

Wiener-Hopf Technique와 Fourier Transform Analysis를 이용한 병렬 슬릿의 TE파 산란 해석

Analysis of TE-Wave Scattering from Transversal-Shifted Tandem Slits Using Wiener-Hopf Techniques and Fourier Transform Analysis

서태윤 · 안성환 · 이재욱 · 조춘식

Tae-Yoon Seo · Sung-Hwan Ahn · Jae-Wook Lee · Choon Sik Cho

요 약

본 논문에서는 Fourier-transform analysis와 Wiener-Hopf technique을 사용하여 병렬 슬릿에 의한 TE파 산란의 완전한 표현식을 유도하고 두 방법의 특징을 비교하고자 한다. Fourier transform analysis는 슬릿의 폭이 좁은 경우에는 빠른 수렴해를 얻을 수 있으며, Wiener-Hopf technique은 슬릿의 폭이 넓은 경우(상호 유도 결합이 적은 경우)에 매우 정확한 근사식 결과를 나타내며, 위의 두 해석 결과는 비교적 일치하는 결과들을 보여준다.

Abstract

In this paper, an analysis of TE-wave scattering from transversal-shifted tandem slits using fourier transform analysis and Wiener-Hopf technique are derived and the electrical performances have been compared with a commercially available software. In Fourier transform analysis, it is shown that a fast-convergent series solution can be obtained when the distance between the slits is very narrow, while in Wiener-Hopf technique, it is found that the highly-accurate approximation can be obtained when the gap between the slits becomes wider. In addition, this paper has dealt with a good agreement between two analytical solutions.

Key words : Wiener-Hopf, Fourier Transform, Scattering, Tandem Slits

I. 서 론

전자파 산란의 물리적인 현상을 이론에 기반을 두고 맥스웰 방정식과 경계 조건을 이용하여 closed-form 해석 및 정확한 해를 구하고자 많은 시도들이 있으며, 그 중에서 mode-matching 및 Fourier transform analysis를 이용하는 방법과 Wiener-Hopf technique을 이용한 해석 방법에 관하여 논하고자 한다.

위의 방법들은 최근의 다양한 부품들의 출현으로 해석하고자 하는 범위를 점점 확대하고 있으며^{[1]~[4]},

또한 이러한 주파수 영역에서 얻은 closed-form solution은 전자파 산란이 일어나는 구조에 있어서 전자계 표현식의 각 항들이 실제 전자계를 형성하기 위하여 어떤 역할을 하는지에 대한 물리적인 개념을 주는 경우가 많으므로 아직까지 이러한 해석 방법을 이용하여 다양한 산란 구조를 해석하고 있다.

슬릿에서의 전자파 산란 해석은 지금까지 많은 연구가 진행되어 왔으며^{[5]~[9]}, 본 논문에서는 Fourier transform analysis와 Wiener-Hopf technique을 이용하여 병렬 슬릿을 해석하고 해석 방법의 계산 속도와

「이 논문은 2006년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2006-331-D00220).」
한국항공대학교 항공전자 및 정보통신공학부(School of Electronics, Telecommunication and Computer Engineering, Korea Aerospace University)

· 논문 번호 : 20080415-047

· 수정완료일자 : 2008년 7월 23일

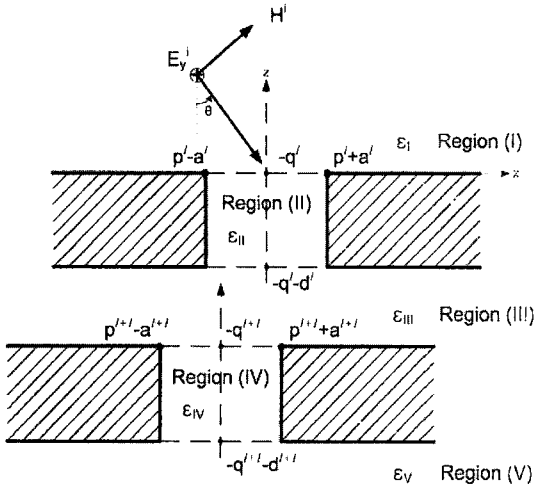


그림 1. 평행한 완전 도체 스크린에서의 산란 구조
Fig. 1. Scattering geometry from tandem slits for Wiener-Hopf technique.

정확성의 차이 및 수식의 연관성을 살펴보고자 한다.

II. Fourier Transform Analysis

2-1 전자계 표현식

영역 (I)에서의 파수는 $k_x = \omega\sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_1}$ 이며, 시간 조화 인자(time harmonic factor) $e^{-i\omega t}$ 는 생략하였다. 입사, 반사, 산란의 전장은 다음과 같이 표현된다.

$$E_y^i(x, z) = e^{ik_x x - ik_z z} \quad (1)$$

$$E_y^r(x, z) = -e^{ik_x x + ik_z z} \quad (2)$$

$$E_y^s(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_y^s(\zeta) e^{-i\zeta x + ik_z z} d\zeta \quad (3)$$

여기서 $k_x = k \sin\theta$, $k_z = k \cos\theta$, $k' = \sqrt{k^2 - \zeta^2}$ 이다. 또한, 영역 (II), (III), (IV), (V)의 전장은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E_y^{II}(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} [b_m^I \cos \xi_m^I(z + q^I) + c_m^I \sin \xi_m^I(z + q^I)] \cdot \sin a_m^I(x + a^I - p^I) \quad (4)$$

$$E_y^{III}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{E}_y^{III}(\zeta) e^{ik'(z+q^I+d^I)} + \tilde{E}_y^{III}(\zeta) e^{-ik'(z+q^I+d^I)}] e^{-i\zeta x} d\zeta \quad (5)$$

$$E_y^{IV}(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} [b_m^{II} \cos \xi_m^{II}(z + q^{II}) + c_m^{II} \sin \xi_m^{II}(z + q^{II})] \cdot \sin a_m^{II}(x + a^{II} - p^{II}) \quad (6)$$

$$E_y^V(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_y^V(\zeta) e^{-i\zeta x - ik'(z+q^{II}+d^{II})} d\zeta \quad (7)$$

여기서, $\xi_m^I = \sqrt{k^2 - (a_m^I)^2}$, $a_m^I = \frac{m\pi}{2a^I}$, $a_m^I = \frac{n\pi}{2a^I}$ 이며, $k_j = \omega\sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_j}$, $j = 1, 2, 3, \dots$ 은 영역 j 에서의 파수이다. 또한, 위첨자 l 은 그림 1에서 l 번째 스크린을 뜻하며, 편의상 0번째 스크린으로부터 계산을 시작한다.

