 같은 오류를 2회 이상 보인 오류를 유의미한 오류로 체크한 후, 일정한 시간이 흐른 후 실시하는 학습지 검사에서 체크되는 오류가 같은 유형으로 반복적으로 나타나는 경우'로 보았다. 이러한 반복적 오류가 어떠한 모습으로 전개되는지를 살펴본 결과 다음과 같은 4가지 경우로 나눌 수 있었다.

(1) 알파형

같은 오류 유형이 여러 차수의 학습지에서 오류를 보이는 경우와 보이지 않는 경우가 반복되어 나타나는 오류 형태이다. 예를 들어, '❶-②-③-④-❺'의 경우처럼 5차를 포함하여 같은 유형의 유의미한 오류가 1차와 5차에서 번갈아 가며 나타나거나 간혹 나타난 경우를 말한다. 알파형에 해당하는 오류의 경우는 다음과 같이 5가지이다.

'❶-②-③-④-❺', '①-❷-③-④-❺'. '①-②-❸-④-❺', '❶-❷-③-④-❺', '❶-②-❸-④-❺'

(2) 베타형

이전까지는 나타나지 않았다가 시간이 흐름에 따라 이후의 검사 차수에서 처음으로 나타나는 오류 형태를 말한다. 예를 들어, '①-②-③-④-❺'의 경우처럼 오류 유형 1차 검사에서 오류 유형 4차 검사까지는 한 번도 나타나지 않았던 유의미한 오류가 5차 검사에서 처음으로 나타난 경우를 말한다. 베타형의 경우는 다음과 같이 단 1가지이다.

'①-②-③-④-❺'

(3) 감마형

이전의 검사까지 빈번하게 일어나던 오류 유형이 더 이상 나타나지 않는 오류 형태이다. 예를 들어, '❶-②-③-④-⑤' 또는 '❶-②-❸-❹-⑤'의 경우처럼 오류 유형 1차 검사에서 오류 유형 4차 검사까지 같은 유형의 유의미한 오류가 여러 번 나타났지만, 5차 검사에서는 나타나지 않은 경우를 말한다. 감마형에 해당하는 오류의 경우는 다음과 같이 15가지이다.

'❶-②-③-④-⑤', '①-❷-③-④-⑤', '①-②-❸-④-⑤', '①-②-③-❹-⑤', '❶-❷-③-④-⑤', '❶-②-❸-④-⑤', '❶-②-③-❹-⑤', '①-❷-❸-④-⑤', '①-❷-③-❹-⑤', '①-②-❸-❹-⑤', '❶-❷-❸-④-⑤', '❶-❷-③-❹-⑤', '❶-②-❸-❹-⑤', '①-❷-❸-❹-⑤', '❶-❷-❸-❹-⑤'

(4) 델타형

형성된 오류 습관으로 인해 각 차수마다 같은 오류 유형이 연속적으로 반복하여 나타나는 오류 형태이다. 예를 들어, '❶-②-③-❹-❺'의 경우처럼 4차와 5차 검사에서 연속적으로 나타난 경우를 말한다. 델타형에 해당하는 경우는 다음과 같이 10가지이다.

'①-②-③-❹-❺', '❶-②-③-❹-❺', '①-❷-❸-④-❺', '①-❷-③-❹-❺', '①-②-❸-❹-❺', '①-❷-❸-❹-❺', '❶-②-❸-❹-❺', '❶-❷-③-❹-❺', '❶-❷-❸-④-❺', '❶-❷-❸-❹-❺'

이러한 기준을 바탕으로 오류 유형 1차 검사에서 5차 검사까지 학생들의 오류 변화를 자세히 살펴보며 시간의 흐름에 따라 보이는 반복적 오류 유형 분석을 본격적으로 실시하였다.

아. 반복적 오류 유형 분석 결과

분석한 대상은 70명이었지만, 한 학생이 여러 종류의 오류를 범하는 경우도 있으므로, 분석 대상에 비해 분석할 오류 횟수는 더 많아져 분석한 유의미한 오류는 총 118회였다.

(1) 알파형

경우	오류 유형	유형1	유형2	유형3	유형4	유형5	유형6	유형7	총 횟수 (백분율)
①-❷-③-④-❺	오류 횟수	0회	2회	1회	0회	0회	0회	0회	3회 (3%)
	백분율	0%	67%	33%	0%	0%	0%	0%	100%

알파형으로 분석된 오류는 3회로 1차 검사에서 5차 검사까지의 유의미한 오류 총 118회 중 3%로 큰 의미는 없다. 그러나, 그 3회가 오류 유형 2와 유형 3에서 발생하였으므로 계산구조상의 오류는 학생들에게 헷갈리는 요인이 된다는 것을 염두에 두어야 할 것이다.

