한국수학사학회지 제21권 제3호(2008년 8월), 1 - 30

라플라스 모세관이론과 수학물리학의 태동

수원대학교 자연과학대학 이호중
mannnlee@hanmail.net

뉴턴의 중력이론의 성공은 수학물리학을 태동시키는 바, 최초로 19세기 초의 분자력의 모델성립에 중요한 요소로 등장하였다. 라플라스는 여기서 회전타원체의 작용이라는 모델을 이용하였고 회전타원체의 작용은 이계편미분방정식으로 표현이 되었다. 이것을 풀어서 유체를 담은 용기의 기하학적 모습과 와 유체와 고체의 접촉각에 대응시켰다. 알 수 없는 분자간거리는 추상적이고 미지의 힘 함수 $\varphi(f)$를 써서 표현하여, 분자 작용반경이라는 개념을 도입하여 이론적인 포텐셜 함수의 이론적인 토대를 구축하였다. 뉴턴의 중력이론은 라플라스이론에서 완성을 이루었고, 이후 분자력의 모델로서 작용을 하였다. 라플라스-영의 모세관이론은 수학적으로는 극소 곡면론에서 물리학적으로는 표면장력현상으로 설명이 된다.

주제어 : 중력이론, 분자력, 표면장력, 극소곡면, 모세관, 회전타원체의 인력, 편미분방정식.

1. 개관:

라플라스는 뉴턴의 중력이론을 완성하였다. 그 수학적 표현은 라플라스방정식에 나타나있다. 라플라스는 『천체역학』에서 많은 쪽수를 할애해서 중력이론을 완성하고. 이것을 모세관이론에 적용한다. 질점역학으로 불리 우는 고전역학은 미적분학의 응용으로 큰 위력을 계몽주의 시대에 떨치게 된다([1]). 뉴턴의 중력이론을 라플라스가 완성했다고 볼 수 있는데, 라플라스는 입자들의 총합으로 나타나는 물분자력의 세기가 중력에 비교하여 매우 큼에 놀라서 1807년 다음과 같이 말하고 있다.

가장 정확한 태양시차의 값들과 빛의 속도값들로 부터 계산해 볼 것 같으면, 이론상 수로(canal)의 올라가는 높이(s)는 태양과 지구거리의 일만배가 넘는다. 물끼리의 작용이 이와 같이 굉장히 크다는 것은 진실 같지가 않다([24]).

그 보다 몇 해 전 라랑드르는 모세관 현상이야말로 보편타당한 일반적인 법칙의 열쇠라고 하였고, 이것에 의해서 움직이는 우주의 실체에 대한 물리학적 실마리가 풀릴 수 있다고 하지 않았던가([27])? 1816년 토마스 영은 모세관내의 표면장력을 내부압력으로 나눈 값을 물기둥의 제곱인치를 단면적으로 해서 입자들의 인력을 계산한다면 높이가 750000피트에 해당하는 물기둥과 같은 무게와 같다고 피력하고 있다([27, 19쪽]). 라플라스의 방법은 대표적인 가설연역법의 일례로 볼 수 있다. 이것의 진행과정은 다음과 같다.

(1) 라플라스의 모세관이론에서는 중력론을 바탕으로 분자력의 존재를 가설로 설정하였다.
(2) 이를 바탕으로 라플라스의 모세관 이론에서는 질점간의 인력을 분자력의 존재로 가정해서 미분방정식을 세웠다.
(3) 거리함수에 따라서 감지할 수 없는 거리에서 적분함수는 유효하고 감지거리에서는 무효함을 취해서 적분하였다.
(4) 기체, 액체, 고체상에서 작용하는 분자간의 상호인력작용의 세기를 수용하고 비교 검토한다.
(5) 이를 실험모델을 세워서 검증하는 바, 모세관현상과 비눗방울에 의해 형성되는 다양한 극소곡면들의 시범으로서 인 것이다.

수학사 적인 측면에서는 (2)과 (3)번이 핵심이라고 볼 수 있고, 실재론적인 입장에서 분자력을 가설로 설정하고, 이를 미지의 추상적인 힘 함수 $\varphi(f)$로 표시해서 적분을 했다는 데 있다고 볼 수 있다. 여기서 라플라스가 취하는 정적분의 형식은 추상적인 거리함수 $f(r)$을 힘 함수로서 취급하여 분자간의 거리를 감지할 수 없기 때문에 분자의 존재를 점으로 취급하여 실재한다고 가정함으로서 일종의 분자작용반경 내에서 만이 적분 값이 존재한다고 가정하고 있다. 이러한 방식은 라플라스수학화의 특징이자 장점이며, 알 수 없는 입자의 작용거리를 극복하는 이론적 접근방식으로서 미지의 거리함수이자 추상적인 거리함수의 도입이라고 볼 수 있다. 라플라스는 『천체역학』 제4권 제2부록 5쪽에서 미지의 추상적인 힘 함수 $\varphi(f)$, $\pi(f)$와 $\Psi(f)$에 대해서 엑스포넨셜 함수처럼 거동한다고 하였다. 따라서 거리에 라플라스가 표현한 인력함수의 세기는 $C^{-\mathrm{if}}$는 오늘날 e^{-nx}에 해당한다고 볼 수 있다.

2. 모세관론에 대한 역사적 소개.

매우 좁은 관속으로 액체가 올라가는 현상은 매우 일찍 관찰이 되었고, 보렐리(Giovanni Borelli, 1608-1679)는 액체가 관속을 올라가는 높이는 관의 내부직경에 반

비례한다는 것을 증명하였다([25]). 보렐리는 액체의 상승은 압력감소나 거친 내부 벽 때문에 생기는 것이 아니라고 하였다. 보렐리는 진공이 발생하여 모세관현상이 나타난다고 하여 인정을 받았으나, 18세기 초가 되고나서야 비 평형 대기압의 일반적인 설명이 나왔다.

유력한 설로서는 근거리에서 뉴턴력이 액체와 튜브사이에서의 발생하여 이들 입자들 사이에 상호 인력이 생긴다는 것이었다. 혹스비는 그의 저서 『물리 역학적 실험 Physico-mechanical Experiments, 1709』에서, 인력은 튜브벽에 수직으로 작용하고, 인력의 세기는 거리의 역 제곱 법칙에 따라 급격히 감소하며, 평행판사이의 액체나 기공이 있는 물질에서도 모세관 현상이 나타난다고 하였다. 상대적인 접착력(adhesive force)이나 응집력(cohesive forces)의 세기를 고려해서 쥬린(James Jurin, 1684-1750)은 액체표면에서의 오목이나 볼록의 현상을 설명하였다. 쥬린의 법칙이란 모세관 반경에 역비례해서 유체의 높이가 결정된다는 것이다.

분자간 인력은 박막, 탄성막, 액체막을 이용하여 발전이 이루어 졌고, 세그너(J. A. von Segner, 1704-1777)는 이를 이용하여 1751년 모세관 이론을 발표하였다; 표면장력의 연구는 이어서 라이덴프로스트(Ludwig Leidenfrost, 1715-1795)가 실험으로 증명하였다. 클레로(Alexis-Claude Clairaut, 1713-1765)는 수정역학적인 평형분석으로 모세관 이론을 전개하였다. 클레로와 세그너의 이론은 19세기물리학자들이 이용하게 된다. 1805년 토마스 영(Thomas Young, 1773-1829)은 표면장력에 입각하여 모세관현상을 설명하였다. 라플라스(Pierre-Simon Laplace, 1749-1827)는 1805년『천체역학 Mécanique céleste, 1805』부록에서 뉴턴주의자들의 견해에 입각하여 성공적인 수학물리적인 접근을 하여 엄밀한 인력의 법칙을 세웠다. 오늘날 영-라플라스공식은 여기서 유래하고, 특히 라플라스의 접근은 수정력학에 미분방정식을 이용하여 이후에 표준공식으로 많이 이용되었다. 1829년 가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)는 모세관계를 최소의 에너지계로 보고, 접착과 응집에너지 그리고 중력에너지의 평형으로 보고 분자간의 인력차원에서 계산을 하였다. 프와송(S. D. Poisson, 1781-1840)은 1831년 『신모세관이론』에서 모세관의 유체표면에서 밀도 변화를 고려하여 수학적인 접근을 시도 하였다. 외트비시(Lorand Eotvos, 1848-1919)는 1885년 표면장력을 측정하였고, 1886년 액체의 표면장력에 관한 외트뵈시 법칙을 발표하였다.

3. 19세기 초까지의 미적분발달과 수학화의 맥락.

물리과학은 대체로 고전적인 의미에서 수학적 과학분야와 경험적인 실험분야로 나눌 수가 있다([7]). 19세기 중반의 물리학이라는 하나의 분야의 성립은 과학혁명기에 출현한 여러 가지 실험적 과학분야가 체계화 된 것이라고 볼 수 있다. 고대의 유클리드, 아르키메데스, 프톨레마이오스는 각각 수학, 기하광학과 유체정역학을 포함한 정

역학, 그리고 천문학에서 큰 공헌을 한 바, 기하학과 밀접한 관련성을 맺고 있었다. 천문학은 위치를 화성학은 비율을 다룸으로서 수학화된 것이었다. 이 일군의 무리들, 즉 천문학, 화성학, 수학, 광학, 정역학은 공통적으로 수학적인 뿌리가 있었다. 중세 말에 운동학이 여기에 추가되어서 여섯 가지분야에서 갈릴레오, 케플러, 데카르트 그리고 뉴턴의 공헌은 대표적인 사례라고 볼 수 있고 19세기 초 까지 계속되었다. 오일러, 라플라스, 라그랑즈 그리고 가우스의 공헌은 이 연속선상에서 해석할 수 있다. 이 중 실험적 전통에 속해있었던 분야들은 17세기의 잠행성 물질이나 제2의 성질에 해당하는 물질들로서, 18세기말에 무게 없는 유체(imponderable fluid)로서 취급이 되어 수학화가 시도되었고, 19세기 전반기의 수리물리학의 주요주제가 되었다. 우선 일반적으로 물리적인 설명을 위한 수학적 연구를 19세기 초에 대한 연구에서 그라탄-기네스가 수학물리(mathematical physics)의 관점에서 분석한점을 살펴보면 다음과 같다 ([19]).