2-2 경계 조건

위에서 정의된 전장과 자장에서 미지의 계수 b_m^0 , b_m^I , c_m^0 , c_m^I 을 찾기 위해 경계 조건을 이용한다. 먼저 영역 (I)과 (II)에서는

$$\begin{aligned} & \frac{2ik_z a_n^0}{\mu[k_x^2 - (a_n^0)^2]} [(-1)^n e^{ik_x a^0} + e^{-ik_x a^0}] \\ &= \frac{ia_n^0}{2\pi\mu} \sum_{m=1}^{\infty} b_m^0 a_m^0 I^0(k) - \frac{c_n^0 \xi_n^0 a^0}{\mu} \delta_{nm} \end{aligned} \quad (8)$$

을 얻을 수 있다. 여기서 δ_{mn} 는 Kronecker delta이고

$$\begin{aligned} I^0(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(-1)^m e^{i\zeta a^0} - e^{-i\zeta a^0}][(-1)^n e^{-i\zeta a^0} - e^{i\zeta a^0}]}{[\zeta^2 - (a_m^0)^2][\zeta^2 - (a_n^0)^2]} k' d\zeta \\ &= \frac{2\pi a^0 \sqrt{k^2 - (a_m^0)^2}}{(a_n^0)^2} \delta_{mn} - [I_1^0(k) + I_2^0(k)] \end{aligned} \quad (9)$$

이다. 위 식에서 첫 항은 유수 정리로 얻을 수 있으며, $I_1^0(k)$ 와 $I_2^0(k)$ 는 branch cut에서의 적분값이다^[10].

영역 (II), (III), (IV)에서는 각각의 경계 조건을 연립함으로써 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & -2\pi\xi_n^0 (b_n^0 \sin \xi_n^0 + c_n^0 \cos \xi_n^0 a^0) a^0 = \\ & \sum_{m=1}^{\infty} [(b_m^0 \cos \xi_m^0 a^0 - c_m^0 \sin \xi_m^0 a^0)(I_1^{0,1} + I_2^{0,1}) - b_m^I I_3^{0,1}] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & -2\pi\xi_n^0 c_n^I a^I = \\ & \sum_{m=1}^{\infty} [(b_m^0 \cos \xi_m^0 a^0 - c_m^0 \sin \xi_m^0 a^0) I_4^{0,1} - b_m^I (I_5^{0,1} + I_6^{0,1})] \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $I_1^{0,1}, I_2^{0,1}, I_3^{0,1}, I_4^{0,1}, I_5^{0,1}, I_6^{0,1}$ 는 적분식으로 표현되며, 식 (9)와 유사하므로 자세한 내용은 생략한다.

영역 (IV), (V)의 경계 조건으로부터는 아래 식을 구할 수 있다.

$$i(b_n^1 \sin \xi_n^1 d^1 + c_n^1 \cos \xi_n^1 d^1) \xi_n^1 a_n^1 = \frac{a_n^1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^1 (b_m^1 \cos \xi_m^1 d^1 - c_m^1 \sin \xi_m^1 d^1) I^1(k) \quad (12)$$

여기서,

$$I^1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(-1)^m e^{i\zeta a^1} - e^{-i\zeta a^1}][(-1)^n e^{-i\zeta a^1} - e^{i\zeta a^1}]}{[\zeta^2 - (a_m^1)^2][\zeta^2 - (a_n^1)^2]} k' d\zeta = \frac{2\pi a^1 \sqrt{k^2 - (a_m^1)^2}}{(a_m^1)^2} \delta_{mn} - [I_1^1(k) + I_2^1(k)] \quad (13)$$

이다. 위 식의 결과는 식 (9)와 같은 형태를 띄게 된다.

각각의 경계 조건으로부터 구한 위의 네 개의 식 (8), (10), (11), (12)를 정리하면 $b_m^0, b_m^1, c_m^0, c_m^1$ 에 관한 연립 방정식이며, 행렬식으로 간단하게 쓸 수 있다. 행렬식을 계수에 관하여 정리함으로써 전자계 표현식에서의 계수 $b_m^0, b_m^1, c_m^0, c_m^1$ 을 찾을 수 있다. 행렬식은 아래와 같은 형태를 보이며 자세한 표현식은 생략한다.

$$\begin{bmatrix} \Psi_{b,1}^0 & \Psi_{c,1}^0 & 0 & 0 \\ \Psi_{b,2}^0 & \Psi_{c,2}^0 & \Psi_{b,2}^1 & 0 \\ \Psi_{b,3}^0 & \Psi_{c,3}^0 & \Psi_{b,3}^1 & \Psi_{c,3}^1 \\ 0 & 0 & \Psi_{b,4}^1 & \Psi_{c,4}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_m^0 \\ c_m^0 \\ b_m^1 \\ c_m^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3 투과파 및 산란파 계산

위에서 얻은 $b_m^0, b_m^1, c_m^0, c_m^1$ 의 계수 값을 앞서 정의된 전자계 표현식에 대입하면 산란된 전자계와 투과된 전자계에 관한 완전한 해를 얻을 수 있다.

얻어진 표현식을 stationary phase approximation을 써서 계산을 하면, 영역 (I)과 영역 (V)에서

$$E_y^s(r_0, \theta_s) = e^{i(k_0 \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{k}{2\pi r_0}} \cos \theta_s \cdot$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m^0 a_m^0 \frac{e^{-ika^0 \sin \theta_s} (-1)^m - e^{ika^0 \sin \theta_s}}{[(k \sin \theta_s)^2 - (a_m^0)^2]} \quad (14)$$

$$E_y^i(r_s, \theta_s) = e^{i(k r_s \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{k}{2\pi r_s}} \cos \theta_s \cdot$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} [b_m^1 \cos(\xi_m^1 d^1) - c_m^1 \sin(\xi_m^1 d^1)] \cdot a_m^1 \frac{e^{-ika^1 \sin \theta_s} (-1)^m - e^{-ika^1 \sin \theta_s}}{[(k \sin \theta_s)^2 - (a_m^1)^2]} \quad (15)$$

을 얻을 수 있으며, 여기서 $\theta_s = \sin^{-1}(x/r_0)$, $r_0 = \sqrt{x^2 + z^2}$, $\theta_s = \sin^{-1}[(x-p^1)/r_s]$, $r_s = \sqrt{(x-p^1)^2 + (z+q^1+d^1)^2}$ 이다.

