

## Generalized characteristic polynomials of semi-zigzag product of a graph and circulant graphs

Jaeun Lee<sup>1)</sup> · Dongseok Kim<sup>2)</sup>

### Abstract

We find the generalized characteristic polynomial of graphs  $G(F_1, F_2, \dots, F_\nu)$  the semi-zigzag product of  $G$  and  $\{F_i\}_{i=1}^\nu$  obtained from  $G$  by replacing vertices by circulant graphs of vertices and joining  $F_i$ 's along the edges of  $G$ . These graphs contain discrete tori and are key examples in the study of network model.

**Keywords** : Circulant graph; Complexity; Generalized characteristic polynomial.

### 1. 머리말

그래프  $G$ 는 꼭짓점 집합  $V(G)$ 와 이들 사이의 관계를 표현하는 변의 집합  $E(G)$ 로 구성되어진다. 여기서  $E(G)$ 는  $V(G)$ 의 단원 부분집합이거나 이원 부분집합이다. 이러한 그래프는 평면상이나 공간상에서 도형으로 표현이 가능한데, 꼭짓점은 점으로, 변은 선분(이원 부분집합) 또는 고리(단원 부분집합)로 표현되어지며, 이러한 도형과 그래프  $G$ 를 동일시한다. 특히, 이원 부분집합이 변일 때, 그 두 원소가 변으로 연결되어 있다 하고, 고리나 중복연결이 없는 그래프를 단순그래프라 한다.

그래프  $G$ 에서 꼭짓점  $v_i$ 의 차수  $d(v_i)$ 는  $v_i$ 에 연결된 변의 수를 의미하며 고리인 경우는 2로 계산한다. 그리고 그래프의 차수행렬이란  $|V(G)| \times |V(G)|$  대각행렬로서  $d(v_i)$ 를  $ii$ -요소로 하는 것을 의미하며  $D(G)$ 로 표기한다. 그래프  $G$ 의 인접행렬이란  $|V(G)| \times |V(G)|$  행렬로서  $v_i$ 와  $v_j$  사이에 연결된 변의 수를  $ij$ -요소로 하는 행렬을 의미하며  $A(G)$ 로 표기한다. 그래프  $G$ 의 특성다항식이란 이 인접행렬  $A(G)$ 의 특성다항식  $\Phi(G; \lambda) = \det(\lambda I - A(G))$ 를 의미한다.

1) 경상북도 경산시 대동 214-1번지 영남대학교 이과대학 수학과 교수  
E-mail: julee@yu.ac.kr

2) 교신저자: 경기도 수원시 영통구 이의동 산 94번지 경기대학교 자연과학대학 수학과 교수  
E-mail: dongseok@kgu.ac.kr

그래프이론에서 고전적인 불변량인 특성다항식은 많이 연구 되어졌고 (Chae, Y., Kwak, J. H. and Lee, J. (1993), Kim, H. K. and Lee, J. (2008)) 최근에는 이의 일반화에 대한 많은 연구가 있었다. 특히, Cvetkovic, D. M., Doob, M. and Sachs, H. (1979)에 의해서 소개되어진 특성다항식

$$F_G(\lambda, \mu) = \det(\lambda I - (A(G) - \mu D(G)))$$

는 기존에 알려진 여러 특성다항식을 일반화한 것이나 많이 연구되어지지 않고 있다가 최근에 활발히 연구되어 졌는데, 이 다항식이 제공하는 그래프의 정보와 Bartholdi, L. (1999)가 제안한 그래프의 제타함수가 제공하는 정보가 같다는 결과는 매우 흥미로운 것이라 하겠다. 그러나 각 그래프류에 대한  $F_G(\lambda, \mu)$ 의 계산은 많이 이루어져 있지 않다(Kim, D., Kim, H. K. and Lee, J. (2008), Kwak, J. H., Lee, J. and Sohn, M. Y. (2005)).