1. 수학은 물리적인 의미에서의 명백한 해석을 추구한 것은 아니며, 그렇지만 어떤 식으로든지 해석 할 수 있는 역할을 수학에서 할지 모른다.

2. 수학은 관련된 물리학에서 해석을 추구하지 않았지만, 이런 해석이 존재한다는 인식을 하게 된다. 정말로 물리학이 수학에 동기를 부여할지 모른다.

3. 수학은 본래 물리학에서 해석을 추구하였지만, 물리적인 기술을 하는 순간부터 물리적인 문제에 대한 길잡이의 역할을 잃게 된다.

4. 수학은 물리학에서 해석을 추구하였고, 물리학의 문제에 대한 안내자로서 수학이 만들어지도록 적합한 통제의 역할을 한다.

5. 물리현상에 대한 이론적인 분석에서 수학적인 구성요소는 미미하고 때로는 존재하지 않기도 하다. 이런 연구는 기초적인 성격을 띠며 물리적인 파라메터에 관련된다.

6. 물리학에서의 실험적인 작업은 수학적이거나 비수학적인 검정을 위해 계획된 것이고 이미 해결된 어떤 관련 도구의 이론을 포함하게 된다.

7. 엔지니어링 구조물, 기계류 그리고 도구(기구): 즉, 특정상황이나 상황의 타입에 적합한 장비나 구조의 설계에 이용이 된다.

앞서본 바와 같이 뉴턴과 라이프니츠는 미적분을 완성했다고는 하지만 정확히 말해서 수학적인 의미에서의 엄밀성은 결여되어 있었다. 뉴턴과 라이프니츠에서의 극한과 연속, 수렴의 의미는 직관적인 의미였으며, 그들이 지나친 엄밀성을 추구했다면 근대역학의 토대인 동역학은 완성이 될 수 없었다. 뉴턴의 순간속도나 라이프니츠의 순간

변화율등도 갈릴레오 와 케플러의 공헌이외에도, 데카르트, 배로우, 왈리스, 까발리에리, 페르마, 카센디, 보렐리, 호이겐스, 보일, 후크, 토리첼리등의 일련에 많은 학자들의 공헌이 있었다고 보는 것이지만, 최종적인 단계에서는 뉴튼과 라이프니츠가 동시에 완성했다고 볼 수 있다. 뉴턴의 운동법칙과 만유인력의 모델의 성공이란 힘을 받아 움직이는 한 입자의 궤적을 추적하고 분석하기 위해서 몇 개의 간단한 방정식으로부터 많은 입자의 상호작용과 운동을 분석해주는 복잡한 편미분방정식의 형태로 발전이 되었다. 수학적인 정량화의 시도는 동역학의 보존원리에서 삼체문제와 분자의 작용력에 이르기 까지, 라플라스의 천체역학, 해밀턴역학, 라그랑즈의 역학에 이르기 까지 발전이 이루어 졌고, 이들은 초기의 수학물리학자로 불릴만한 사람들로서 클레로, 모배르티, 라그랑즈, 오일러, 르장드르, 라플라스, 프와송, 해밀턴, 가우스, 그리고 야코비가 주역이었다.

뉴턴은 만유인력과 힘의 법칙(가속도의 법칙)을 만들어 신이 우주의 설계를 수학적인 법칙들에 따라 만들었음을 보였다. 수학화의 첫 시도는 역학에서 이루어졌고 18세기에 무게 없는 입자로 불리던 분야들의 수학화가 이루어지는데 열, 전자기, 빛, 음향, 모세관등에서 수학화가 이루지게 되었고, 이 분야들이 19세기중반에 가서 물리학의 중요주제로 다져지게 되었다. 1687년에 출간된 뉴턴의 저서 『자연철학의 수학적 제원리』의 서문에서 이렇게 말하고 있다.

그 옛날 사람들도(파푸스가 말한 바에 따르면) 자연현상을 연구하는데 가장 중요한 것은 역학이라고 간주하였다. 그리고 현대 사람들은 형식과 주술적인 요소를 거부하여, 자연현상을 수학법칙으로 나타내게 되었는데, 나는 이 책에서 수학을 발전시켜 철학(과학)과 관련을 시켰다. ... 그래서 나는 이 연구를 철학의 수학적 원리로 제시한다. 왜냐하면 이 연구는 운동현상으로부터 자연의 힘을 연구하는데 철학의 모든 문제가 이 책안에 다루어진 것으로 보이기 때문이다. 그런 목적으로 제1권, 2권에서는 일반적인 명제(命題, propositions)들을 이끌어 내었다. 제3권에서는 우주의 체계에 대한 설명의 실례(實例)를 들었다. ... 그리고 이 힘들로부터 역시 수학적인 다른 명제들을 써서, 나는 행성, 혜성, 달 그리고 바다의 운동을 연역해 내었다. 왜냐하면 많은 이유 때문에 이 현상들도 모두가 어떤 종류의 힘에 의존하는 것이 아닐까, 또 그 힘에 의해 물체의 미소한 입자들이 아직도 알려지지 않은 원인들에 의해서 서로 상대방에게 밀려 아주 규칙적인 형태로 응집 되던가 서로 반발하여 멀리 떨어져 나가는 것이 아닌가 하고 추측이 되기 때문이다. 이 힘들이 아직 알려져 있지 않기에, 철학자들은 아직까지 자연의 탐구를 시도했지만 실패로 끝나고 말았던 것 이었다.

라플라스는 뉴턴의 중력모델과 클레로, 오일러, 달랑베르의 운동론으로부터 일반적인 운동론인 라플라시안(라플라스방정식)을 만들어내었다. 이것은 포텐셜의 유래가 되며, 포텐셜의 개념은 1777년 라그랑즈(Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813)가 물체의

외부질점에 대한 중력의 세기를 연구함으로서 유래했다; 1828년 그린(George Green, 1793-1841)에서의 포텐셜이라는 말은 전기와 자기에서 수학적인 분석을 의미하였다. 라그랑즈는 함수 u 를 놓고, 중력질량체에 둘러싸인 공간상의 모든 점을, 무시할 정도로 작은 물체를 놓았을 때 힘이 미치게 되는 그런 점들로 정하였다. 관계되는 점으로부터 각각의 질량이 거리에 따라서 나타나는 세기의 몫(비율)을 합해줌으로서 얻을 수 있고, 중력이 미치는 힘의 방향을 고려할 필요성을 제거함으로서 포텐셜함수는 문제를 단순화시켰다.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

라플라시안은 장방정식으로서, 중력질량, 전하량, 유체의 흐름등과 같은 것들에 의해서 발생하는 장에 의한 임의의 점에서 임의의 순간에 발생하는 것을 기술하는데 쓰인다. 다른 말로 말해서 라플라시안은 연속체에서 나타나는 물리적인 양을 다룰 때 쓰이며 포텐셜(potential)이라고 하는 것이다([27]). 장의 서로 다른 두 지점에서 포텐셜 함수값의 차이는 한 점에서 다른 점으로 단위물체를 이동하는데 필요한 일의 양에 해당한다; 임의의 방향에서의 포텐셜의 변화률은 그 방향에서의 힘의 측정을 말하는 것이다. 온도, 속도 포텐셜과 같이 u에 다른 조건을 부여함으로서 정전기, 중력, 수동력학, 자기, 음향, 빛, 열전도등에 유용하게 쓰이게 되었다. 수동력학에서 u는 속도 포텐셜(x^2/t)을 말하고, 포텐셜의 변화률은 유체의 속도를 측정하는 것을 말한다. 방정식은 비압축적이고 비파괴적인 유체에 적용이 된다; 만일 유체가 임의의 미소단위 체적으로부터 나오고 들어간다면 라플라시안을 만족하게 되는 것이다. 물리학의 거의 모든 문제에서 라플라시안이 쓰이는 이유는 자연의 거동을 일목요연하고 단순하게 기술하기 때문이다 - 국소적인 불균형은 균등해지려는 경향이 일반적인 것이기 때문이다. 금속막대의 한쪽 끝을 가열하면 열전도에 의해서 같아지려는 경향이나, 용액내의 용질은 균등하게 분포되려는 경향이 있는 것이다. 이 같은 맥락에서 고전장론에서는 라플라시안과 함께 밀도(ρ)를 감안한 포와송 방정식이 유용하다.

$$\nabla^2 u = -4\pi\rho$$

(여기서 ρ는 인력이 작용되는 점에서의 물질의 밀도를 말한다.)

같은 맥락에서 푸리에의 열전도방정식, 라그랑즈의 라그랑지안, 암페어의 전기동력학 방정식, 프레넬의 빛에 대한 파동방정식, 코시의 탄성론, 하밀톤의 변분광학과 역학, 그린의 그린함수, 나비에와 스톡스의 점성유체방정식, 디리킬레(Dirichlet)의 디리킬레원리, 쟈코비의 타원함수등[1]을 이해하여야한다.

그러나 미적분학의 입장에서 보면 이들의 접근은 아직 불완전 한 것이었고 코시를

1) 여기서 언급한 방정식이나 함수들의 예는 문맥상 18세기말에서 19세기 이후에 나타난 물리현상의 수학화에 공헌한 대표적인 수학물리학자들의 업적을 관련시킬 목적으로 기술하였다.