III. Wiener-Hopf Technique

3-1 전자계 표현식

그림 2와 같은 구조에서 Wiener-Hopf 방법으로 해석하고자 할 때 필드를 각 영역별로 정의해 보면 전자계 표현식은 입사파와 반사파, 산란파로 나눌 수 있으며, 다음과 같이 입사파 및 반사파에 대해서 각각 정의할 수 있다.

$$E^i = \hat{z} E_0 e^{-jk_0 \rho} = \hat{z} E_0 e^{-jk_0(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)} \quad (16)$$

$$E^r = \hat{z} (-E_0) e^{-jk_0 x \cos \theta_0 + jk_0(y+2b) \sin \theta_0} \quad (17)$$

여기서 $k_0 = k_0(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, $\rho = (x, y)$ 이며, $y = -b$ 에 완전 도체판이 놓여 있기 때문에 도체판에

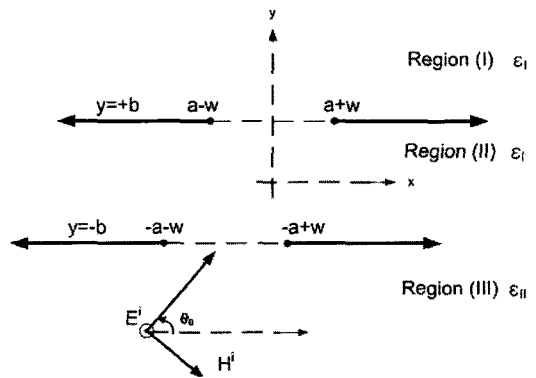


그림 2. 평행한 완전 도체 스크린에서의 산란 구조
Fig. 2. Scattering geometry from tandem slits for Wiener-Hopf technique.

서의 경계 조건은 $E' + E'' = 0$ 을 만족하여야 한다. 이때 전체 전자계 표현은 다음처럼 보여진다.

$$(E', H') = \begin{cases} (E', H') + (E'', H'') + (E''', H'''), & y \leq -b \\ (E', H'), & y \geq -b \end{cases}$$

여기서 E', H' 는 전체 전자계이며, E'', H'' 는 산란계이다.

중요한 점은 Fourier transform analysis와 다르게 각 스크린 사이의 슬릿 영역을 구분하지 않는다는 것이다. 따라서 슬릿에서의 도체간 상호 결합(mutual coupling) 효과를 고려하는 영역이 없어서 슬릿의 두께 역시 무시되고 있다. 이러한 특성 때문에 본 해석 방법은 도체 두께를 무시할 수 있을 정도로 큰 구조에서 비교적 정확한 해석 결과를 보여준다.

푸리에 변환된 파동 방정식의 해는 다음과 같은 형태를 띠게 된다.

$$\tilde{E}_z^s(\zeta, y) = \begin{cases} A(\zeta)e^{-j\eta(y-b)}, & y \geq b \\ B(\zeta)e^{-j\eta y} + C(\zeta)e^{j\eta y}, & |y| \leq b \\ D(\zeta)e^{j\eta(y+b)}, & y \leq -b \end{cases}$$

여기서 $\eta = \sqrt{k_0^2 - \zeta^2}$ 이다.

3-2 경계 조건

전장의 경계 조건은 $y = \pm b$, $-\infty < x < \infty$ 에서, 각각

$$A(\zeta) = B(\zeta)e^{-j\eta b} + C(\zeta)e^{j\eta b} \quad \text{at } y = b \quad (18)$$

$$D(\zeta) = B(\zeta)e^{j\eta b} + C(\zeta)e^{-j\eta b} \quad \text{at } y = -b \quad (19)$$

으로 표현된다.

전계의 경계 조건인 위의 식으로부터 $B(\zeta)$ 및 $C(\zeta)$ 에 관한 표현 식을 아래와 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$B(\zeta) = \frac{A(\zeta)e^{-j\zeta b} - D(\zeta)e^{j\eta b}}{-2i \sin(2\eta b)} \quad (20)$$

$$C(\zeta) = \frac{A(\zeta)e^{j\zeta b} - D(\zeta)e^{-j\eta b}}{2i \sin(2\eta b)} \quad (21)$$

자계의 경계 조건 대신 아래 그림과 같은 전류 분포를 이용하고자 한다.

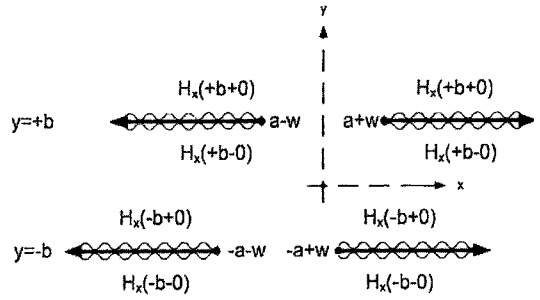


그림 3. 평행한 완전 도체 스크린에서의 전류 분포
Fig. 3. Current distributions in tandem slits.

전류 분포 J_x 에 푸리에 변환을 취하면 위쪽 슬릿에서는

$$\begin{aligned} \tilde{J}_z(\zeta, b) &= \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} E_z^s(x, b-0) - \frac{\partial}{\partial y} E_z^s(x, b+0) \right\} e^{j\zeta x} dx \\ &= -\frac{\eta}{\omega\mu_0} [B(\zeta)e^{-j\eta b} - C(\zeta)e^{j\eta b} - A(\zeta)] \end{aligned} \quad (22)$$

이 되며, 아래쪽 슬릿에서의 얻어지는 전류 분포 식의 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{J}_z(\zeta, -b) &= \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} E_z^s(x, -b-0) - \frac{\partial}{\partial y} E_z^s(x, -b+0) \right\} e^{j\zeta x} dx + \tilde{H}_x^p \\ &= -\frac{\eta}{\omega\mu_0} [D(\zeta) + B(\zeta)e^{j\eta b} - C(\zeta)e^{-j\eta b}] + \tilde{H}_x^p(\zeta, -b) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서 $\tilde{H}_x^p(\zeta, -b)$ 는 $H_x^p(x, -b) = H_x^i + H_x^r$ 의 푸리에 변환이며, $\tilde{J}_z(\zeta, \pm b)$ 는 각각의 슬릿에서 전류 분포의 푸리에 변환이다.