*Circulant* 그래프란 순환군  $Z_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ 과 그 것의 항등원 0을 품지 않는 대칭 생성자 집합  $\Omega$  ( $\Omega = \Omega^{-1}$ )에 대하여 다음과 같이 정의된 그래프  $C(Z_n, \Omega)$ 이다. 그래프  $C(Z_n, \Omega)$ 의 꼭짓점은  $Z_n$ 의 원소이고, 두 꼭짓점  $i$ 와  $j$ 에 대하여  $\{i, j\}$ 가 그래프의 변일 필요충분조건은  $i - j \in \Omega$ 일 때이다. 이 그래프  $C(Z_n, \Omega)$ 을 순환군  $Z_n$ 과 대칭 생성자 집합  $\Omega$ 에 대한 Cayley그래프라 부른다. 편의를 위하여서, 지금부터는 Cayley 그래프  $C(Z_n, \Omega)$ 를 대칭 생성자 집합  $\Omega$ 와 동일시 하자. 이제,  $v$ 개의 꼭짓점이  $v_1, v_2, \dots, v_v$ 인 그래프  $G$ 와 꼭짓점이  $0, 1, 2, \dots, n-1$ 인  $v$ 개의 circulant 그래프  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v$ 에 대하여 새로운 그래프  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v)$ 를 다음과 같이 정의하자.  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v)$ 의 꼭짓점 집합은 그래프  $G$ 의 꼭짓점 집합과  $Z_n$ 의 곱  $\{v_1, v_2, \dots, v_v\} \times \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 이고, 두 꼭짓점  $(v_i, s)$ 와  $(v_j, t)$ 는 다음 경우 변으로 연결되어 진다.

i)  $v_i = v_j$ 이고  $s$ 와  $t$ 가  $\Omega_i$ 에서 변으로 연결되어 있다.

ii)  $v_i$ 와  $v_j$ 가 변으로 연결되어 있고,  $s = t$ 이다.

이 그래프  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v)$ 를 직관적으로 말하면, 그래프  $G$ 의 각 꼭짓점을 Cayley 그래프  $\Omega_i$ 로 대치하고, 이 들을 그래프  $G$ 의 변을 따라서 연결한 그래프이다.

본 논문에서는  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v)$ 의 이변수다항식  $F_{G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v)}(\lambda, \mu)$ 를 계산하고, 이의 응용에 대하여 연구하고자 한다.

## 2. 그래프 $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v)$ 의 행렬표현

먼저, 그래프  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v)$ 의 인접행렬과 차수행렬의 효과적인 표현법에 대하여 알아보자. 그래프에 관한 일반적 정의와 표현은 Gross J. L. and Tucker, T. W. (1987)를 참고한다.

순서가 주어진 두 집합의 곱  $\{v_1, v_2, \dots, v_v\} \times \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ 이 사전식 순서를 가진다고 정의하자. 즉,  $(v_i, s) \leq (v_j, t)$  일 조건이  $i < j$  이거나  $i = j$ 이고  $s \leq t$ 이다. 순환

군  $Z_n = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$ 의 각 원소  $m$ 에 대하여 치환행렬  $P(m)$ 을 대응시키자. 여기서,  $P(m)$ 의  $ij$ -요소는  $m+i=j$  이면 1, 아니면 0으로 정의하고, 덧셈 연산은 군  $Z_n$ 에서의 연산이다. 두 행렬  $A$ 와  $B$ 의 텐서 곱  $A \otimes B$ 를 행렬  $A$ 에서  $A$ 의  $ij$ -요소  $a_{ij}$ 를  $a_{ij}B$ 로 바꾼 행렬로 정의하자. 이를 이용하면 다음 정리를 얻는다.

보조정리 2.1. 그래프  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu)$ 의 인접행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$A(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu)) = I_n \otimes A(G) + \sum_{m=1}^{n-1} P(m) \otimes \begin{pmatrix} \chi_{\Omega_1}(m) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \chi_{\Omega_2}(m) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_{\Omega_{\nu-1}}(m) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \chi_{\Omega_\nu}(m) \end{pmatrix}.$$

단,  $\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & a \notin S \end{cases}$ 로 정의된 집합  $S$ 의 특성함수이다.