'❶-②-③-④-❺', '①-②-❸-④-❺', '❶-❷-③-④-❺', '❶-②-❸-④-❺'의 경우는 해당사항이 없어 분석하지 않았다.

(2) 베타형

경우	오류 유형	유형 1	유형 2	유형 3	유형 4	유형 5	유형 6	유형 7	총 횟수 (백분율)
①-②-③-④-❺	오류 횟수	0회	2회	5회	1회	2회	3회	1회	14회 (12%)
	백분율	0%	14%	36%	7%	14%	21%	7%	100%

베타형으로 분석된 오류는 14회로 1차 검사에서 5차 검사까지의 유의미한 오류 총 118회 중 12%를 차지한다.

오류 유형 3이 5회로 36%의 높은 비율을 차지하고 있다. 오류 유형 3은 자연수인 제수를 역수로 취하지 않고 분모가 1인 분수형태로만 바꾸어 나타내 계산하여 결국엔 분수의 곱셈을 한 것이다. 즉, (분수) ÷ (자연수)의 계산에서 많이 나타나는 오류이다.

시간이 흐른 후 새롭게 발생하는 오류는 계산 구조상의 오류와 단순 계산오류 모두에서 대동소이한 비율로 나타나고 있으므로 시간이 변인인 반복적 오류 유형이 어느 쪽에 치우쳐 있다고 보기는 어렵다.

(3) 감마형

경우	오류 유형	유형 1	유형 2	유형 3	유형 4	유형 5	유형 6	유형 7	총 횟수 (백분율)
●-②-③-④-⑤	오류 횟수	1회	3회	8회	4회	3회	0회	1회	20회
①-●-③-④-⑤	오류 횟수	1회	3회	3회	9회	3회	5회	2회	26회
①-②-●-④-⑤	오류 횟수	3회	0회	4회	1회	1회	2회	1회	12회
①-②-③-●-⑤	오류 횟수	0회	0회	4회	3회	4회	4회	2회	17회
●-②-●-④-⑤	오류 횟수	0회	0회	1회	0회	0회	0회	0회	1회
①-●-●-④-⑤	오류 횟수	0회	2회	0회	0회	0회	1회	0회	3회
①-②-●-●-⑤	오류 횟수	0회	0회	0회	2회	0회	0회	0회	2회
●-②-●-●-⑤	오류 횟수	0회	0회	0회	1회	0회	1회	0회	2회
①-●-●-●-⑤	오류 횟수	0회	0회	0회	1회	1회	0회	0회	2회
총 횟수		5회	8회	20회	21회	12회	13회	6회	85회 (72%)
백분율		6%	9%	24%	25%	14%	15%	7%	100%

감마형으로 분석된 오류는 85회로 1차 검사에서 5차 검사까지의 유의미한 오류 총 118회 중 72%를 차지한다.

1, 2, 3, 4차 검사에서 한 번씩 발생했다 사라져 완전 소멸로 보여지는 경우 즉, '●-②-③-④-⑤', '①-●-③-④-⑤', '①-②-●-④-⑤', '①-②-③-●-⑤'가 85회 중 75회로 많은 부분을 차지하고 있다. 이는 많은 학생들이 1회성 오류를 범한 일시적인 현상이었다고 볼 수 있겠다. 이렇게 1회성 오류라고 보여지는 경우에도 학생들이 주로 보인 오류는 유형 3과 유형 4에 각각 19회와 17회로 집중적으로 많은 오류를 보이고 있다. 오류 유형 3은 자연수인 제수를 역수로 취하지 않고 분모가 1인 분수형태로만 바꾸어 나타내 계산하여 결국엔 분수의 곱셈을 한 것이고, 오류 유형 4는 분수의 나눗셈이 아닌 분수의 곱셈을 한 것이다. 이 두 유형 모두 주로 (분수) ÷ (자연수)의 경우에 주로 나타난 오류 유형이다.

이러한 오류 유형 3과 유형 4가 특히 많이 소멸되었다는 것은 학생들이 그동안 가장 많은 오류를 보였던 부분을 바로 잡아가는 것으로 볼 수 있다.

4차 검사까지 3차와 4차 검사에서 연속적으로 같은 오류를 보여 고착된 듯 했지만, 5차 검사에서 오류가 소멸된 경우 즉, '①-②-❸-❹-⑤', '❶-②-❸-❹-⑤', '①-❷-❸-❹-⑤'의 경우에 오류 유형 4가 총 6회 중 4회를 차지한다. 이것은 유형 4가 비록 고착되더라도 지속적인 계산을 통해 오류가 해결될 수 있다는 것을 보여준다.

유형 5와 유형 6 역시 꾸준히 소멸되고 있어, 가분수와 대분수의 전환이나 계산상의 오류도 점차 바로 잡혀간다고 할 수 있다.