푸리에 변환된 전류 분포 방정식인 식 (22), (23)에 식 (20), (21)을 대입한 후 연립 방정식을 풀면 $A(\zeta)$ 와 $D(\zeta)$ 에 관한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$A(\zeta) = -\frac{\omega\mu_0}{2\eta} \left\{ \frac{\tilde{J}_z(\zeta, b) + e^{-j2\eta b}}{[\tilde{J}_z(\zeta, -b) - \tilde{H}_x^p(\zeta, -b)]} \right\} \quad (24)$$

$$D(\zeta) = -\frac{\omega\mu_0}{2\eta} \left\{ \frac{\tilde{J}_z(\zeta, b)e^{-j2\eta b} +}{\tilde{J}_z(\zeta, -b) - \tilde{H}_x^p(\zeta, -b)} \right\} \quad (25)$$

그 내용을 살펴보면 정의된 산란계의 표현식에서의 계수인 $A(\zeta)$ 와 $D(\zeta)$ 가 슬릿 위, 아래의 전류 분포와 입사파와 반사파의 조합으로 표현된다는 것이

다. 이것은 물리적인 현상과 일치하는 것으로 위·아래 도체판에서의 전류 및 입사파 반사파가 상호 작용함을 알 수 있다.

식 (24), (25)의 해를 구하기 위해 계산의 편리를 위해 아래와 같이 재정의할 필요가 있다.

$$\phi^\pm(\zeta)e^{j\zeta(a\pm w)} = -\frac{\omega\mu_0}{2\eta}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \times \left\{ \tilde{J}_z(\zeta, b) + e^{-j2\eta b} [\tilde{J}_z(\zeta, -b) - \tilde{H}_x^P(\zeta, -b)] \right\} \quad (26)$$

$$\psi^\pm(\zeta)e^{-j\zeta(a\pm w)} = -\frac{\omega\mu_0}{2\eta}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \times \left\{ \tilde{J}_z(\zeta, b)e^{-j2\eta b} + \tilde{J}_z(\zeta, -b) - \tilde{H}_x^P(\zeta, -b) \right\} \quad (27)$$

식 (26), (27)의 $\phi^\pm(\zeta)$ 와 $\psi^\pm(\zeta)$ 는 분리(factorization) 계산의 편리를 위해 정의되었으며, 각각 $A(\zeta)$ 와 $D(\zeta)$ 의 다른 표현식이다. 표현된 수식은 슬릿 위 아래의 전류 분포와 입사파와 반사파의 합으로 표현되고 있어서, 각각의 영역을 나타내는 계수 $A(\zeta)$ 와 $D(\zeta)$ 가 독립적으로 계산되지 않음을 의미한다.

식 (26), (27)에서 $\eta/k_0 = \sqrt{k_0^2 - \zeta^2}/k_0$ 은 곱의 형태인 $K^+(\zeta)K^-(\zeta)$ 으로 분리하여 풀 수 있으며, 이때 $K^+(\zeta) = \sqrt{1 - \frac{\zeta}{k_0}}$, $K^-(\zeta) = \sqrt{1 + \frac{\zeta}{k_0}}$ 으로 표현된다. 이것은 각각 파수(ζ) 도메인의 위아래 영역에서 해석 함수(analytic function)임을 의미한다. 아래 식 (28)은 분해(decomposition) 과정의 편리를 위해 정의되었다.

$$P(\zeta) = \frac{1}{2K^-(\zeta)} \left\{ J^+(\zeta, b)e^{j2\zeta w} + J^-(\zeta, b)e^{-j2\zeta a}e^{-j2\eta b} + J^+(\zeta, -b)e^{-j2\zeta(a-w)}e^{-j2\eta b} - \tilde{H}_x^P(\zeta, -b)e^{-j\zeta(a-w)}e^{-j2\eta b} \right\} \\ = P^+(\zeta) - P^-(\zeta) \\ P^\pm(\zeta) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c^\pm} \frac{P(\alpha)}{\alpha - \zeta} d\alpha \quad (28)$$

식 (26)을 분리 과정과 분해 과정으로 정리한 후, edge condition^[11]을 $y=b$, $x=a\pm w$ 와 $y=-b$, $x=-a\pm w$ 에서 적용하면, 아래와 같은 수식을 만족하는 entire function, $u(\zeta)$ 를 얻을 수 있다.

$$K^+(\zeta)\phi^+(\zeta) + P^+(\zeta) = -\frac{J^-(\zeta, b)}{2K^-(\zeta)} + P^-(\zeta) = u(\zeta) = 0 \quad (29)$$

전류 분포 방정식을 다음의 방정식 (30) 및 (31)과 같이 나타내면, 슬릿의 위치에 따라 위, 아래, 왼쪽과 오른쪽의 전류 표현식으로 구분된다.

$$\tilde{J}_z(\zeta, b) = \underbrace{J^-(\zeta, b)}_{2K^-(\zeta)P^-(\zeta)} e^{j\zeta(a-w)} + \underbrace{J^+(\zeta, b)}_{-2K^+(\zeta)Q^+(\zeta)} e^{j\zeta(a+w)} \quad (30)$$

$$\tilde{J}_z(\zeta, -b) = \underbrace{J^-(\zeta, -b)}_{2K^-(\zeta)R^-(\zeta)} e^{-j\zeta(a+w)} + \underbrace{J^+(\zeta, -b)}_{-2K^+(\zeta)S^+(\zeta)} e^{-j\zeta(a-w)} \quad (31)$$

여기서, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$, $S(\zeta)$ 는 $P(\zeta)$ 와 같은 목적으로 정의된 함수들이며, $\phi^-(\zeta)$, $\psi^+(\zeta)$, $\psi^-(\zeta)$ 에 관한 식을 분리·분해 계산을 적용하면,

$$\begin{cases} K^-(\zeta)\phi^-(\zeta) - Q^-(\zeta) = -\frac{J^+(\zeta, b)}{2K^+(\zeta)} - Q^+(\zeta) = 0 \\ K^+(\zeta)\psi^+(\zeta) + R^+(\zeta) = -\frac{J^-(\zeta, -b)}{2K^-(\zeta)} + R^-(\zeta) = 0 \\ K^-(\zeta)\psi^-(\zeta) - S^-(\zeta) = -\frac{J^+(\zeta, -b)}{2K^+(\zeta)} - S^+(\zeta) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

식 (32)을 얻을 수 있다. 따라서 Wiener-Hopf의 해는 아래처럼 표현된다.