거쳐 바이어스트라스에 이르러서 엄밀한 극한의 정의가 이루어졌다. 미적분학(微積分, Calculus)처럼 장구한 세월을 거쳐서 완성된 이론도 드물다. 미적분학이 이렇게 오랜 세월을 거쳐서 확립이 된 이유는 그 엄밀성에 대한 성질 때문이었으며, 그 예를 들면 정적분을 위한 무한급수의 수렴성의 존재문제, 부정적분에서 미분의 성립조건으로서 함수의 극한과 연속의 문제, 유리수가 아닌 무리수나 초월수 복소수에의 적용문제가 19세기 중에 제기 되었다. 기원전 그리스에서 기원을 둔 미적분학은 17세기 뉴턴과 라이프니츠에 의해서 그 기초가 이루어졌으며 19세기중반의 코시와 볼자노를 거쳐서 바이어스트라스와 디드킨트에 이르러서 완성을 본다. 미적분학은 장구한 세월에 걸쳐서 완성된 만큼 그 이론이 견고하여, 오늘날 토목건축공학에서 경제학, 우주론과 미세한 소립자에 이르기 까지 과학 등 전 학문분야에 걸쳐서 응용이 되고 있다.

신이 우주를 수학적으로 설계하였다는 신념은, 뉴턴뿐 만이 아니라 코페르니쿠스, 케플러, 데카르트, 갈릴레이, 파스칼등도 같은 생각을 하였다. 이들은 모두 인간의 수학적인 사고가 신의 설계와 일치한다고 생각하였다. 운동의 보편적인 법칙을 세우려는 과정에서 뉴턴은 대수학, 기하학, 그리고 미적분학에 커다란 기여를 하였다. 갈릴레오가 처음으로 기하학을 시간에 적용하여 운동학을 창시하고, 케플러의 타원궤도의 법칙으로부터 뉴턴은 인력이라는 개념에 미분의 형식을 사용한다. 뉴턴역학 또는 뉴턴 물리학이라고 불리 우는 이 개념은 19세기 말까지 뿐만이 아니라, 현재도 물리학의 가장 중요한 기본요소이다. 역학적인 측면에서 본다면 뉴턴의 운동의 법칙은 고전장 론의 토대가 되었을 뿐만이 아니라, 광학, 전자기학, 음향학, 열역학, 분자력, 모세관력 등에서 패러다임적인 영향을 미침으로서 대표적인 전범적 법칙사례가 되었다.

위에서 언급한 바와 같이 이러한 뉴턴의 위대성에도 불구하고 수학적인 측면, 즉 미적분학적인 측면에서 뉴턴의 미분방정식은 엄밀성이 결여되었으며, 엄밀한 미적분을 구사했다는 오일러, 라그랑즈, 라플라스 같은 위대한 뉴턴주의자들 조차 엄밀성은 결여되어있다. 만일 이들 초창기의 수학자(수리 물리학자)들이 지나친 미적분의 엄밀성을 추구 했다면 그들은 역학이나 기타의 미적분학 응용에서 실패했을 것이다. 그래서 본 논문은 실증적인 접근을 써서 미적분학의 발달과 수학물리학의 태동이라는 맥락적 관점을 모세관이론에 관련시키고자하는 것이다. 많은 논란에도 불구하고, 현대의 일부 실재론자들이 입자론적인 입장에 서서 실증주의를 비판 하는 경우도 있지만, 실증주의의 끊임없는 매력의 지속성은 과학적인 실천의 상당한 측면을 반영하는 것이라고 하였다. 철학에서는 죽은 것일지라도, 실증주의는 과학에서 살아있는 것이다: 사고의 경향으로서, 자연과학 속에서 실증주의는 살아있는 것이다; 그리고 인문과학의 많은 경우보다도, 자연과학에서 그 정도는 강하게 남아있는 것이다.

미적분은 미분(differentiation)과 적분(intergration)의 수학적 이론을 말하고, 1670년대 후반에 라이프니츠(G. W. Leibniz, 1646-1716)가 만들었고, 약10년 정도 후에 뉴턴(1642-1727)은 유율법(流率法, method of fluxions)을 만들어 미적분에 이용하였다. 라이프니츠나 뉴턴의 방법 모두 무한소 문제를 풀기 위한 것이 이었으며 곡선의 접

선, 호의 길이, 곡률 반경, 무게중심, 면적(넓이), 부피(해석학)를 구하기 위해서 쓰였다. 차분(差分, difference)의 급수를 합하기 위해서 라이프니츠는 초기에 미적분의 연구를 한 바가 있고, 이 방법은 17세기 초에 접선과 넓이를 구하기 위해서 만들어 졌었다. 라이프니츠의 공적은 당시의 여러 방법 중에서 일반적인 개념을 인지해서 일반적인 방법의 표현에 적합한 기호를 발견한데 있었다. 라이프니츠는 합들(sums)을 구하는 과정의 연구에서 출발했는데 이것을 $\int y$ 의 기호로 표시하였다($\int$는 S자를 길이로 늘렸다고 해서임); 이 적분 기호 $\int$ 에 규칙성을 찾기 위해서, 역의 과정에는 기호 d 를 도입했는데 이것은 미분을 발견하기 위한 것 즉, 무한소 차분(infinitesimal difference)를 찾기 위한 것이었다([13], [15]). 라이프니츠는 만족스럽게 미분을 정의할 수 없었다; 라이프니츠가 말하는 미분은 두미분량(differentials)의 몫(quotient)으로서 라이프니츠식의 미적분에 대한 기본개념이 설정되었다. 흔히 지적되는 뉴턴과 라이프니츠의 미적분학의 모순은 다음과 같은 점에서 잘 들어 난다([6]).

영미의 ft-lb 계에서 자유낙하시의 이동거리는 대륙의 mks 계에서 쓰던 $4.9t^2$대신에 $16t^2$을 자주 써왔다. $S=16t^2$의 4초 후의 속도는 다음과 같이 구해보자. $t=4$일 때 $S=16 \bullet 4^2=256$이 된다. Δx에 해당하는 h를 시간의 증분량이라 하면 낙하하는 공은 $4+h$초 동안에 $256+k$ 만큼 낙하하게 되며 k를 거리의 증분량이라 하면,

$256+k=16(4+h)^2=16(16+8h+h^2)$이 된다.

즉, $256+k=256+128h+h^2$이다. 양변에서 256을 빼면

$k=128h+h^2$이며, h초 동안의 평균속도는

(1) $\frac{k}{h}=\frac{128h+h^2}{h}$, $\frac{k}{h}=128+h$이 된다.

(1)식을 얻었는데 $h=0$을 놓음으로서 S를 128로 얻었다. 페르마와 뉴턴은$h=0$일 때 (1)식에서 나타나는 좌변의 0/0을 논증할 수 없었다. 즉, h가 (1)식의 우변에서는 0이여야만하고 좌변의 h는 0이 아닐 때만 옳은 것이다. 라플라스등은 매우 흔히 이런 문제에 대해서, 이것은 매우확실하고 쉬어서 또는 h^2항보다 큰 항의 값은 매우 작은 값이므로 무시할 수 있다고 하였다([4]). 라플라스조차도 1820년 학사원에서 코시의 무한급수의 수렴성에 관한 강의를 듣고, 놀라서 천체역학의 급수에 대하여 수렴성을 엄밀하게 검토했다는 일화는 유명한 이야기이다.

이런 일련의 모순은 코시와 바이어 스트라스에 이르러서 $\epsilon-\delta$법에 의한 엄밀한 증명법에 이르러서 완성되는데 200년 이상의 시간과 많은 수학자들의 노력을 필요로 하였던 것이다([2]).

베르누이가의 형제들인 자곱(Jacob Bernouilli, 1654-1705)과 요한(Johann Bernouilli,

1667-1748)이 주목할 만한 업적을 남겨 다음과 같은 분야에서 미적분은 실용적인 응용 도구가 되었다; 무한소 문제의 해결, 물리적인 변화과정(processes of change)의 연구 등에서 이었다. 물리학자와 수학자들은 미적분상의 근본적인 문제가 있었지만 실용적으로 받아들였다. 1690년대 후반에 미적분학은 유럽 대륙에서 수학의 한 분과로 받아 들여졌다. 영국은 19세기 초가 되어서야 미적분학이 받아들여졌는데, 그간 영국 과학자들은 뉴턴의 유율법을 사용하고 있었다.

미적분법과 유율법은 곡선의 연구에 대해 원래부터 밀접한 관련성을 갖고 있었다. 이것이 변화되기 시작한 것은 오일러(Leonhard Euler, 1707-1783)가 함수론에 해석학을 적용하면서 함수 미적분의 토대가 이루어졌다. 만일 y 가 x 의 함수라면, 오일러는 미분량 dx 를 x 의 무한소 증분량 dx 에 해당(비례)하는 y 증분량으로 정의 하였다. 여기서 오일러는 $dy = Pdx$ 라는 식으로 세우고 P 가 바로 x 의 함수라고 하였다. 오일러는 적분은 미분의 역의 관계에 있다고 하고 $\int Pdx$를 미분량 Pdx를 갖는 x의 함수라고 하였다. 그래서 미적분의 문제는 무한소 미분량의 거동에 따라서 설명이 연계된다고 하였다. 반면에 일부 다른 수학자들은 어떤 일정한 크기보다도 작은 값을 갖는 무한소 값을 인정하려 들지 않았다. 이런 사람들은 미분량이 영(zero)과 같아서, 미분량들 사이의 몫은 유한한 크기를 가질 수 있게 된다는 것이다. 라그랑즈(J. L. Lagrange, 1736-1813)는 미분량의 이런 난점을 극복하기 위해서 미적분에 대수학적인 접근을 시도하였다; 도함수 $f'(x)$는 $f(x)$으로부터 나왔다고 하고 i 에 대한 계수에 따라서 전개를 하면 다음과 같이 된다는 것이다.

$$f(x+i) = f(x) + \pi + qi^2 + \cdots$$

뉴턴은 두개의 유율에 대한 비를 만들어서 극한값처럼 사용하였고, 일부 수학자들은 도함수를 극한으로서 간주하려고 시도하였다. 이런 접근방법은 코시(A. L. Cauchy)의 연구 업적에 의해서 인정받게 된다. 코시는 몫을 다음과 같은 식을 사용하였다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

여기서 i 는 무한히 작은 증분량이며, 도함수(=미분, derivative) $f'(x)$는 극한값으로 정의 되었다. 즉, i 가 영(zero)에 가까워짐에 따라서 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$의 값이 존재한다는 것이다. 적분을 계산하면서 코시는 합을 다음과 같이 정의하였다.