'❶-❷-③-④-⑤', '❶-②-③-❹-⑤', '①-❷-③-❹-⑤', '❶-❷-❸-④-⑤', '❶-❷-③-❹-⑤', '❶-❷-❸-❹-⑤'의 경우는 해당사항이 없어 분석하지 않았다.

(4) 델타형

경우	오류 유형	유형 1	유형 2	유형 3	유형 4	유형 5	유형 6	유형 7	총 횟수 (백분율)
①-②-③-❹-❺	오류 횟수	0회	0회	0회	1회	1회	4회	0회	6회
①-②-❸-❹-❺	오류 횟수	0회	0회	0회	2회	0회	0회	0회	2회
①-❷-❸-❹-❺	오류 횟수	0회	0회	1회	3회	0회	1회	0회	5회
❶-❷-③-❹-❺	오류 횟수	0회	0회	1회	0회	0회	0회	0회	1회
①-❷-③-❹-❺	오류 횟수	0회	0회	0회	1회	0회	0회	0회	1회
❶-❷-❸-❹-❺	오류 횟수	0회	0회	1회	0회	0회	0회	0회	1회
총 횟수		0회	0회	3회	7회	1회	5회	0회	16회 (14%)
백분율		0%	0%	19%	44%	6%	31%	0%	100%

델타형으로 분석된 오류는 16회로 1차 검사에서 5차 검사까지의 유의미한 오류 총 118회 중 14%를 차지한다. 이는 일부의 학생이 계속 한 번 범한 오류를 바로잡지 못하고 계속 반복하고 있음을 나타내며, 결코 낮은 비율이 아니다.

'①-❷-❸-❹-❺'의 경우와 '①-②-❸-❹-❺'의 경우처럼 2차 검사에서 5차 검사까지, 3차 검사에서 5차

검사까지 연속적인 오류를 보여 고착된 경우로 분류된 오류 7회 중 5회가 오류 유형 4에 집중되어 있다.

'①-②-③-❹-❺'의 경우 4차 검사와 5차 검사에서 연속적으로 보인 오류 유형 6이 4회인 것은 다른 부분에 비해 많은데, 이것은 그만큼 시간이 지나면서 오히려 계산에서의 부주의가 많았다는 것을 의미한다고 볼 수 있다.

그러나 여전히, 유형 4에 대한 델타형이 많다. 유형 4는 학생들에게 한 번 형성된 후 소멸되는 경우도 많지만, 쉽게 고치기 어려운 유형이기도 함을 확인할 수 있다.

'❶-②-③-❹-❺', '①-❷-❸-④-❺', '❶-②-❸-❹-❺', '❶-❷-❸-④-❺'의 경우는 해당사항이 없어 분석하지 않았다.

Ⅴ. 논 의

본 연구에서 설정한 연구문제를 중심으로 위의 분석 과정에서 나타난 분수의 나눗셈에서의 반복적 오류 유형을 논의하면 다음과 같다.

1. 가장 빈번하게 보이는 오류 - 제수가 자연수일 때

학생들은 오류 유형 중 오류 유형 3과 오류 유형 4에서 반복적인 오류를 많이 보였다. 즉, 학생들은 (분수) ÷ (자연수)의 계산에서 제수인 자연수를 역수로 올바르게 바꾸지 못하였다. 이로 인해 분수의 나눗셈 계산을 바르게 하지 못하는 오류를 반복적으로 보였다.

첫째, 제수인 자연수를 역수로 취하지 않고, 분모가 1인 분수형태로만 바꾸어 나타낸 채 계산을 진행한 경우 즉,

$$\frac{\triangle}{\square} \div \bigcirc = \frac{\triangle}{\square} \times \frac{\bigcirc}{1}$$

의 형태를 보이는 오류 유형 3은 다양한 형태로 많이 등장하였다.

먼저, 같은 오류 유형이 여러 차수의 학습지에서 오류를 보이는 경우와 보이지 않는 경우가 반복되어 나타난 알파형은 1회(33%)였고, 1차에서 4차까지는 오류를 한 번도 보이지 않다가 5차 검사에서만 오류를 보인 베타형은 5회(36%)였다. 또, 이전의 검사에서는 나타나던 오류 유형이 5차 검사에서는 더 이상 나타나지 않는 감마형은 20회(24%)였으며, 각 차수마다 같은 오류 유형이 지속적으로 나타난 델타형은 총 3회(19%)를 나타냈다. 이를 자세히 살펴보면 다음과 같다.