그래프  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu)$ 에서 꼭짓점  $(v_i, m)$ 의 차수는  $d(v_i) + |\Omega_i| = d_i \circ$ 이다. 이를  $\circ$  용하여 다음을 얻는다.

보조정리 2.2. 그래프  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu)$ 의 차수행렬은 다음과 같다.

$$D(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu)) = I_n \otimes \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{\nu-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_\nu \end{pmatrix} = I_n \otimes D,$$

단,  $d(v_i) + |\Omega_i| = d_i \circ$ 고,  $|\Omega_i|$ 는 집합  $\Omega_1$ 의 원소의 수를 의미한다.

이제,  $\mu D(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu)) = I_m \otimes \mu D$ 라는 사실과 보조정리 2.1과 2.2을 이용하면,  $A(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu)) - \mu D(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu))$ 는 다음과 같이 표현된다.

**파름정리** 2.3. 그래프  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu)$ 에 대하여  
 $A(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu)) - \mu D(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\nu))$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$I_n \otimes (A(G) - \mu D) + \sum_{m=1}^{n-1} P(m) \otimes \begin{pmatrix} \chi_{\Omega_1}(m) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \chi_{\Omega_2}(m) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_{\Omega_{v-1}}(m) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \chi_{\Omega_v}(m) \end{pmatrix}.$$

단, 대각행렬  $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{v-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_v \end{pmatrix}$  이고,  $d_i = d(v_i) + |\Omega_i|$ ,  $\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & a \notin S \end{cases}$  로 정

의된 집합  $S$ 의 특성함수이다.

### 3. 특성다항식의 계산

특성다항식  $F_{G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v)}(\lambda, \mu)$ 의 계산을 위하여 끄름정리 2.2에서 얻은 행렬의 표현을 간단한 형태로 고치려고 한다. 먼저,  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ 로 두자. 그러면,  $Z_n$ 의 각원소  $m$ 에 대하여,

$$M^{-1}P(m)M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta^m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^{m(n-2)} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \zeta^{m(n-1)} \end{pmatrix}$$

를 만족하는  $n$ 차 정칙행렬  $M$ 이 존재한다.

한편, 행렬의 텐서 곱은  $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ 를 만족시키므로,  $M \otimes I_v$ 와  $M \otimes I_v$ 의 역행렬  $M^{-1} \otimes I_v$ 를 행렬  $A(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v) - \mu D(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_v))$ 의 좌우에 곱하면

$$I_n \otimes (A(G) - \mu D) + \sum_{m=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta^m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^{m(n-2)} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \zeta^{m(n-1)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \chi_{\Omega_1}(m) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \chi_{\Omega_2}(m) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_{\Omega_{v-1}}(m) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \chi_{\Omega_v}(m) \end{pmatrix}$$

를 얻는다. 단,  $d(v_i) + |\Omega_i| = d_i \circ$ 이고,  $\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & a \notin S \end{cases}$ 로 정의된 집합  $S$ 의 특성 함수이다. 이를 효과적으로 표현하기 위하여, 각  $s = 1, \dots, n$ 에 대하여 그래프  $G$ 의 꼭짓점과 변을 정의역으로 하는 함수  $\omega_s(G) : V(G) \cup E(G) \rightarrow C[\mu]$ 를 다음을 정의하자. ( $C[\mu]$ 는 미지수가  $\mu$ 인 복소계수 다항식의 환이다). 그래프  $G$ 의 각 꼭짓점  $v_i$ 에 대하여  $-\left(\mu d_i - \sum_{m=1}^{n-1} \chi_{\Omega_i}(m) \zeta^{ms}\right)$ 를 대응시킨다. 즉,  $\omega_s(v_i) = -\left(\mu d_i - \sum_{m=1}^{n-1} \chi_{\Omega_i}(m) \zeta^{ms}\right)$ 이다. 그리고 그래프  $G$ 의 각 변  $e$ 에 대하여 1을 대응시킨다. 즉,  $\omega_s(e) = 1$ . 이렇게 하여 꼭짓점과 변에 무게를 가지는 그래프  $G_{\omega_s} = (G, \omega_s(G))$ 를 얻는다. 이제, 무게를 가지는 그래프  $G_{\omega_s}$ 의 인접행렬  $A(G_{\omega_s})$ 를 다음과 같이 정의하자.  $A(G_{\omega_s})$ 의 ii-요소를  $\omega_s(v_i)$ 로 정의하고, ij-요소를  $\omega_s(\{v_i, v_j\})$ 로 정의하자. 그러면,  $i \neq j$ 에 대하여,  $A(G_{\omega_s})$ 의 ij-요소는  $G$ 의 인접행렬  $A(G)$ 의 ij-요소와 같다. 그러면, 행렬