$$\phi^+(\zeta) = -\frac{P^+(\zeta)}{K^+(\zeta)}, \quad \phi^-(\zeta) = \frac{Q^-(\zeta)}{K^-(\zeta)} \quad (33)$$

$$\psi^+(\zeta) = -\frac{R^+(\zeta)}{K^+(\zeta)}, \quad \psi^-(\zeta) = \frac{S^-(\zeta)}{K^-(\zeta)} \quad (34)$$

$$J^-(\zeta, b) = 2K^-(\zeta)P^-(\zeta) \quad (35)$$

$$J^+(\zeta, b) = -2K^+(\zeta)Q^+(\zeta) \quad (36)$$

$$J^-(\zeta, -b) = 2K^-(\zeta)R^-(\zeta) \quad (37)$$

$$J^+(\zeta, -b) = -2K^+(\zeta)S^+(\zeta) \quad (38)$$

을 얻을 수 있다. 지금까지 얻어진 Wiener-Hopf 해를 살펴보면 식 (35)에서 (38)의 우변 $P(\zeta)$, $Q(\zeta)$, $R(\zeta)$, $S(\zeta)$ 에 전류 분포가 포함되어 있음을 식 (28)로부터 알 수 있다. 따라서 이들로부터 연립 방정식을 만들 수 있으며, 위의 연립 방정식의 해 $J^-(k_0 \cos \theta, b)$, $J^+(k_0 \cos \theta, b)$, $J^-(k_0 \cos \theta, -b)$, $J^+(k_0 \cos \theta, -b)$ 를 구해서 원역장(far field) 방사 패턴을 구할 수 있다.

원역장(far field) 방사 패턴의 전자계 표현식을 살펴 보면 아래와 같다.

$$E_z^s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta} \left[-\frac{\omega\mu_0}{2\eta} \{ \tilde{J}_z(\zeta, b) + [\tilde{J}_z(\zeta, -b) - \tilde{H}_x^p(\zeta, -b)] e^{j2\eta b} \} e^{-j\zeta x - j\eta(y-b)} d\zeta \right] \quad (39)$$

3-3 산란파 계산

위에서 구한 전류 관계식을 통하여 원역장(far field) 방사 패턴을 구할 수 있다.

$$E_z^s(\rho, \theta) \cong E_z^{s,1}(\rho, \theta) + E_z^{s,2}(\rho, \theta) - E_z^{s,3}(\rho, \theta) \quad (40)$$

여기서,

$$E_z^{s,1}(\rho, \theta) \cong \sqrt{\frac{1}{2\pi k \rho}} e^{-j\left[k\rho - \frac{\pi}{4}\right]} \left[k \sin \theta \Phi_1(-k \cos \theta) \right] \quad (41)$$

$$E_z^{s,2}(\rho, \theta) \cong \sqrt{\frac{1}{2\pi k \rho}} e^{-j\left[k\rho - \frac{\pi}{4}\right]} \left[k \sin \theta \Phi_2(-k \cos \theta) e^{-j\zeta_a 2a - j\eta 2b} \right]_{\zeta = -k \cos \theta} \quad (42)$$

$$E_z^{s,3}(\rho, \theta) \cong \sqrt{\frac{1}{2\pi k \rho}} e^{-j\left[k\rho - \frac{\pi}{4}\right]} \left[k \sin \theta \Phi_3(-k \cos \theta) e^{j\zeta_a a + j\eta 2b} \right]_{\zeta = k \cos \theta} \quad (43)$$

이며 또한,

$$\Phi_1(\zeta) = -\frac{\omega\mu_0}{2\eta} \left[J^-(\zeta, b) e^{j\zeta(a-w)} + J^-(\zeta, b) e^{j\zeta(a+w)} \right]$$

$$\Phi_2(\zeta) = -\frac{\omega\mu_0}{2\eta} \left[J^-(\zeta, -b) e^{-j\zeta w} + J^-(\zeta, -b) e^{j\zeta w} \right]$$

$$\Phi_3(\zeta) = -\frac{\omega\mu_0}{2\eta} \tilde{H}_x^p(\zeta, -b)$$

이다.

IV. 근사식의 계산

Fourier-transform analysis와 Wiener-Hopf technique 방법은 각각 장단점이 있다. 슬릿의 폭이 매우 좁은 구조에서는 도체의 두께(Fourier transform analysis에서의 영역 2에 해당)가 모드(mode) 형성에 큰 영향을 끼치기 때문에 슬릿에서 상호 결합(mutual coupling)

이 중요해지는 경우에는 Fourier transform analysis가 빠른 수렴 특성을 보여 빠른 계산 결과를 보여주지만, 슬릿의 폭이 멀어질수록 고차 모드의 증가로 인해 계산 시간이 많이 증가하게 된다. 반면에 Wiener-Hopf technique는 구조가 단순하며(도체의 두께를 고려하는 영역 및 계산이 없기 때문에), 슬릿의 폭이 클 때는 고차 모드가 많이 발생하는 Fourier transform analysis보다 빠른 해석 결과를 보여주고 있다. 하지만 슬릿 사이의 간격이 가까울수록 상호 결합(mutual coupling)의 영향을 고려하는 계산이 없어서 정확도가 떨어진다. 현재까지의 문헌 조사 및 연구 결과를 바탕으로 볼 때 이러한 두 가지 해석 방법의 장단점을 분석하는 작업이 없는 것으로 확인되어 두 해석 방법의 유사성 및 차이점에 대해서 논하고자 한다.

식 (13)을 적분 방향을 고려하여 정리하면 아래와 같다.

$$I_{mn}^{TE} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sqrt{k^2 - \zeta^2} \left[1 - (-1)^m e^{j2\zeta a} \right]}{(\zeta^2 - a_m^2)(\zeta^2 - a_n^2)} d\zeta \quad (44)$$

$$= \frac{2\pi a \eta_m}{a_m^2} \delta_{mn} - \left[\bar{I}_{1mn}^{TE} + \bar{I}_{2mn}^{TE} \right] \quad (45)$$

식 (44)를 유수 정리(residue calculus)를 이용하면 식 (45)의 첫 번째 항이 나오게 되며, 두 번째 항 \bar{I}_{1mn}^{TE} 와 \bar{I}_{2mn}^{TE} 은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\bar{I}_{1mn}^{TE} = -4(-1)^n \int_{\Gamma_1} \frac{\sqrt{k^2 - \zeta^2} e^{j2\zeta a}}{(\zeta^2 - a_m^2)(\zeta^2 - a_n^2)} d\zeta, \quad (46)$$

$$\bar{I}_{2mn}^{TE} = 4 \int_{\Gamma_2} \frac{\sqrt{k^2 - \zeta^2}}{(\zeta^2 - a_m^2)(\zeta^2 - a_n^2)} d\zeta. \quad (47)$$