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx$$

극한으로서 다음의 합이 존재한다면 위의 적분식이 성립된다는 것이었다.

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

분할의 간격의 길이$(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = X)$ 가 영(zero)에 가까워짐에 따라서 적분식이 성립 된다는 것이다. 코시는 모든 연속함수가 적분 가능함을 보였고, 함수의 적분을 불연속적인 특이점으로 정의 하였다. 코시는 다음과 함수를 생각해서

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

'미적분의 기초 이론'을 증명하라고 했는데, 즉, $F'(x) = f(x)$임을 보이라는 것이었다. 코시는 미적분의 첫 단계로서 엄밀성을 취했지만, 극한에 관한 코시의 개념은 아직도 직관적인 것이어서 미적분의 완전한 엄밀화는 바이어스라스(Karl Weierstrass, 1815-1897)와 1870년대의 다른 수학자에 의해서 이루어졌다. 코시의 연구는 바이어스트스라스의 연구에 큰 영향을 미쳤고, 바이어스트라스의 $\epsilon - \delta$법은 오늘날 대학에서 사용하는 방법과 동일하다.

"임의의 양수값 ϵ에 대하여, 다음의 두 조건을 만족하는 양수값 δ 가 반드시 존재한다.

$0 < |x - a| < \delta$ 인 모든 x에 대하여

[조건 1] $f(x)$가 정의되고(즉, $f(x)$가 존재하고),

[조건 2] $|f(x) - b| < \epsilon$이다.

이것을 약호로 표현하면,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \;\leftrightarrow\; (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \;\; s.t \; \exists f(x) \; 0 < |x - a| < \delta \;\rightarrow\; |f(x) - b| < \epsilon)"$$

예를 들면 프리에 급수와 같은 주기함수에 대한 적분은 일반론적인 접근법을 필요로 하고 있음으로 해서 미적분의 역사에서 중요 관심사 중의 하나였다. 리만(Bernard Riemann, 1826-1866)은 코시의 적분을 확장하였는데; 리만 적분 이론의 기초는 함수의 진동에 있었으므로 유계함수(bounded function)의 수렴성을 기초로 하는 코시적분의 엄밀성은 약화되었다. 르베크(H. Lebesque, 1875-1941)는 1900년경에 이런류의 문제를 해결하기 위하여 적분에 있어서 측도이론을 도입하였다. 르베크 적분(흔히 Lebesque-Stieltjes 적분이라고 부름)은 코시-리만적분에서 정의하는 정의역보다는 함수의 치역을 분할하는데 있었다([20]).

4. 뉴턴과 라플라스의 중력론과 모세관 현상 이론 내에서의 분자력.

뉴턴의 중력이론의 대성공은 중력이외의 분야의 수학화를 자극하였고 그 중 라플라스프로그램이 가장 고무적이었다. 18세기말과 19세기 초에 수학물리학자들은 모세관력, 전기력, 자기력, 열, 화학친화력과 빛의 굴절력을 무게 없는 입자로서 가정하고 수학화를 시도하였다. 라플라스는 중력, 빛의 굴절력 그리고 모세관력을 회전타원체의 인력이라는 관점에서 현상적으로 동일한 수학식을 적용하고 있다. 그 것은 앞서 말한 라플라스방정식이고, 천체의 섭동현상을 다루려는 목적 하에 일반적인 공식을 세웠던 것이었다. 케플러의 동경벡터를 평균곡률로 놓고, 이것을 오일러-라그랑즈식과 동치로 놓았다. 유체는 수많은 입자로 구성이 되었다고 가정하고 분자차원의 인력이 존재한다고 가정해서 거리함수 $f(r)$로 나타내어, '감지할 수 있는 거리에서는 무효하고, 감지할 수 없는 거리에서 유효함'을 이용해서 적분의 어려움을 극복한다. 라플라스는 최초로 모세관이론의 수학화에 성공한 수학물리학자이다. 그는 중력, 빛의 굴절력 그리고 모세관력을 입자의 상호이력이라는 관점에서 유비관계로 다루었다. 라플라스는 회전타원체의 작용이라는 모델을 설정하였고, 회전타원체의 작용을 이차편미분 방정식으로 표현하였다. 방정식의 해에서 생기는 상수를 용기의 모습과 접촉각과 일치를 시켰다. 이것은 접착력과 응집력의 세기의 비율을 거시적으로 나타낸 것이었다. 여러 가지 실험조건을 세워서 거리함수에 다른 분자력의 존재를 검증하였다. 그러나 분자의 크기나 모양은 아보가드로수를 알지 못했던 관계로 알 수 없었으나, 오늘날 까지 유효한 모세관이론의 기초공식을 세웠다 :

반경 r인 비눗방울의 전체표면에너지는 γ를 표면장력이라고 할 때 $w=4\pi r^2\gamma$ 이 되고, 반경이 dr 만큼 감소되면 표면에너지의 감소는 $8\pi r\gamma dr$이 된다. 따라서 표면적의 변화에 해당하는 압력차이 $\triangle P$만큼의 일의 양인 $\triangle P 4\pi r^2 dr = 8\pi r\gamma dr$이 되어

(2) $\triangle P = \dfrac{2\gamma}{r}$

이 된다. 이식은 완전구형일 경우이고,
회전타원면체일경우는

(3) $\triangle P = \gamma\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)$

또는 $\triangle P = \gamma\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right) = \gamma\left(\dfrac{1}{r_x}+\dfrac{1}{r_y}\right)$로 흔히 쓰게 되는 것이다.

이것은 간단히 증명이 된다. 비눗방울의 곡면상에서 표면적의 증가나 감소 $\triangle A = (x+dx)(y+dy) - xy = xdy + ydx + dxdy = xdy + ydx$로 쓸 수 있고, 여기서

$dxdy=0$으로 놓음으로서 생략이 되었다. 따라서 표면적이 증가하거나 감소할 때 필요한 일의 양은 $W=\gamma(xdy+ydx)$된다([9]). 여기서 γ는 표면장력으로 단위길이당의 힘(N/m)의 차원을 갖는 상수이다. 표면적의 변화는 부피변화를 가져왔으므로 여기에 해당되는 일의 양은 $W=\triangle Pxydz$가 된다. 삼각형의 닮은꼴에서,

$$\frac{x+dx}{R_1+dz}=\frac{x}{R_1} \text{ 또는 } dx=\frac{xdz}{R_1} \text{ 그리고 } \frac{x+dy}{R_2+dz}=\frac{y}{R_2} \text{ 또는 } dy=\frac{ydz}{R_2}$$

따라서 $\triangle P=\dfrac{W}{xydz}=\gamma\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)$ (3)식과 같게 된다.

영-라플라스식(Young-Laplace equation)이라고 불리는 이 식은 다음 몇 가지의 중요한 결과를 설명해 준다([32], [10]). 첫째로 비눗방울의 반경이 작을수록 압력차이 $\triangle P$가 커진다는 것이다. 둘째로 서로 다른 반경을 갖는 비눗방울이 접촉을 할 때 작은 비눗방울은 큰 비눗방울에 그 내용물을 방출해버린 다는 것이다. 즉 작은방울이 큰 방울 쪽으로 합쳐진다는 것이다. 셋째로 반경 r이 무한대로 커진다면 $\triangle P$는 무시될 수 있다는 것이다. 그래서 평평한 계면의 압력차이는 0이 된다. 네 번째로 (2)식에 의하면 모세관 현상에 의해서 나타나는 오목한 곡면의 반경 r쪽이 항상 큰 압력을 보인다는 것이고 압력차이 값은 $\triangle P=\rho gh$로 나타내다. 여기서 $\rho=$액체의 밀도, $g=$중력가속도, h는 모세관내의 액체액체가 올라가거나 내려간 높이를 말하는 것이다.

여기서 압력변화와 표면장력의 비율인 $\dfrac{\gamma}{\triangle P}$를 라플라스는 $\dfrac{H}{K}$로 기술하였고 분자력의 세기로 간주하여 개관에서 말한 것처럼 매우 큰 값임을 강조하였다. 이에 대한 전개과정을 라플라스가 취한 방법을 살펴보기로 하자. 라플라스는 모세관력은 화학 친화력이나 굴절력과 같이 감지할 수 없는 미세한 분자작용거리에서만 작용을 한다고 보았다. 라플라스는 다음과 같이 모세관내에서 형성되는 유체의 면이 오목이거나 볼록이거나에 공통적으로 적용되는 일반적인 접근을 시도한다. 유체의 작용을 구체의 인력으로 표시하고 이것으로부터의 대칭관계를 유도한 다음, 모세관 내의 유체에 적용하였고, 이것에 대한 물리적 의미를 다음과 같이 기술하고 있다.