알파형은 '①-❷-③-④-❺'의 경우에서만 1회,
베타형은 '①-②-③-④-❺'의 경우에서 5회,
감마형은 '❶-②-③-④-⑤'의 경우에서 8회,
'①-❷-③-④-⑤'의 경우에서 3회,
'①-②-❸-④-⑤'의 경우에서 4회,
'①-②-③-❹-⑤'의 경우에서 4회,
'❶-②-❸-④-⑤'의 경우에서 1회,
델타형은 '①-❷-❸-❹-❺'의 경우에서 1회,
'❶-❷-③-❹-❺'의 경우에서 1회,
'❶-❷-❸-❹-❺'의 경우에서 1회
의 오류를 보였다.

1차에서 5차 검사까지 분석 대상이 되는 유의미한 오류를 나타내고 있는 '❶', '❷', '❸', '❹', '❺'를 살펴보면 지속적인 오류를 나타내는 델타형을 제외하고, 대부분 1차에서 5차까지 중 한 차의 검사에서만 오류를 보이고 있다. 즉, 검사를 할 때만 오류를 보인 1회성 오류가 대부분이다. 하지만, 위 모든 경우에서 오류 유형 3은 많은 횟수와 높은 비율을 보이고 있다. 델타형의 경우는 3회로 큰 비중을 차지하고 있지는 않지만, 1차 검사나 2차 검사부터 꾸준히 계속 나타나고 있다. 특히, 감마형의 경우는 대부분 1회성인 경우가 대부분이지만, 분수의 나눗셈을 학습하고 난 후인 2차 검사 이후로 보이는 오류가 더 많음을 알 수 있다.

이 경우 학생들의 풀이과정을 살펴보면, 자연수의 역수를 $\frac{1}{자연수}$로 인식하는 것이 아니라 자연수를 분수 형태로 고친 $\frac{자연수}{1}$로 인식하고 있는 것으로 여겨진다. '÷ (자연수)는 × $\frac{(자연수)}{1}$로 고쳐 계산한다.'는 내용은 6학년이 아닌 5학년 나단계의 '분수의 나눗셈' 단원에서 학습한 것이다. 이 내용을 기억하지 못한 학생 즉, 1차에서 오류를 보인('❶') 학생은 분수의 나눗셈의 모든 경우를 학습한 후 오류 교정이 일어난 경우가 많았다. 반면, 이 내용을 기억하고 있던('①') 학생은 오히려 분수의 나눗셈의 모든 경우를 학습한 후 다시 오류를 보이는 경우가 더 많음도 확인할 수 있다.

둘째, 분수의 나눗셈이 아닌 분수의 곱셈을 한 경우, 즉,

$$\frac{\triangle}{\square}\div\bigcirc=\frac{\triangle}{\square}\times\bigcirc,\ \frac{\triangle}{\square}\div\frac{\bigcirc}{\diamond}=\frac{\triangle}{\square}\times\frac{\bigcirc}{\diamond}$$

의 형태를 보인 오류 유형 4의 경우도 오류 유형 3과 비슷하게 다양한 형태로 많이 등장하였다. 먼저, 같은 오류 유형이 여러 차수의 학습지에서 오류를 보이는 경우와 보이지 않는 경우가 반복되어 나타난 알파형은 단 1회도 없었다. 1차에서 4차까지는 오류를 한 번도 보이지 않다가 5차 검사에서만 오류를 보이는 베타형은 단 1회(7%)이며, 이전의 검사에서 나타나던 오류 유형이 5차 검사에서는 더 이상 같은 오류가 나타나지 않는 감마형은 21회(25%)로 많이 발생하였다. 각 차수마다 같은 오류 유형이 지속적으로 나타난 델타형은 총 7회(44%)를 보이고 있으나 그 비율은 매우 높다. 이를 자세히 살펴보면 다음과 같다.

베타형은 '①-②-③-④-❺'의 경우에서 1회,
감마형은 '❶-②-③-④-⑤'의 경우에서 4회,
'①-❷-③-④-⑤'의 경우에서 9회,
'①-②-❸-④-⑤'의 경우에서 1회,
'①-②-③-❹-⑤'의 경우에서 3회,
'①-②-❸-❹-⑤'의 경우에서 2회,
'❶-②-❸-❹-⑤'의 경우에서 1회,
'①-❷-❸-❹-⑤'의 경우에서 1회
델타형은 '①-②-③-❹-❺'의 경우에서 1회,
'①-②-❸-❹-❺'의 경우에서 2회,
'①-❷-❸-❹-❺'의 경우에서 3회,
'①-❷-③-❹-❺'의 경우에서 1회

의 오류를 보였다.