식 (46)과 (47)을 계산할 때 m 과 n 의 관계를 생각해야 한다. 먼저 $m \neq n$ 일 때는 아래의 변환식을 이용할 수 있다.

$$\frac{1}{(\zeta^2 - a_m^2)(\zeta^2 - a_n^2)} = \frac{1}{2(a_m^2 - a_n^2)} \left[\frac{1}{a_m} \left(\frac{1}{\zeta - a_m} - \frac{1}{\zeta + a_m} \right) - \frac{1}{a_n} \left(\frac{1}{\zeta - a_n} - \frac{1}{\zeta + a_n} \right) \right] \quad (48)$$

식 (48)의 변환식을 I_{1mn}^{TE} 에 대입하면

$$I_{1mn}^{TE} = \frac{-4(-1)^n \sqrt{2k}}{2(a_m^2 - a_n^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^{-i} \left\{ \frac{1}{a_m} h_4 [(-1)^{-i} a_m] - \frac{1}{a_n} h_4 [(-1)^{-i} a_n] \right\} \quad (49)$$

의 근사식을 얻을 수 있으며, 여기서

$$h_4(a_m) = \int_{J_1} \frac{\sqrt{k^2 - \zeta^2} e^{i2\zeta a}}{\zeta - a_m} d\zeta \quad (50)$$

이다. 이때, 변수 ζ 를 $\zeta = k + iu/2a$ 의 관계를 이용하여 u 로 치환하면 $h_4(a_m)$ 는 아래처럼 표현된다.

$$\begin{aligned} h_4(a_m) &= - \int_0^\infty \frac{\sqrt{i} e^{i2ak-u}}{\sqrt{2a} [iu + 2a(k-a_m)]} du \\ &= \frac{e^{3\pi/4} e^{i2ak}}{\sqrt{2a}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{i} e^{-u} du}{[u - i2a(k-a_m)]} \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{3\pi/4} e^{i2ak}}{\sqrt{2a}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) e^{z/2} z^{-1/4} W_{\frac{3}{4}, 1} \left[z = -i2a(k-a_m) \right] \\ &= \frac{e^{3\pi/4} e^{i2ak}}{\sqrt{2a}} \sqrt{\pi} \sqrt{2a(k-a_m)} \left[\frac{1}{\sqrt{2a(k-a_m)}} + 2ie^{-i2a(k-a_m)} \int_{\sqrt{2a(k-a_m)}}^\infty e^{iu^2} du \right] \\ &= \frac{e^{3\pi/4} e^{i2ak}}{\sqrt{2a}} \sqrt{\pi} \sqrt{2a(k-a_m)} \left[\frac{1}{\sqrt{2a(k-a_m)}} + 2ie^{-i2a(k-a_m)} F(\sqrt{2a(k-a_m)}) \right] \end{aligned} \quad (52)$$

여기서, $W_{k,m}(z)$ 는 Whittaker 함수, $F(z)$ 는 Fresnel 적분, $\Gamma(z)$ 는 Gamma 함수를 의미하며, 아래처럼 정의된다.

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) &= \frac{e^{-z/2} z^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right)} \int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-t} dt \\ &= \frac{e^{-z/2} z^{\frac{1}{2}-m}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + m\right)} \int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m} (t+z)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-t} dt \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^j e^{-t}}{t+z} dt = \Gamma(1+j) e^{z/2} z^{\frac{1+j}{2}} W_{\frac{1+j}{2}, \frac{j}{2}}(z)$$

$$W_{k,m}(z) \sim e^{-z/2} z^k \quad \left(z \rightarrow \infty, |\text{phz}| \leq \frac{3}{2}\pi - \delta \right)$$

δ : arbitrary small positive constant

$$F(z) = \int_z^\infty e^{iu^2} du$$

두 번째로 $m=n$ 의 경우에는

$$I_{1mn}^{TE} = \frac{-\sqrt{2}(-1)^n}{a_m \sqrt{k}} [h_5(a_m) - h_5(-a_m)] \quad (53)$$

의 근사식을 얻을 수 있으며, 여기서 변수 ζ 를 $\zeta = k + iu/2a$ 의 관계를 이용하여 u 로 치환하면 $h_5(a_m)$ 는 아래처럼 표현된다.

$$\begin{aligned} h_5(a_m) &= \int_{J_1} \frac{\sqrt{k-\zeta} e^{i2\zeta a}}{(\zeta - a_m)^2} d\zeta \\ &= \int_0^\infty \frac{i \sqrt{\frac{i}{2a}} e^{i2a(k+i u/2a)} i du}{\left(\frac{i u}{2a} + k - a_m\right)^2 \frac{1}{2a}} \\ &= -e^{i2ak} \int_0^\infty \frac{\sqrt{i} e^{-u} 2a i^2 du}{\sqrt{2a} [u - i2a(k-a_m)]^2} \\ &= \sqrt{2a} e^{i2ak} e^{i\pi/4} \int_0^\infty \frac{\sqrt{i} e^{-u} du}{[u - i2a(k-a_m)]^2} \\ &= \sqrt{2a} e^{i2ak} e^{i\pi/4} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) e^{z/2} z^{\frac{1}{4}} W_{\frac{5}{4}, \frac{1}{4}}(z) \end{aligned} \quad (54)$$

위의 근사식을 그래프로 그려보게 되면 중요한 것을 알 수 있다. 식 (51)은 근사적으로 식 (53)이 되며 Fresnel 적분을 포함한다. 여기서 Fresnel 적분값과 식 (51)을 비교하여 보면, 다른 모드일 때($m \neq n$) 두 식의 결과가 일치하지 않음을 알 수 있다. 하지만 변수 a 가 넓어짐에 따라 두 식의 결과값의 차이가 줄어드는 것을 볼 수 있었는데, 변수 a 는 실제적인 전자파 산란 현상을 해석할 때 슬릿의 폭을 의미하였다. 즉, 슬릿간의 거리가 넓어질수록 근사식이 Fresnel 적분에 가깝게 됨을 알 수 있다. 여기서 중요한 점은 Fresnel 적분이 Wiener-Hopf technique에서의 적분 표현식에 나타나는 함수로서 Wiener-Hopf technique의 특성인 거리가 멀어서 구조를 간단히 할 수 있을 때 정확한 특성을 보이는 것과 일치하는 것이다. 따라서 슬릿간의 간격이 좁을 때는 Wiener-Hopf technique이 부정확하지만 간격이 넓어질수록 Fourier transform analysis에서의 수식이 근사로서 Wiener-Hopf technique에 가까워짐을 살펴보았다. 따라서 슬릿의 폭이 넓어 상호 결합 효과를 무시할 수 있을 때, Wiener-Hopf technique의 계산식이 훌륭한

정확도와 빠른 계산 결과를 얻을 수 있음을 보았다.