모든 천체들은 서로서로 인력이 작용하는 무한수의 분자들의 집합체이고, 천체들의 크기는 그들 사이의 거리에 비하면 상대적으로 매우 작다. 그의 무게중심을 마치 그의 전체무게가 집중된 것처럼 한점으로 간주할 수 있다; 그러므로 이것으로서는 얼마든지 질점이 무게중심을 대체할 수 있는 물체들을 생각해 낼 수 있다...회전타원체들이 자연의 법칙속에서 할 수 있는 역할은, 만일 이것이 다른 종류의 인력 법칙속에서도 알아낼 수 있다면, 질점으로 표시 할 수 있다고 하는 것은 매우 놀랍고 신기한 것이다. 중력 법칙이란 다름이 아닌, 질량이 그의 중심에 집중된 것처럼 같은 물질로 된 구가 외부의 한점을 땡기는 것과 같다. 같은 결과가 일정한 두께로 구성된 구형의 층에도 적용이 되는 것이다; 왜냐하면 일정한 두께의 구형 층을 벗겨내면 점점 더 작은

반경의 구형들이 형성되기 때문이다([22]).

라플라스는 이 회전타원체를 구로 간주하고, 이것의 작용을 구좌표를 이용하여 포텐셜 함수로 다음과 같이 표시한다. 라플라스는 한 질점이 구체층의 무게 중심에서 r 만큼 떨어져 있고, 구체반경은 u, 분자력의 작용거리가 미칠 수 있는 두께 du를 생각했다. 각 θ 를 반경 u 와 직선거리 r 과 이루는 각이라고 하고, 그리고 ω 를 직선 u 와 반경 r 이 이루는 면이 x 축 과 이루는 각 이라고 놓았다. 구 표면(spherical surface)에서 무한소 단위 체적은 $u2dud\omega d\theta \sin\theta$ 로 표현했다. 구층 외부에 있는 점과 이 무한소 단위 체적과의 거리를 f라고 하면, 삼각형 공식에 의해서 다음 관계를 놓을 수 있다.

$$f2 = r2 - 2rucos\theta + u2$$

거리 f에 따르는 인력함수를 $\varphi(f)$로 놓고, f가 큰 거리에서는 작용하지 않는 다고 본다. 이 작용을 r 선상으로 투영시켜 주면 다음과 같이 표현할 수 있다([22. 140-141쪽]).

$$u^2 dud\omega d\theta \sin\theta \frac{r - ucos\theta}{f} \varphi(f)$$

$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{r - ucos\theta}{f}$ 의 관계에서 거리함수를 써서 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(4) \quad u^2 dud\omega d\theta \sin\theta \frac{\partial f}{\partial r} \varphi(f)$$

라플라스가 수행한 적분방식은 정적분의 형식을 취하고 있다. 우선 구와 부피소간의 인력을 $\varphi(f)$,이것을 환형태의 고리로 적분한 값을 토러스(torus)를 $\pi(f)$, 그리고 구표면 전체를 적분한 값을 $\Psi(f)$놓았다.

적분 $\int df\varphi(f)$의 값을 $C - \pi(f)$로 놓고 함수 f의 적분을 0에서 ∞까지 수행한다고 하였다. 즉 오늘날의 방식으로 쓴다면, 분자작용거리 $f = \lambda$보다 큰 거리에서의 적분값 $\pi(f) = \int_f^\infty df\varphi(f)$로 쓸 수 있고 그 값는 0 이 되는 것이다. 이것을 다시 쓴다면 다음과 같다: $C = \int_0^\infty df\varphi(f)$; $\pi(f) = \int_f^\infty df\varphi(f) = C - \int_0^f df\varphi(f)$가 되는 것이다. 즉 C값은 분자작용거리내의 적분값 $\int_0^f df\varphi(f)$만을 갖게 되는 것이다. 여기서 라플라스가 취하는 정적분의 형식은 추상적인 거리함수 $f(r)$을 힘 함수로서 취급하여 분자간의 거리를 감지할 수 없기 때문에 분자의 존재를 점으로 취급하여 실재한다고 가정함으로서 일종의 분자작용반경 내에서 만이 적분 값이 존재한다고 가정하고 있다. 이러한 방식은 라플라스물리학의 특징이자 장점이며, 알 수 없는 입자의 작용거리를 극복

하는 이론적 접근방식으로서 미지의 거리함수이자 추상적인 거리함수의 도입이라고 볼 수 있다. 바우디치는 그의 번역본에서 이점을 자세히 강조하고 있다. 라플라스는 『천체역학』 제4권 제2부록 5쪽에서 힘 함수 $\varphi(f)$와 $\pi(f)$에 대해서 엑스포넨셜 함수처럼 거동한다고 하였다. C^{-if}와 같은 것으로 C는 오늘날 초월수 e에 해당하는 것이고 라플라스는 초월 로가리즘(logarithme hyperbolique)이라고 불렀다. 라플라스는 i는 매우 큰 값을 갖는 수이고 f가 영(0) 이면 유한값을 갖고(fini lorsque f est nul) f가 무한대이면 영(0)이 된다고 하였다(nul lorsque $f$est infini). 따라서 C^{-if}는 오늘날 e^{-nx}에 해당한다고 볼 수 있다. 이 부분에 대한 해석은 바우딧치가 번역본 제4권 698쪽에 주(commentary)의 형식으로 설명하였다. 따라서 감지할 수 없는 거리에서 위의 적분값 (4) 는 다음과 같이 $\varphi(f)$에서 $\pi(f)$ 로 변환되어 간략해진다.

$u2dud\omega d\theta\sin\theta\{C-\pi(f)\}$값에서 C의 값은 거리함수 f에 무관한 상수로 되어 생략을 할 수 있는 것이다. $\pi(f)$는 양의 값을 가지며 f가 감지 할만한 거리로 커지면 급격히 감소한다. 여기서 적분구간 $f=\lambda$로 볼 수 있다. 따라서 위의 적분값(4) 는 다음과 같이 간략해진다.

(5) $$-u2dud\omega d\theta\sin\theta\pi(f)\}$$

이것을 구충 전체로 적분하기 위해서 $\omega=0$에서 $\omega=2\pi$ 까지에 이르는 원주를 따라 적분하면, 무한소층으로된 원환체(torus)를 얻게 되고, 이것은 구체층으로서 축지에서의 위도를 나타내준다. 여기서 다시 z 축으로 부터의 경사각을 나타내주는 $\theta=0$에서부터 $\theta=\pi$ 까지 적분을 해주면 구충 전체를 통한 힘의 작용이 표현된다. 삼각함수 관계로부터 $\sin\theta$와 f,u,r 의 관계는 다음과 같이 된다.

$$\sin\theta=\frac{1}{ru}f\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)$$

이것을 구층 전체로 적분하기 위해서 $\omega=0$에서 $\omega=2\pi$ 까지에 이르는 원주를 따라 적분하면, 무한소 층으로 된 원환체(torus)를 얻게 되고, 이것은 구 층으로서 축지에서의 위도를 나타내준다. 여기서 다시 z축으로 부터의 경사각을 나타내주는 $\theta=0$에서부터 $\theta=\pi$ 까지 적분을 해주면 구층 전체를 통한 힘의 작용이 표현된다. 삼각함수관계로부터 $\sin\theta$와 f,u,r의 관계는 다음과 같이 된다.

$$\sin\theta=\left(\frac{1}{ru}\right)f\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)$$

이 식을 식 (5)에 대입해 주면 다음과 같은 θ 에 대한 적분식을 얻게 해 준다.

$$-2\pi u2du\int d\theta\sin\theta\pi(f)=-2\pi\left(\frac{udu}{r}\right)\int fdf\pi(f)$$

우변의 $\int fdf\pi(f)$를 라플라스는 다시 $C'-\Psi(f)$라고 놓고, C'을 적분값으로 놓으면, f가 무한대 일 때 $\Psi(f)$는 양의 값을 갖고 값은 매우 급격히 감소한다. 즉, 이것을

다시 쓰면, $C' = \int_0^\infty fdf\pi(f)$로 놓고, $\Psi(f) = \int_f^\infty fdf\pi(f) = C' - \int_0^f fdf\pi(f)$로 된다. 분자의 작용거리 $f = \lambda$보다 큰 거리에서의 적분값 $\int_f^\infty fdf\pi(f)$은 0이 되는 것이다. 앞의 (19)식에서 (20)식으로의 적분에서 C와 마찬가지로 C'은 분자 작용거리내의 적분값$\int_0^f fdf\pi(f)$를 의미하게 되는 것이다. 여기서, $(\theta = 0, f = r - u)$이고 $(\theta = \pi, f = r + u)$인 값을 갖는다면, 적분값은 다음과 같이 된다.

$$-\frac{2\pi udu}{r}\{\Psi(r-u) - \Psi(r+u)\}$$

만일 이 함수를 r 에 대해서 미분하면, dr 의 계수는 구층의 한점에 의한 인력을 나타내준다. 만일 이것이 r 로 향하는 유체의 관(colonne)에서의 작용을 얻기 위한다면, 구체의 층 끝이 중심에서 b 만큼의 거리에 있다면 이 계수를 다시 dr 만큼 곱해 주어야 한다. 이것은 앞의 함수 그 자체를 주는데 $r = b$에서 적분을 시작하면 다시 상수를 추가해 주어야 한다. 그러므로 위의 적분값은 다음과 같이 된다.

$$(6)\quad \frac{2\pi udu}{r}\{\Psi(b-u) - \Psi(b+u)\} - \frac{2\pi udu}{r}\{\Psi(r-u) - \Psi(r+u)\}$$

b 가 매우 큰 값에서는 $(b-u)$ 는 무시할 수 있는 값이다. r 이 층의 중심에서 가장 멀리 있다고 하면 b 는 매우 큰 값을 갖게 되고, $(r+u)$ 와 $(r-u)$ 의 값은 무시할 수 있게 된다. 따라서 위의 함수는 다음과 같이 간단히 줄 일수 있게 된다.