$$I_n \otimes (A(G) - \mu D) + \sum_{m=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \zeta^m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta^{m(n-2)} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \zeta^{m(n-1)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \chi_{\Omega_1}(m) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \chi_{\Omega_2}(m) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \chi_{\Omega_{n-1}}(m) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \chi_{\Omega_n}(m) \end{pmatrix}$$

는  $\bigoplus_{s=1}^n A(G_{\omega_s})$ 와 같다. 따라서 행렬  $A(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)) - \mu D(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n))$ 은 행렬  $\bigoplus_{s=1}^n A(G_{\omega_s})$ 와 상사이다. 한편,

$$F_{G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)}(\lambda, \mu) = \det(\lambda I - (A(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)) - \mu D(G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)))) \circ \text{므로},$$

$$F_{G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)}(\lambda, \mu) = \det(\lambda I - \bigoplus_{s=1}^n A(G_{\omega_s})) = \prod_{s=1}^n \det(\lambda I - A(G_{\omega_s})) = \prod_{s=1}^n \Phi(G_{\omega_s}; \lambda)$$

표현된다. 이를 정리하면 다음과 같다.

정리 3.1. 그래프  $G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$ 의 특성다항식은 다음과 같이 표현된다.

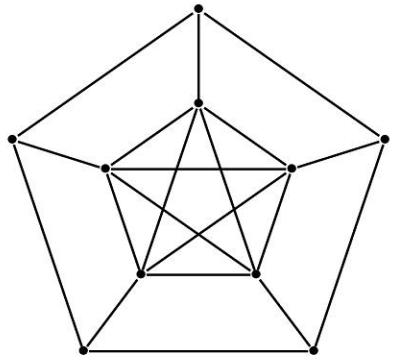
$$F_{G(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)}(\lambda, \mu) = \prod_{s=1}^n \Phi(G_{\omega_s}; \lambda).$$

#### 4. 계산 및 이의 응용

이절에서는 3절에서 구한 공식을 이용하여 길이가  $n$ 개의 꼭짓점을 가지는 회로  $C_n$ 과  $n$ 개의 꼭짓점을 가지는 완전그래프  $K_n$ 을 꼭짓점을 2개 가지는 완전그래프  $K_2$ 를 따라 연결한 그래프에 대하여 이변수 특성다항식을 구하고 이를 이용하여 이들의 복

잡도(모든 꼭짓점을 가지는 나무의 수)를 구한다.

회로  $C_n$ 에 대응되는 대칭 생성자  $\Omega_1 = \{1, n-1\}$ 이고, 완전그래프  $K_n$ 에 대응되는 대칭 생성자  $\Omega_2 = Z_n - \{0\} = \{1, 2, \dots, n-1\}$ 이며, 우리는  $K_2(\Omega_1, \Omega_2)$ 에 대하여 이변수 특성다항식  $F_{K_2(\Omega_1, \Omega_2)}(\lambda, \mu)$ 를 계산하려고 한다.  $n=5$ 인 경우  $K_2(\Omega_1, \Omega_2)$ 는 다음과 같다.