V. 시뮬레이션 및 결론

그림 4~7은 각각 슬릿 두께 $d=0 \lambda$, 도체 사이의 간격 $b=2/3 \lambda$ 로 설정하였을 때 슬릿의 폭이 작은 $a=0.25 \lambda$ 부터 $a=0.5 \lambda$, 1.58λ , 4λ 로 변해감에 따른 투과파의 복사 패턴(radiation pattern) 관하

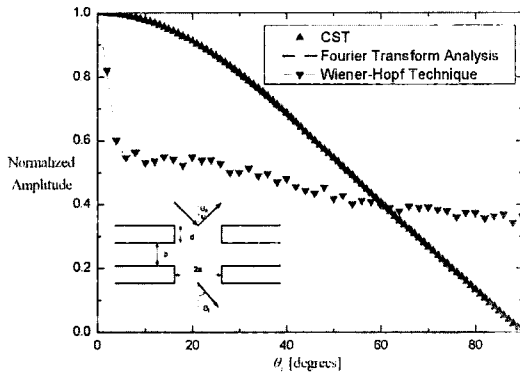


그림 4. 투과되는 전자파의 산란 패턴. 슬릿 두께 $d=0 \lambda$, 슬릿 너비 $a=0.25 \lambda$, 도체 사이 거리 $b=q_1 - q_0 - d_0=2/3 \lambda$

Fig. 4. The radiation pattern of transmitted wave with slit thickness, $d=0 \lambda$, a gap between slits, $a=0.25 \lambda$, and the distance between upper and lower conductors, $b=q_1 - q_0 - d_0=2/3 \lambda$.

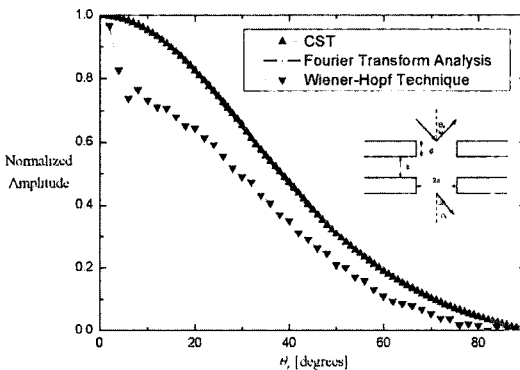


그림 5. 투과되는 전자파의 산란 패턴. 슬릿 두께 $d=0 \lambda$, 슬릿 너비 $a=0.5 \lambda$, 도체 사이 거리 $b=q_1 - q_0 - d_0=2/3 \lambda$

Fig. 5. The radiation pattern of transmitted wave with slit thickness, $d=0 \lambda$, a gap between slits, $a=0.5 \lambda$, and the distance between upper and lower conductors, $b=q_1 - q_0 - d_0=2/3 \lambda$.

여 나타내고 있으며, 두 가지 해석적인 방법과 상용 전자파 시뮬레이터를 이용한 결과가 각 해석 방법의 특징을 보여줌을 알 수 있다.

그림 4에서처럼 슬릿의 폭이 좁을 때는 Wiener-Hopf technique이 매우 다른 결과로 부정확함을 드러내고 있으며, Fourier transform analysis는 상용용인 CST MWS와 매우 비슷함을 알 수 있다. 또한, 슬릿

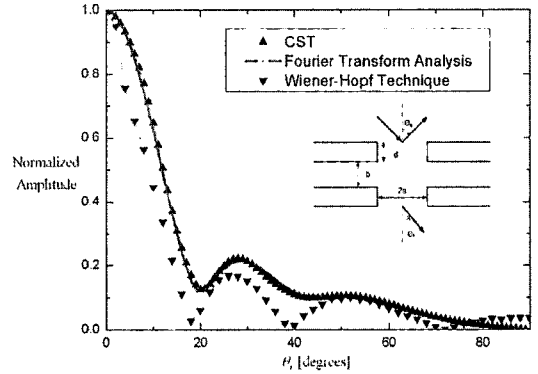


그림 6. 투과되는 전자파의 산란 패턴. 슬릿 두께 $d=0 \lambda$, 슬릿의 폭 $a=1.58 \lambda$, 도체 사이 거리 $b=q_1 - q_0 - d_0=2/3 \lambda$

Fig. 6. The radiation pattern of transmitted wave with slit thickness, $d=0 \lambda$, a gap between slits, $a=1.58 \lambda$, and the distance between upper and lower conductors, $b=q_1 - q_0 - d_0=2/3 \lambda$.

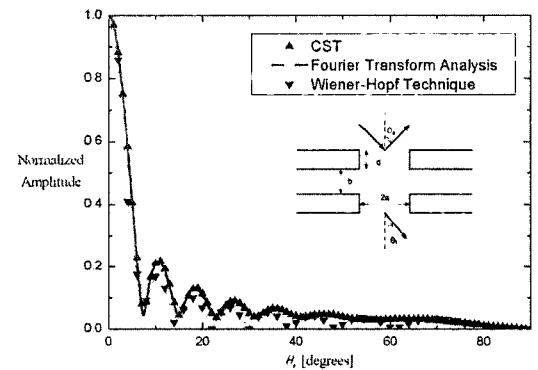


그림 7. 투과되는 전자파의 산란 패턴. 슬릿 두께 $d=0 \lambda$, 슬릿의 폭 $a=4 \lambda$, 도체 사이 거리 $b=q_1 - q_0 - d_0=2/3 \lambda$

Fig. 7. The radiation pattern of transmitted wave with slit thickness, $d=0 \lambda$, a gap between slits, $a=4 \lambda$, and the distance between upper and lower conductors, $b=q_1 - q_0 - d_0=2/3 \lambda$.