$$\frac{2\pi udu}{r}\Psi(b-u)$$

이것은 매우 좁은 수로안에 들어 있는 유체 층의 작용을 말하고, r 방향을 따라서 층(couche)중심에서 가장 가까운 끝이 b 만큼의 거리에 있게 된다. 이 작용은 유체가 층의 인력에 의해서 받는 압력이고 수로 안쪽에서 그 방향에 수직인 면으로 작용하고 있다. $z = b - u$ 라고 놓고 변수변환을 하고, b를 구의 반지름이라 하면, 구 전체의 작용은

$$2\pi\int\frac{(b-z)}{b}dz\Psi(z)$$

$z = 0$에서 $z = b$ 까지 적분을 하면, $K - H/b$라는 적분 값을 얻게 되고, K 와 H 는 각각 다음 값을 갖는다.

$$K = 2\pi\int_0^b dz\Psi(z), H = 2\pi\int_0^b zdz\Psi(z)$$

$K + H/b$ 는 모세관 표면이 긴 관속에서 유체에 의해 형성이 된다고 했을 때 그 단면은 구형이고 볼록한 표면의 작용을 나타낸다. 오목과 볼록이 대칭이라는 점에 착안

하여 $K-H/b$ 를 오목하게 형성이 된 유체면의 작용으로 라플라스는 보았다. 여기서 b 는 구에 의해 형성되는 반원 단면의 반지름이다. K 는 형성되는 유체의 면이 평면일 경우에 유체의 작용이다. 따라서 라플라스는 H/b 를 구체의 $o-z$ 축 중앙에서 표면의 위쪽으로 유체를 끌어 올리는 힘으로 보았다.

우선 라플라스는 유체의 관 끝에 형성된 한점에서 접면하는 타원체를 생각한다. 이 구체와 타원면체가 모세관 면으로서 작용하는 데는 실질적인 차이가 없다고 보았다. 타원체의 한 축은 모세관 축과 일치한다고 본다. 튜브와 일치하는 축을 $2a$ 라고 놓으면, 나머지 다른 두축은 $2a'$ 과 $2a''$ 으로 놓을 수 있다. 첫 번째 타원의 접반경이 회전타원체와 타원체의 접촉점에서 생겨난다고 했을 때, 이 접반경(osculating radius)을 각각 b 와 b' 으로 놓는다. 같은 접촉점에서 $2a$ 축을 통해서 $2a$ 축과와 $2a'$ 축이 서로 θ 의 각을 이루면서 생기는 축 A 를 만들면, 다음과 같은 관계를 얻게 된다.

$$A^2=\frac{a'^2a''^2}{a'^2\sin^2\theta+a''^2\cos^2\theta}$$

접촉점에서 이 타원의 접반경은 $A2/a$ 가 되고, $B=A2/a$ 라고 놓으면, 유체의 관 중심축에 대해서 메니스커스의 면에 수직인 상태로 θ 의 각을 형성하면서 회전시킬 수 있는 식을 얻게 된다.

$$(7) \qquad \frac{1}{B}=a\left(\frac{1}{a''^2}sin^2\theta+\frac{1}{a'^2}cos^2\theta\right)=\frac{1}{b'}sin^2\theta+\frac{1}{b}cos^2\theta$$

접면을 이루는 회전 타원체를 자를 때마다 생겨나는 타원은 유체가 모세관력에 의한 섭동을 받아서 생긴 질량에 비례한다고 라플라스는 보았다. $d\theta$에서 생겨난 타원은 앞에서 본 구체에서 나온 원의 경우와 같다고 볼 수 있는데, 이것을 라플라스는 다음과 같이 표현 했다: $\frac{1}{2\pi}d\theta\left(K+\frac{H}{B}\right)$

따라서 수로 위에서 타원체 전체의 작용은 $d\theta$ 원주상에서 이르는 값으로 적분해야 되므로 다음 식을 세울 수 있다.

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\left(K+\frac{H}{b}cos^2\theta+\frac{H}{b'}sin^2\theta\right)=K+\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)$$

유체면이 오목하면 b 와 b' 값은 음이 되고, 유체면이 오목하거나 동시에 볼록할 경우는 접반경이 볼록할 경우에 양이 되고 접반경이 오목할 경우는 음이 된다. 두수직면에 의해서 형성된 타원체면의 접반경이 90도를 이루며, B 와 B' 이라고 표시하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\frac{1}{B}=\frac{1}{b'}sin^2\theta+\frac{1}{b}cos^2\theta\,,\ \frac{1}{B'}=\frac{1}{b'}cos^2\theta+\frac{1}{b}sin^2\theta$$

여기서 θ 를 90도 돌리면 B 는 B' 이 된다.

결국 라플라스가 유체면을 타원체로 보고서 나오는 결과는 다음의 형식이 된다

$$K+\frac{H}{2B}+\frac{H}{2B'}$$

이것을 라플라스는 이렇게 설명하고 있다.

좁은 관속에 있는 유체는 그 표면 한점에 수직인 상태로 작용이 되면, 유체의 모습이 어떠하든지 간에 그 작용은 두 회전타원체의 평균작용으로 간주해도 좋다. 단 두 회전타원체는 각각의 단면이 수직 조건을 만족하는 접반경을 가질 때 이다([23]).

라플라스는 모세관력에 의한 유체의 형상을 회전타원체와 타원체, 원과 타원, 단순곡율과 평균곡율의 관계에서 전개시킨 결과로부터 다음과 같이 오일러-라그랑즈의 표현을 써서 모세관내의 유체평형식을 세웠다. x와 y축상의 모세관내의 유체곡면상의 한점에서 최대와 최소의 접반경을 R과 R′이라고 할 때 R과 R′은 다음식의 두근에 해당한다.

(9) $R^2(rt-s^2)-R\sqrt{1+p^2+q^2}\ \{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t\}+(1+p^2+q^2)^2=0$

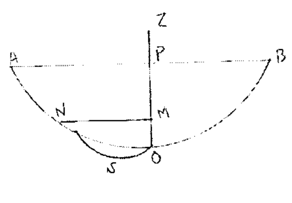
여기서 $p=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}, r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

여기서 $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t$가 오일러-라그랑즈식이고 이것을 단위 체적으로 나누어 평균곡율과 같은 값으로 놓았다.

(10) $$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}$$

모세관내의 오목한 유체의 모습을 나타내는 아래 (그림 1)에서, 라플라스는 임의의 무한소 수로(canal)를 NSO로 나타내어 다음의 평형식을 세웠다.

(11) $$K-\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+gz=K-\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)$$



(그림 1) 두 평판 사이에 형성된 유체 표면

여기서 b 와 b'은 표면의 중앙부분인 O 점에서의 최대 및 최소 접반경 이고, g 는 중력 가속도이다. N 점에서 수로를 통한 유체의 작용은 $K-\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ 이고, z 는 O에서 N 까지의 수직 높이이다. (10)식과 (11)식으로부터 다음의 평형식을 세웠다.

$$(12)\qquad \frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}+\frac{2gz}{H}$$

모세관의 유체표면미분방정식이고, 라플라스의 『천체역학』 제1부록의 19쪽에 있는 것을 바우디치의 번역서 제4권 716쪽대로 썼다. $\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}$의 변화값이 작기 때문에 상수로 취급하여, 풀어주면 모세관 표면구 평균 반경 b 값을 튜브반경과 튜브벽면에서의 접촉각 θ'이라는 물리적으로 측정이 가능한 값과 대응을 시켰다. 수학적으로는 이차편미분방정식을 적분시 나타나는 두 개의 임의의 상수를 실험적 경계조건에 맞추었다고 볼 수 있다. 이 두 값은 라플라스 상수, $\alpha=g/H$ 를 계산케 해 주었다.

라플라스는 이것을 다음과 같이 표현하였다. 튜브의 반경l을 $u=\sqrt{x^2+y^2}$ 의 극치로 하여 $l\simeq u'=bsin\theta$로 놓고 계산하면,

$$(13)\qquad b=\frac{l}{\sin\theta'}+\frac{\alpha b^2 l}{\sin\theta'}-\frac{2}{3}\frac{\alpha b^4}{lsin\theta'}+\frac{2}{3}\frac{\alpha b^4\cos^3\theta'}{lsin\theta'}\simeq$$

$$\frac{l}{\sin\theta'}+\frac{\alpha l^3}{\sin^3\theta'}-\frac{2}{3}\frac{\alpha l^3}{\sin^5\theta'}+\frac{2}{3}\frac{\alpha l^3}{\sin^5\theta'}$$

$\frac{H}{b}=gq$를 나타내므로 모세관내에서 유체가 올라가는 높이 $q=\frac{H}{gb}=\frac{1}{\alpha b}$, $\alpha=\frac{\sin\theta'}{ql}$ 이 된다. 식 (13) 의 b 값을 역으로 취해서 q 값에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$(14)\quad q=\frac{Hsin\theta'}{gl}\left\{1-\frac{l}{qsin\theta'}\left(1-\frac{2}{3}\frac{(1-\cos^3\theta')}{\sin^2\theta}\right)\right\}$$

높이 q의 첫 항만을 취해서, $\frac{l}{q}$를 무시하면,

$$(15)\qquad q=\frac{H}{g}\frac{\sin\theta'}{l}=\frac{costante}{2l}$$

라플라스가 유도한 위 공식은 『천체역학』 4권 제1부록에 있다([23의 25쪽]). 이 공식은 오늘날 우리에게 친숙한 공식 $\triangle P=\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\simeq\frac{2\gamma}{r}$ 와는 비교되고 동일한 공

식이다. 모세관 내부에서 유체의 오름과 내림에 의한 압력변화를 (12)식처럼 내재적으로 표현했기 때문이다. 그러나 『천체역학』 4권의 제2부록에서는 보다 명확하게 이 공식을 유도해내었다.