오류 유형 4의 감마형을 보면, 학생들이 한 번 발생한 오류에 대해 시간이 흐른 후에는 그 오류를 수정하는 경우가 많음을 확인할 수 있다. 반면, 델타형은 1차에서 보이지 않던 오류('①')가 2차 이후('❷', '❸', '❹' 또는 '❺')로 계속 등장하는 것을 볼 때, 분수의 나눗셈에서 (분수) ÷ (분수)를 학습한 이후 학생들은 오히려 이전에 학습한 (분수) ÷ (자연수)의 올바른 계산 방식을 잊어버리고 있으며 이후로도 수정되지 않고 있는 것을 확인할 수 있다. 또한, 그 비율이 44%로 모든 오류 유형 중 50%에 가까운 비율을 차지함을 알 수 있다.

이를 통해, 학생들은 (분수) ÷ (분수)를 학습한 이후로 (분수) ÷ (자연수)의 계산에서 제수인 자연수를 역수로 올바르게 바꾸지 못해 발생하는 반복적 오류가 많다는 것을 알 수 있다.

2. 반복적 오류 유형에 대한 논의

가. 반복적 오류의 소멸

반복적으로 오류를 보였던 많은 학생들은 시간이 흐름에 따라 점차 자신의 오류를 수정시켜 그 오류를 없애 나갔다.

오류 횟수를 중심으로 살펴보면, 같은 오류 유형이 여러 차수의 학습지에서 오류를 보이는 경우와 보이지 않는 경우가 반복되어 나타난 알파형은 3회로 3%의 비율을 차지하였고, 1차에서 4차까지는 오류를 한 번도 보이지 않다가 5차 검사에서만 오류를 보인 베타형은 14회로 12%의 비율을 차지하였다. 또한, 이전의 검사에서는 나타나던 오류 유형이 5차 검사에서는 더 이상 나타나지 않는 감마형은 85회로 72%의 비율을 차지하였으며, 각 차수마다 같은 오류 유형이 지속적으로 나타난 델타형은 16회로 14%의 비율을 차지하였다. 즉,

오류가 번갈아가며 나타나는	알파형	3회	3%,
5차에서만 오류가 나타난	베타형	14회	12%,
5차에서 오류가 나타나지 않는	감마형	85회	72%,
계속 오류가 고착되어 나타난	델타형	16회	14%

이었다.

감마형의 경우는 다른 반복적 오류 유형에 비해 높은 비율을 보이며 전체의 약 $\frac{3}{4}$ 정도를 차지하고 있다. 또한, 감마형을 자세히 살펴보면 1차 검사에서 5차 검사까지 중 단 한 차의 검사에서만 오류를 보인 1회성 오류가 여러 차에 걸쳐 발생했던 오류가 소멸된 경우보다 훨씬 더 많음을 확인할 수 있다.

한차의 검사에서만 유의미한 오류를 보인 경우는

'❶-②-③-④-⑤' 20회,
'①-❷-③-④-⑤' 26회,
'①-②-❸-④-⑤' 12회,
'①-②-③-❹-⑤' 17회

로 감마형 총 85회 중 75회가 나타났다.

여러 차의 검사에서 오류를 보인 후 5차에서 소멸된 경우는

'❶-②-❸-④-⑤' 1회,
'①-❷-❸-④-⑤' 3회,
'①-②-❸-❹-⑤' 2회,
'❶-②-❸-❹-⑤' 2회,

'①-●-●-●-⑤' 2회

로 감마형 총 85회 중 10회가 나타났다.

학생들은 시간의 흐름에 따라 자신이 이미 알고 있는 내용에 대해서든, 알고 있지 않은 내용에 대해서든 다양한 오류를 보인다. 즉, 학생들은 시간의 흐름에 따라 오류를 한 번만 보이기도 하고, 반복적으로 보이기도 한다. 하지만, 위 결과를 통해 자신의 오류를 수정해 나가는 학생이 많다는 것을 알 수 있다.

나. 반복적 오류 후 올바른 분수의 나눗셈 알고리즘으로의 정착

학생들은 오류 유형 중 오류 유형 1과 오류 유형 2에서는 반복적인 오류가 크게 나타나지 않았다. 즉, 학생들은 분수의 나눗셈 계산에서 제수와 피제수를 모두 역수로 바꾸거나, 제수를 역수로 바꾸는 오류는 많이 보이지 않았다.

첫째, 분수의 나눗셈 과정에서 피제수와 제수를 모두 역수로 취한 경우 즉,

$$\bigcirc \div \frac{\triangle}{\square} = \frac{1}{\bigcirc} \times \frac{\square}{\triangle} \text{ 또는 } \frac{\bigcirc}{\diamond} \div \frac{\triangle}{\square} = \frac{\diamond}{\bigcirc} \times \frac{\square}{\triangle}$$

의 형태를 보이는 오류 유형 1은 이전의 검사에서는 나타나던 오류 유형이 5차 검사에서는 더 이상 같은 오류가 나타나지 않는 감마형만 나타났다. 더 자세히 살펴보면,

감마형 중 '●-②-③-④-⑤'의 경우에서 1회,
'①-●-③-④-⑤'의 경우에서 1회,
'①-②-●-④-⑤'의 경우에서 1회

로 총 3회의 오류를 보였다.