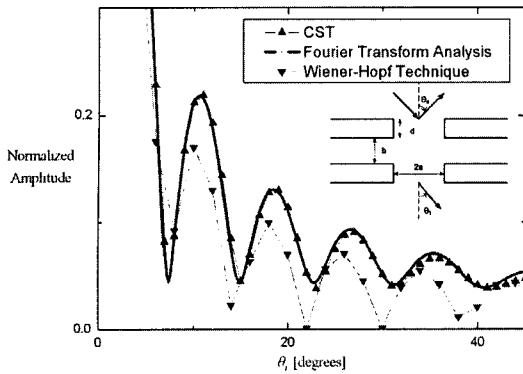


그림 8. $\theta_i=0^\circ$ 에서 45° 사이의 투과되는 전자파의 산란 패턴. 슬릿 두께 $d=0 \lambda$, 슬릿의 폭 $a=4 \lambda$, 도체 사이 거리 $b=a_1 - a_0 - d_0 = 2/3 \lambda$

Fig. 8. The detailed radiation pattern of transmitted wave from $\theta_i=0^\circ$ to 45° . radiation pattern of transmitted wave with slit thickness, $d=0 \lambda$, a gap between slits, $a=4 \lambda$, and the distance between upper and lower conductors, $b=a_1 - a_0 - d_0 = 2/3 \lambda$.

간격이 넓어질수록 Wiener-Hopf technique의 결과가 다른 두 해석 방법에 따른 결과와 흡사함을 알 수 있다. 하지만 Fourier transform analysis에서는 슬릿 간격이 넓어질수록 고차 모드의 증가 때문에 계산 시간이 증가하였으며, Wiener-Hopf technique에서는 계산 시간에 변화가 없었다.

또한, 그림에서 알 수 있듯이 슬릿 간격이 증가함에 따라 복사 패턴의 지향성(directivity)이 좋아지는 것을 확인할 수 있다.

그리고 그림 8은 그림 7의 슬릿 간격이 가장 넓은 경우($a=4 \lambda$)에서 복사되는 각도를 $0^\circ \sim 45^\circ$ 사이로 국한시켜 세 가지 해석 결과(Fourier transform analysis, Wiener-Hopf technique, CST MWS)의 경향을 보여주고 있다.

일반적으로 Fourier transform analysis와 Wiener-Hopf technique의 해석 결과는 두 슬릿의 폭에 따라서 다른 특성을 보여준다. 슬릿의 폭이 좁을 때에는 슬릿에서의 결합 효과를 Fourier-transform analysis가 정확하게 보여주고 있으며, 빠른 수렴 특성으로 빠른 계산 결과를 보여주는 반면에 거리가 멀어질수록 상호 결합 효과가 작아지게 되어 Wiener-

Hopf technique이 비교적 빠른 해석 결과를 보여지게 된다. 그 결과는 Fourier transform Analysis의 적분 값 $I^0(k)$ 과 Wiener-Hopf technique의 전류와 관련 식인 $J^+(\xi, \pm b)$ 의 적분항 계산식 비교로부터 알 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Jung H. Lee, Hyo Joon Eom, and J. W. Lee, "Scattering and radiation from finite thick slits in parallel-plate waveguide", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 44, pp. 212-216, Feb. 1996.
- [2] Jung Hyeong Lee, Hyo Joon Eom, "Scattering and radiation from a slitted parallel-plate with rectangular grooved: TE-Wave", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 46, pp. 1444-1448, Oct. 1998.
- [3] Y. E. Elmoazzen, Lotfollah Shafai, "Mutual coupling between parallel-plate waveguides", *IEEE Trans., Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-21, pp. 825-833, Dec. 1973.
- [4] Gokhan Cinar, Alinur Buyukaksoy, "Diffraction of a normally incident plane wave by three parallel half-planes with different face impedances", *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. 52, pp. 478-486, Feb. 2004.
- [5] Kohei Hongo, Gihei Ishii, "Diffraction of an electromagnetic plane wave by a thick slit", *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-26, pp. 494-499, May 1978.
- [6] Satish C. Kashyap, M. A. K. Hamid, "Diffraction characteristics of a slit in a thick conducting screen", *IEEE Trans. Antennas and Propagat.*, vol. AP-19, pp. 499-507, Jul. 1971.
- [7] V. G. Daniele, "The Wiener-Hopf technique for the diffraction by a wedge having arbitrary aperture angle", in *IEEE Int. Antennas Propag. Soc. Symp. Dig.*, pp. 190-193, 2002.
- [8] Leroy R. Alldredge, "Diffraction of microwaves by tandem slits", *IEEE Trans. Antennas and Propagat.* vol. 4, pp. 640-649, Oct. 1956.
- [9] Yehuda Leviatan, "Electromagnetic coupling bet-

ween two half-space regions separated by two slot-perforated parallel conducting screens", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 36, pp. 44-52, Jan. 1988.

[10] Soo H. Kang, Hyo J. Eom, and Tah J. Park, "TM-scattering from a slit in a thick conducting screen:

revisited", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 41, pp. 895-899, May 1993.

[11] R. Mittra, W. W. Lee, *Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves*, The Macmillan Company, pp. 4-11, 1971.

서 태 윤



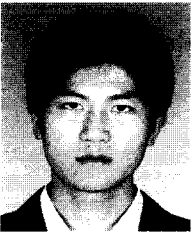
2007년 2월: 한국항공대학교 항공 전자공학과 (공학사)
 2007년 3월~현재: 한국항공대학교 전자공학과 석사과정
 [주 관심분야] 마이크로파 및 밀리미터파 수동소자 해석 및 설계, 전자파 산란해석

이 재 욱



1992년 2월: 한양대학교 전자공학과 (공학사)
 1994년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학석사)
 1998년 2월: 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학박사)
 1998년 3월~2004년 2월: 한국전자통신연구원 디지털방송연구단 전파기반연구그룹
 2004년 3월~현재: 한국항공대학교 항공전자 및 정보통신공학부, 전자 및 항공전자 전공, 부교수
 [주 관심분야] 마이크로파 및 밀리미터파 능동, 수동 소자 해석 및 설계, EMI/EMC 대책 기술, 고출력 증폭기 및 고출력 안테나 설계

안 성 환



2007년 2월: 한국항공대학교 항공 전자공학과 (공학사)
 2007년 3월~현재: 한국항공대학교 전자공학과 석사과정
 [주 관심분야] 마이크로파 및 밀리미터파 수동소자 해석 및 설계, 전자파 해석

조 춘 식



1887년 2월: 서울대학교 제어계측 공학과 (공학사)
 1995년 12월: 미국 South Carolina 대학교 전기 및 컴퓨터공학과 (공학석사)
 1998년 12월: 미국 Colorado 대학교 전기 및 컴퓨터공학과 (공학박사)
 2004년 3월~현재: 한국항공대학교 항공전자 및 정보통신공학부 교수
 [주 관심분야] RFIC/MMIC, 전력증폭기, 믹서, 발진기, 안테나, 전자장 수치해석