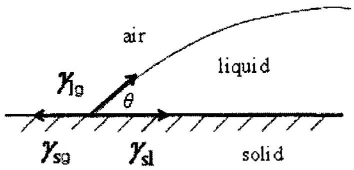
$gD(h+z)=\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$으로 표현하였다. 여기서 D는 유체의 밀도이고, h는 모세관내에서 유체의 상승이나 하강의 높이, z는 메니스커스 부분의 높이를 개략적으로 계산해서 넣은 값이다. 이에 대한 유도과정은 제1부록과 유사하다. 제1부록에서는 『천체역학』 제2권 2책과 3책을 근간으로 출발하였었다, 그러나 제2부록에서는『천체역학』 제1권 1책을 근간으로 해서 모세관의 유체표면을 3차원으로 확장해서 표현하였다. 이것은 제1부록의 방법이 구좌표계의 한점으로부터 출발해서 수로의 평형원리에 따라서 유체표면을 2차미분방정식으로 표현했으나, 제2부록에서는 처음부터 3차 방정식 꼴로 유체의 곡면식을 세웠다([24]).

$$Z=Ax^2+\lambda xy+By^2+Cx^3+Dx^2y+Exy^2+Fy^3+etc$$

여기서 $Ax^2+\lambda xy+By^2$은 접면 파라볼로이드이고, $Cx^3+Dx^2y+Exy^2+Fy^3$은 모세관내의 유체 표면식이다. 힘함수 $\varphi(f)$를 x축과 y축으로 분해해서 유체의 곡면식에 오일러 라그랑즈시과 결합을 하였다. 이 결과는 1차 부록과 같지만 오늘날의 영-라플라스식에 같은 공식이라는 측면에서 증명이 제2부록이 더 명확하다. 이 부분역시 바우디치의 번역서를 읽는 것이 이해하기가 쉽다.

제2부록의 결과$gD(h+z)=\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$는 현재의 공식 $\Delta P=\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$과 정확히 같은 꼴임을 강조한다. 여기서 z는 메니스커스 부분의 높이를 감안해서 추가한 값이다.

이어서 라플라스가 접촉각에 의한 공식의 유도를 토마스 영이 했던 방식과 같은 방식으로 유도하나, 라플라스의 증명방식은 수학적이다. 모세관내의 유체가 올라간 높이 z에 해당하는 부피 $V=\iint zdxdy=\frac{H}{2g}\iint\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)dxdy$ 로놓고, 유체의 안쪽곡면의 법선방향으로 x와 y축으로 분해해서 $V=\frac{Hs\cos i}{2g}$를 얻어냈다. 여기서 s는 듀브 단면의 원주이고, i는 접촉각, H는 표면장력이다. 이어서 라플라스는 $\cos i=\frac{2\rho' G'-\rho G}{\rho G}$의 공식을 유도해서 $\cos i$값과 동일함을 증명하였다. 여기서 ρG는 액체끼리의 인력의 크기이고, $\rho' G'$은 액체와 고체간의 이력의 크기이다. 이 공식은 낯설게 느껴지지만, 오늘날 자주 쓰는 아래 (그림2)의 접촉각공식과 동일 한 것이다.



(그림 2) 공기, 액체, 고체사이에 형성된 접촉각

(그림 2)에서, $-\gamma_{sg}+\gamma_{lg}\cos\theta+\gamma_{sl}=0$따라서 $\cos\theta=\dfrac{\gamma_{sg}-\gamma_{sl}}{\gamma_{lg}}$가 된다

(15) 식에서는 라플라스 상수 H/g 와 접촉각이 상수이므로 유체가 오르거나 내리는 높이는 모세관의 직경에 반비례한다. 라플라스는 반경이 다른 튜브를 바꾸어 가면서 물, 오렌지유, 알코홀, 수은을 이용하여 실험했다. 이 같은 기본적인 원리를 바탕으로 하여 라플라스는 다음의 실험조건에서 모세관 현상을 고찰했다.

1. 양쪽이 뚫린 원추형 모세관을 이용하여 유체의 표면작용실험.
2. 수평으로 누인 두 평판에 의해서 생기는 유체가 카테노이드이거나 비평행인 카테노이드일 경우 그 표면효과.
3. 다음 경우의 유체의 높이 변화 고찰; 같은 중심축을 가진 두 개의 실린더를 유체에 넣었을 경우, 수직으로 두 평판을 평행하게 넣었을 경우, 섞이지 않는 두 유체를 동시에 하나의 모세관에 넣을 경우.
4. 수평상태의 두 평판 사이에서의 유체의 곡율변화.
5. 다각기둥(polyprism) 내에서의 유체변화.
6. 수직평행한 두 평판의 간격 변화에 따른 유체의 인력과 반발력 조사.
7. 유체로부터 원반의 강제수직 이탈시 라플라스 상수측정.
8. 수은방울의 접자오선(tangential meridian) 각(angle) 변화를 이용한 라플라스 상수 측정.

5. 극소곡면과 모세관론

현미경으로 관찰한 계면상의 곡면은 구형이 아니라는 것이 18세기말에 관찰되었다. 여기에 대한 접근은 행성의 섭동론을 중력이론에 라플라스가 도입하였는데 뉴턴의 중력론의 확장이라 할 수 있다. 곡면의 표현을 오일러-라그랑즈 공식(17식)을 도입함으로서 극소곡면론이 모세관이론에서 파생된다. 물리적인 실험상의 모세관 이론과 극소곡면론의 접속은 19세기 내내 저명수학자들이 이 문제를 연구하게 된 요인이었다. 극소곡면의 경도상의 모든 점은 평균곡률이 零(zero)이어야하는데 실제로 계면상에서 나타나는 곡률은 영이 아니다. 오일러는 1744년 x축을 중심으로 현수선을 회전시켜서 최초의 극소곡면인 catenoide를 완성하였다. 1760년 라그랑즈는 일정한 거푸집에 의해서 생겨나는 극소곡면은 변분법에서 썼던 편미분식을 만족해야함을 증명하였다. 라그랑즈는 그래프가 최소면적을 갖기 위해서는 함수 $z=(x,y)$들을 결정해야한다고 하였다([5]).

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0$$

이어서 뫼니에는 1776년 테일러 전개식과 z를 x와 y 에 대한 편미분을 써서 곡면상의 두곡률반경을 계산하였다. 기하학적으로 다음과 같은 (16)식을 다음과 같이 변형시켜서 오늘날 오일러 라그랑즈라 부르는 식을 세웠다.

$$(17)\quad (1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$$

여기서, $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}, q=\dfrac{\partial z}{\partial y}, r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

뫼니에는 $r+t$가 영이 되기 위해서는 $q^2r-2pqs+(1+p)^2$이 영이 되어야함을 증명하였다. 오일러-라그랑즈식을 이용하여 라플라스는 두곡률반경의 평균을 $1/R+1/R'$을

$$(18)\qquad 1/R+1/R'=(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t/(1+p^2+q^2)^{3/2}$$

로 놓고 곡률 반경을 모세관 반경과 접촉각의 급수전개로 적분하여 (3)식을 얻게 되었다. 이것은 현미경을 이용하여 곡면의 측정 넓이 값을 최대한 높이려는 목적 하에서 쓰여 진 것이었다. 여러 실험조건을 변화시켜서 라플라스는 동일한 적분을 추구하였다. 이 모델은 프와송과 가우스에게 영향을 주었다. 프와송은 유체의 밀도변화를 고려했고 가우스는 변분법을 써서 에너지론적인 입장에서 해결하였다.

1796년 오일러가 실수와 허수로 구성된 복소변수(complex variable)를 이용한 함수를 사용하기 시작 하였다. 1825년 코시는 미분하고 적분할 수 있는 해석함수(ananalytic function)를 정의하였고, 이런 함수를 조화함수2)라 하였다. 복소변수로 된

함수들은 19세기중 이론과 응용에서 중요한 부분을 차지하였다([16}, [17]). 한 면을 정의된 다른 면으로 변환하는 것을 등각사상(conformal mapping)이라 하고, 변환시 각이 보존된다는 뜻이다. 1834년 독일 수학자 세르크(H. F. Scherk)는 다음과 같은 새로운 실곡면들을 결정하였는데,

1. 사각형 위에서 정의된 곡면소를 구성하여, 주기적으로 사각교차(불어 : un quadrillage de plan)가 되도록 붙여나가는 것,

2. 두 직교평면의 터널을 차례로 붙여나가는 것.

3. 카테노이드에서 헬리코이드로의 변형과정을 각단계마다 극소곡면을 만족하는 등장(isometric)변환으로 설명함.

한편 1850년대에는 스위스인 뵈링(Bjoring), 프랑스인 보네, 카타란(Catalan) 등이 복소변수를 이용한 곡면곡률의 선들을 연구하였다. 에네퍼(Enneper)와 1866년 바이어스트라스는 모든 실극소곡면들을 다음과 같이 연구하였다. 각각의 복소함수 f(u)는 다음의 점좌표들을 만족하는 극소곡면 이어야한다.

(19) $x = Re\int(1-u^2)f(u)du$

(20) $y = Re\, i\int(1+u^2)f(u)du$

(21) $z = Re\int 2uf(u)du$

쉬발츠는 평면이 아닌 사변형의 거푸집에서 나타나는 곡면들이 두 대각 꼭지점을 기준으로 대칭이라는 문제를 해석함수적으로 설명하였다.