이는 1차와 2차, 3차에서 각각 한 번씩의 오류를 보인 후 사라지는 1회성 오류이며, 감마형에서 6%를 차지하여, 그 횟수나 비율 또한 매우 작아 다른 오류 유형에 비해 큰 의미는 없다고 할 수 있다.

둘째, 분수의 나눗셈 과정에서 제수가 아닌 피제수만을 역수로 바꾸어 계산한 경우, 즉,

$$\bigcirc \div \frac{\triangle}{\square} = \frac{1}{\bigcirc} \times \frac{\triangle}{\square} \left(\text{또는} = \frac{\triangle}{\square} \times \frac{1}{\bigcirc}\right) \text{ 또는}$$

$$\frac{\triangle}{\square} \div \bigcirc = \frac{\square}{\triangle} \times \bigcirc$$

의 형태를 보이는 오류 유형 2는 분석 결과 같은 오류 유형이 여러 차수의 학습지에서 오류를 보이는 경우와 보이지 않는 경우가 반복되어 나타난 알파형이 2회(67%), 1차에서 4차까지는 오류를 한 번도 보이지 않다가 5차 검사에서만 오류를 보이는 베타형이 2회(14%), 이전의 검사에서는 나타나던 오류 유형이 5차 검사에서는 더 이상 같은 오류가 나타나지 않는 감마형이 8회(9%)로 나타났다. 각각을 살펴보면 다음과 같다.

알파형은 '①-●-③-④-●'의 경우에서만 2회,
베타형은 '①-②-③-④-●'의 경우에서 2회,
감마형은 '●-②-③-④-⑤'의 경우에서 3회,
'①-●-③-④-⑤'의 경우에서 3회,
'①-●-●-④-⑤'의 경우에서 2회

로 나타났다.

비록 피제수를 역수로 바꾸어 계산하는 오류 유형 2가 알파형 내에서는 높은 비율을 차지하고 있고, 다른 형태에서도 적지 않은 횟수로 나타나고 있지만, 한 번 등장한 오류가 계속해서 나타나며 고착되는 델타형은 없는 것을 확인할 수 있다. 또한, (분수) ÷ (분수)를 학습하기 전인 1차에서는 이러한 오류 유형을 보이지 않는('①') 경우가 많으며, 오히려 (분수) ÷ (분수)를 학습한 직후인 2차에서 이러한 오류 유형을 보이는('●') 경우가 많음도 확인할 수 있다. 그러나 어느 경우이든 시간에 따라 대부분 소멸되며, 다른 유형과 비교하여 낮은 비율을 보이고 있음을 알 수 있다.

그러므로 분수의 나눗셈에서 피제수와 제수를 모두 역수로 바꾸고 계산하거나 제수가 아닌 피제수를 역수로 바꾸어 계산하는 반복성 오류는 큰 의미가 없다고 할 수 있다.

Ⅵ. 결 론

이와 같은 논의를 통해 이끌어질 수 있는 결론은 다음과 같다.

첫째, 오류를 보이는 대부분의 학생들은 모든 종류의 분수의 나눗셈을 학습한 후라도 (분수) ÷ (자연수)의 계산에서 제수인 자연수를 역수로 바꾸지 못하는 오류를 계속해서 보인다.

즉, 학생들은 (분수) ÷ (자연수)의 계산에서 제수인 자연수를 역수로 취해 (분수) × $\frac{1}{(\text{자연수})}$의 계산을 하는 것이 아니라, 자연수를 분수형태로만 고쳐 (분수) × $\frac{(\text{자연수})}{1}$으로 계산하거나 나눗셈 기호를 곱셈 기호로 고쳐 (분수) × (자연수)로 계산하는 반복적인 오류를

보이고 있다. 이러한 오류를 보이던 학생 중에는 (분수) ÷ (분수)를 학습하기 전에는 오히려 (분수) ÷ (자연수)의 계산을 올바르게 계산하던 학생들도 많았다. 또, 이들의 공통점은 자연수의 역수를 $\frac{1}{(\text{자연수})}$이 아닌 $\frac{(\text{자연수})}{1}$로 생각하거나 자연수의 역수에 대해서는 생각하지 않은 채로 계산을 진행하는 것이다. 이러한 오류는 시간이 흐름에 따라 새롭게 등장하거나, 이전의 오류를 수정해 나가기도 하지만, 수정하지 못한 채 계속 오류를 범하여 고착되는 경우도 있었다. 다른 계산은 모두 옳지만, 계산 과정에서 이런 오류로 인해 분수의 나눗셈 계산을 바르게 해결하지 못하는 모습도 보인다. 또한, 이 내용은 비록 사전 조사에 해당하기는 하지만, (분수) ÷ (분수)와 (자연수) ÷ (분수)를 학습한 후 실시한 오답율 조사에서도 모든 경우의 (분수) ÷ (자연수)에서의 오답율이 1위부터 6위까지 차지했던 것에서도 지적될 수 있다.