정리 3. 1을 적용하기 위하여 다음에 대하여 알아보자. 먼저,  $d_1 = 3^\circ$ 이고,  $d_2 = n^\circ$ 어서,  $s = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 꼭짓점 무게함수는  $\omega_s(v_1) = -3\mu + 2\cos \frac{2s\pi}{n}$ 이고  $\omega_s(v_2) = -n\mu - 1$ 이다. 이로부터  $s = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여

$$A(G_{\omega_s}) = \begin{pmatrix} -3\mu + 2\cos \frac{2s\pi}{n} & 1 \\ 1 & -n\mu - 1 \end{pmatrix}$$

임을 알 수 있다. 더욱이,  $\Phi(G_{\omega_s}; \lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 3\mu - 2\cos \frac{2s\pi}{n} & -1 \\ -1 & \lambda + n\mu + 1 \end{pmatrix}$ 이므로, 정리 3. 1을 적용하면, 다음을 얻는다.

정리 4. 1. 대칭 생성자 집합  $\Omega_1 = \{1, n-1\}$ 과  $\Omega_2 = Z_n - \{0\}$ 에 대하여,  $K_2(\Omega_1, \Omega_2)$ 에 대한 이변수 특성다항식  $F_{K_2(\Omega_1, \Omega_2)}(\lambda, \mu)$ 는 다음과 같다.

$$F_{K_2(\Omega_1, \Omega_2)}(\lambda, \mu) = \prod_{s=1}^n \left[ \left( \lambda + 3\mu - 2\cos \frac{2s\pi}{n} \right) (\lambda + n\mu + 1) - 1 \right].$$

한편, 그래프  $G$  부분그래프로서 모든 꼭짓점을 가지는 나무의 수  $\tau(G)$ 는  $\frac{1}{2|E(G)|} \left. \frac{\partial F_G}{\partial \mu} \right|_{(0,1)}$  임이 알려져 있다 Kim, D., Kim, H. K. and Lee, J. (2008). 이 사실과 정리 4. 1을 이용하면 다음을 얻는다.

따름정리 4. 2. 대칭 생성자 집합  $\Omega_1 = \{1, n-1\}$ 과  $\Omega_2 = Z_n - \{0\}$ 에 대하여,

$K_2(\Omega_1, \Omega_2)$ 의 복잡도  $\tau(K_2(\Omega_1, \Omega_2))$ 는 다음과 같다.

$$\tau(K_2(\Omega_1, \Omega_2)) = \frac{1}{n(n+5)} \sum_{s=1}^n \left( 6n + 3 - 2n \cos \frac{2s\pi}{n} \right) \prod_{1 \leq t \neq s \leq n} \left( (3 - 2 \cos \frac{2s\pi}{n})(n+1) - 1 \right)$$

### 참고문헌

1. Bartholdi, L. (1999), Counting pathes in graphs, *Enseign. Math.*, 45, 83–131.
2. Chae, Y., Kwak, J. H. and Lee, J. (1993), Characteristic polynomials of some graph bundles, *J. Korean Math. Soc.* 30, 229–249.
3. Cvetkovic, D. M., Doob, M. and Sachs, H. (1979), *Spectra of Graphs*, Academic Press, New York.
4. Gross J. L. and Tucker, T. W. (1987), *Topological Graph Theory*, Wiley, New York.
5. Kim, D., Kim, H. K. and Lee, J. (2008), Generalized characteristic polynomials of graph bundles, *Linear algebra and its applications*, 429(4), 688–697.
6. Kim, H. K. and Lee, J. (2008), A generalized characteristic polynomial of a graph having a semifree action, *Discrete Mathematics*, 308, 555–564.
7. Kwak, J. H., Lee, J. and Sohn, M. Y. (2005), Bartholdi zeta functions of graph bundles having regular fibers, *European Journal of Combinatorics* 26, 593–605.

[접수일(2008년 10월 13일), 수정일(2008년 10월 29일), 게재 확정일(2008년 11월 4일)]