둘째, 학생들은 이미 학습한 내용이라 할지라도 시간이 지나면 다양한 오류를 보이지만, 대부분의 학생은 시간의 흐름에 따라 자신의 오류를 수정해 나간다.

많은 학생들은 이번 연구를 통해 (분수) ÷ (분수)를 학습하기 전, 학습 도중, 학습 후에 보였던 오류를 시간이 지나면서 차차 수정해 나갔다. 6-나 단계의 1단원 분수의 나눗셈, 3단원 소수의 나눗셈, 5단원 분수와 소수의 계산이라는 반복적인 학습을 통해 학생들은 자연스럽게 시간이 지나더라도 분수의 나눗셈 계산을 응용하여 소수의 나눗셈을 생각하고, 분수와 소수가 섞인 계산을 해결해 나가며 발생하던 오류를 수정하기도 하고, 보이지 않던 오류를 보이기도 하지만, 결국 자신의 오류를 수정한 학생이 72%로 가장 많았다.

셋째, 많은 학생들은 분수의 나눗셈을 계속해서 해결해 나가며 오류를 수정해 가는 과정을 통해 제수를 역수로 바꾸어 계산해야 함을 인식하고 있다.

학생들은 분수의 나눗셈을 해결하는 과정에서 제수와 피제수를 모두 역수로 바꾸거나, 제수를 역수로 바꾸는 오류를 많이 보이지는 않는다. 그러나 제수와 피제수를 모두 역수로 바꾸거나, 제수를 역수로 바꾸는 오류는 (분수) ÷ (분수)를 학습한 후인 2차와 3차 검사에서 주로 나타났다. 이것은 이전에는 5학년 나 단계에서 (분수) ÷ (자연수)만을 학습하여 제수인 자연수에만 신경을 쓰면 되었지만, 6학년 나 단계에서 (분수) ÷ (분수)를 학습한 후에는 학생들이 피제수와 제수가 모두 분수여서 순간적으로 헷갈려하는 모습을 볼 수 있다. 하지만, 그것은 발생횟수가 적고 대부분 그 오류가 수정되는 것으로 나타났다. 이러한 것으로 보아 학생들은 피제수와 제수를 모두 역수로 바꾸거나 피제수가 아닌 제수를 역수로 바꾸어 계산해야 함을 시간이 흐름에 따라 오류를 수정해가며 인식하는 것으로 볼 수 있다.

Ⅵ. 제 언

이상의 연구 결과를 통해 학생들이 분수의 나눗셈에서 보이는 반복적 오류를 줄이기 위해 다음 첫째 사항을 일선 현장에서 항상 염두에 둘 필요가 있다고 여겨진다. 또한 분수의 나눗셈에서 보이는 반복적 오류에 대한 보다 심층적인 분석을 위해 다음 둘째, 셋째, 넷째 사항에 대한 연구가 더 필요하다고 할 수 있다.

첫째, 6학년 나 단계에서 (분수) ÷ (분수)를 학습하더라도 5학년 때 학습한 (분수) ÷ (자연수)의 계산도 함께 다루어져야 한다. 특히, 자연수를 분수 형태로 나타내면 $\frac{(\text{자연수})}{1}$라는 것을 매 번 강조하여 상기시킬 필요가 제기된다. 학습 위계에 따라 5학년 때는 (분수) ÷ (자연수)의 계산을 학습하며, 6학년 때는 다양한 분수의 나눗셈을 학습하게 된다. 그러나, 학생들은 다양한 분수의 나눗셈을 학습한 후 (분수) ÷ (자연수)에서 계속적인 오류를 반복해서 보이며 많은 학생이 자연수의 역수를 $\frac{1}{(\text{자연수})}$이 아닌 $\frac{(\text{자연수})}{1}$로만 나타내거나 자연수의 역수에 대해서는 생각하지 않은 채로 계산을 하여 오류를 보였다. 그러므로 다양한 분수의 나눗셈을 학습하는 동안 꼭 (분수) ÷ (자연수)를 다시 한 번 강조하여 지도할 것이 요구된다.

둘째, 이 논문은 학생들의 분수의 나눗셈 오류를 분석함에 있어 시간에 따른 변인을 중심으로 하여, 오류가 발생할 수 있는 다른 변인을 고려하지 못하였다. 즉, 학생들의 학력차이에 따른 오류, 교사의 교수 방법에 따른 오류, 성별에 따른 오류 등 다양한 변인을 고려한다면 더 다양한 결과를 얻을 것으로 기대된다.

셋째, 이 논문은 반복적 오류 유형을 정리하여 분석하는 데 목적이 있어 각 오류 유형별로 처치할 수 있는 방법까지 연구를 진행하지 못하였다. 따라서 후속 연구에서는 오류 유형별로 알맞은 처치 방법을 제시할

수 있는 연구를 진행한다면 더욱 효과적일 것으로 기대된다.

넷째, 이 논문은 학생들의 오류를 관찰 분석함에 있어 학생들이 실시한 학습지만을 대상으로 하여 반복적인 오류를 보이는 학생에 대한 면담을 실시하지 못하였다. 그러한 학생들을 면담한다면 보다 심층적인 분석이 이루어져 보다 근본적인 원인을 규명할 수 있을 것으로 보인다.

참 고 문 헌

강문봉 외 (2001). 초등수학교육의 이해, 서울; 경문사.

강완 · 백석윤 (1998). 초등수학교육론, 서울; 동명사.

교육인적자원부 (1999). 초등학교 교육과정 해설(Ⅳ), 서울; 대한교과서 주식회사.

____________ (2001). 5학년 나 단계 수학책, 서울; 대한교과서주식회사.

____________ (2001). 5학년 나 단계 수학익힘책, 서울; 대한교과서주식회사.

____________ (2001). 5학년 나 단계 교사용 지도서, 서울; 대한교과서주식회사.

____________ (2001). 6학년 나 단계 수학책, 서울; 대한교과서주식회사.

____________ (2001). 6학년 나 단계 수학익힘책, 서울; 대한교과서주식회사.

____________ (2001). 6학년 나 단계 교사용 지도서, 서울: 대한교과서주식회사.

김경훈 (2005). 수와 연산 영역에서 수학 학습 부진아의 오류유형 분석 및 지도방안. 석사학위논문, 전주교육대학교 교육대학원.

노은정 (2001). 수학학습에서의 오류의 활용 효과: 정의 지도를 중심으로, 석사학위논문, 이화여자대학교 대학원.

민인영 (2005). 분수의 나눗셈에서 나타나는 오류 분석, 석사학위논문. 부산교육대학교 교육대학원.

송정화 (2005). 분수의 곱셈, 나눗셈의 문제 해결과정에서 나타난 장애 요인 분석, 석사학위논문. 전주교육대학교 교육대학원.

윤희태 (2002). 초등학생들의 기초계산 오류에 대한 분석적 연구 : 곱셈과 나눗셈을 중심으로, 석사학위논문. 인천교육대학교 교육대학원.

추은영 (2003). 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 오류와 원인 분석, 석사학위논문, 춘천교육대학교 교육대학원.

Frank K.(2003). *Teaching mathematics through problem solving*, VA: NCTM.

Ashlock R. B. (2006). *Error Patterns in Computation: using error patterns to improve instruction*, NJ :Pearson.

An Analysis on the Repeated Error Patterns in Division of Fraction by Elementary Students

Kim, Kyung Mi
Soui Elementary School
E-mail : kkm519@dreamwiz.com

Kang, Wan
Seoul National University of Education
E-mail : wkang@snue.ac.kr

This study analyzed the repeated error patterns in division of fraction by elementary students through observation of their test papers.

The questions for this study were following.

First, what is the most changable thing among the repeated error patterns appeared in division of fraction by elementary students?

Second, what is the most frequent error patterns in division of fraction by elementary students?

First of all, the ratios of incorrect answers in division of fraction by general students were researched. This research was the only one time. The purpose was to know what kind of compositions in the problems were appeared more errors. Total 554 6th grade students(300 boys and 254 girls) from 6 elementary schools in Seoul are participated in this research.

On the basis of this, the study for analysis began in earnest. 5 tests made progress for about 4 months. Total 181 6th grade students(92 boys and 89 girls) from S elementary school in Seoul were participated in this. After each test, to confirm the errors and to classify them were done. Then the repeated error patterns were arranged into 4 types: alpha, beta, gamma and delta type.

Consequently, conclusions can be derived as follows.

First, most students modify their errors as time goes by even though they make errors about already learned contents.

Second, most students who appeared errors make them continually caused a reciprocal of natural number in the divisor when they calculate computations about '(fraction) ÷ (natural number)'.

Third, most students recognize that the divisor have to change the reciprocal when they calculate division of fraction through they modify their errors repeatedly.

* ZDM Classification : D73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : repeated error, error type, meaningful error, alpha type, beta type, gamma type, delta type