1. 극소곡면이 직선형태를 포함한 거푸집에서 만들어지면, 직선을 기준으로 해서 대칭인 원래의 곡면은 극소곡면이다.

2. 극소곡면이 수직으로 한 평면을 만날 때 평면을 기준으로 대칭인 곡면을 연장한 곡면도 극소곡면이다.

벨기에의 물리학자 플라토(J. A. Plateau)는 액체막의 실험으로 일생을 보냈는데, 거푸집철사를 아무리 구부려도 한 비누막의 경계가 되는 것을 관찰하였다. 철사거푸집으로 카테노이드나 헬리코이드는 쉽게 만들어지는데, 수학적인 문제는 위의 몇몇 예에서와 같이 복잡하다. 공간내의 주어진 폐곡선을 경계로 하는 극소곡면을 구하는 문제가 플라토 문제라고 하고 변분법이 중요한 역할을 한다. 결론적으로 극소곡면의 식들이 초중고학생 수준에서는 난이도가 높은 대학생이상의 수준의 방정식이지만, 오늘

2) 조화함수란 주기성을 가지고 연속적으로 반복되는 함수. 예를 든다면 라플라스 방정식의 해를 들 수 있다

날 외국의 과학관이나 자연사박물관에서는 극소곡면의 모형들을 전시하고 있다.

6. 결론.

뉴튼이 다루었던 것보다도 수학적으로 높은 차원에서 라플라스는 모세관이론을 다루었고 연령적으로도 오십대의 지적인 완숙기에 이 주제에 관하여 연구했다는 특징을 가지고 있다. 이 같은 맥락에서 이 논문에서는 『천체역학』과 관련하여 모세관현상의 설명에 노력했던 라플라스의 연구를 하게 되었다. 모세관현상은 튜브내의 유체와 그 유체의 섭동인자인 튜브와의 상호관계에 의해서 설명이 되는데 이것의 올바른 수학화는 라플라스에 의하여 이루어졌고 라플라스의 이론은 가우스와 프와송의 후속연구에 직접적인 영향을 주었다. 물론 본 논문에서는 가우스와 포와송의 이론을 주제로 다루지 않았다. 가우스와 포와송의 모세관이론을 언급하는 이유는 이들의 이론이 다른 방식의 입자인력을 거리함수로 표현하였지만, 동일한 공식를 도출하였기 때문이다. 현대의 표준이론으로서 많은 수학, 물리학과 그리고 화학에서의 저자들이 라플라스의 이름을 모세관 공식에 부여하고 있다. 그러나 오늘날의 대부분의 저작에는, 토마스 영의 선취권을 인정하여 라플라스-영의 공식으로 이름을 붙이고 있다. 그러나 이 이론이 수리물리학이나 수학의 주제였던 것을 아는 사람은 많지 않다.

라플라스이론의 결론을 정리하면 다음과 같다. 라플라스는 두 가지 방법으로 그의 모세관이론을 기술하고 있다. 그의 『천체역학』 제4권에 수록된 두 부록에서의 공통점은 『천체역학』 제1권과 제2권에서 기술한 평형과 운동, 중력의 법칙과 천체무게중심의 운동 그리고 천체의 모형에서 기초이론의 가설 설정으로서 canal 의 평형원리를 이용한 점이였고, 차이점은 첫 번째 부록에서는 모세관력의 섭동에 의해서 생기는 유체의 표면을 이계편미분방정식으로 두 번째 부록에서는 삼계미분방정식으로 표현하였다는 점이다. 유체의 표면에 대한 상이한 표현방식은 최종적으로는 같은 결과를 가져왔다. 입자론적인 입장에서 라플라스는 세 가지의 유비관계를 다루었다. 중력, 빛의 굴절력 그리고 모세관력을 회전타원체의 인력(attractions des sphéroides) 이라고 하는 관점에서 현상적으로 같은 유비관계에서 다루었다. 따라서 그가 천체의 섭동현상에서 다룬 수학식을 그의 모세관이론에서 같은 방법으로 다룬 것은 지극히 자연스러운 것이었다. 회전타원면체의 인력은 중력의 일반화를 의미했고, 그 수학적인 표현이 라플라안($\nabla^2 u = 0$) 이라고 불리는 것으로서 한 점을 중심으로 한 모든 방향에서의 힘의 작용, 즉 x, y, z 축에 대한 이계편미분방정식의 합으로 되어 있다. 이렇게 해서 생겨난 것을 회전타원면체로 간주하고, 이것을 케플러의 동경벡터로 표시한 라플라스의 모세관이론은 운동과 정지를 동일시하는 달랑베르원리의 대표적인 본보기가 되었다. 케플러의 동경벡터를 다시 평균곡율로 놓고 이것을 오일러-라그랑즈식을 사용하

여 일반적인 표현을 한다. 즉, 오일러-라그랑즈식을 변분적 부피소(곡선길이의 세제곱)로 나누어 평균곡률의 합으로 놓았다3). 이것은 유체의 체적, 면적, 길이를 거리함수 f(r) 로 표현함으로서 미적분상에 제기되는 어려움을 극복하게 되는데, 라플라스는 이 거리함수를 유효화시키기 위해서 분자들 상호간의 인력이 '감지할 수 있는 거리에서는 무효이고, 감지할 수 없는 거리에서는 유효한' 을 이용해서 적분의 어려움을 극복한다. 이렇게 적분의 결과로 나오는 두 개의 임의적인 상수를 실험상의 경계조건에 맞추는데, 첫 번째의 상수는 유체를 담는 용기의 모양으로부터 결정이 되고 두 번째의 상수는 유체와 용기와의 접촉에서 생기는 접촉각이다. 정량화 된 수학적 모델을 바탕으로 8개 이상의 서로 다른 용기에 유체와 고체 유체끼리의 상호작용을 분석하였다.

이것은 뉴턴보다도 진일보된 힘의 개념, 일반화된 힘의 개념으로 라플라스, 가우스 프와송이 $\varphi(r)$또는 $f(r)$로 사용한 것이었습니다. 바로 지구나 천체들을 지배했던 그 힘은 무한의 공간으로 퍼져 나가있다: 모든 물질에서 이루어지는 궁극적인 그 이외의 힘들은 감지할 수 없는 거리에서만 나타나는 것이다. 분자의 크기는 알 수 없지만 분자간의 상호인력을 거리함수 $f(r)$로 표현하여 인력의 총합을 부정적분형태로 이끌어 낸 다음 실험조건에 이를 맞추는 방식을 취하였다. 바로 이런 이유 때문에 거리의 변분량에 따르는 법칙을 알아내기란 거의 불가능한 것이다. 그러나 감지할 수 없는 극도로 작은 거리의 접촉을 통해서 만이 일어나는 성질이라고 하는 것이 여기에 관계되는 많은 현상들을 분석해 낼 수 있도록 해 주는데 있어서 충분한 성질인 것이다

뉴턴의 중력이론은 회전타원체의 인력이라는 이론으로 맥로린을 거쳐, 18세기말에 달랑베르, 클레로, 오일러, 라그랑즈, 르장드르 등에 의해서 일반화가 시도되었다. 그 실용적 목적은 경도의 위치결정에서 행성과의 관계를 정립시키는 것 이였고, 지구가 적도상에서 구에서 벋어난 정도의 이론적인 정립에 있었다. 이 같은 18세기의 뉴턴주의자들의 꿈은 19세기 초 라플라스주의자들에 의해서 미시입자적인 인력모델로 부분적인 실현이 이루어는 바, 라플라스자신을 비롯하여, 비오, 프아송, 트레므리, 헤이와 같은 학자들에 의해서 였다. 18세기 뉴턴주의자들이 친화력를 수학화를 시도해서 그 성공이 지지부지 했다면, 라플라스주의자들은 구체적인 실험을 바탕으로 구체의 인력을 미시세계의 분자세계에 적용하여 수학화를 시도 하였다. 그 대표적인 사례가 앞서 말한 주제들이고, 그 중 모세관력(표면장력)의 측정이 본 논문의 주제라고 볼 수

3) 본 논문에서는 상세히 기술하지 않았지만, 라플라스는 케플러의 각운동량의 보존법칙을 오일러와 라그랑즈가 전개한 방식을 그대로 적용하여 『천체역학』에서 라플라스 방정식을 증명하였다. 예를 들어 케플러의 제1법칙을 힘 함수로 다음과 같이 표현한 바, $Qx-Py=\dfrac{d(xdy-ydx)}{dt^2}$ 이다. 여기서 $xdy-ydx$ 는 행성의 반경벡터가 단위시간 dt 동안에 태양을 중심으로 그리는 면적의 두 배라고 하였고, Q와 P는 힘의 성분이다. 따라서 힘 요소의 성분들을 극좌표로 변환하여 케플러의 동경벡터를 모세관 내의 유체표면상의 오일러-라그랑즈식과 결합하였다. 이 모든 과정은 오늘날의 벡터해석학의 입장에서 보면 매우 어렵게 느껴지는데, 그 이유는 벡터해석학이 19세기 말에서야 시작되었기 때문이다.

있다.

이 같은 라플라스의 모세관현상에 있어서 천문학적 사고의 미세세계에 적용은 이후 일세기 동안에 그의 제자인 프와송-베트랑-프엥카레-듀헴 의 프랑스의 전통적 학과로 이어진다. 이런 맥락에서 라플라스의 모세관론이 쓰여 지고 백년이 지난 후에 모세관이론의 대가인 피에르 뒤엠(Pierre Duhem)은 그의『물리이론의 목적과 구조』에서 뉴턴 인력의 영향보다 섭동력(모세관력)의 영향이 주목할 만하게 커지게 되어, 일만년이라는 단시간에는 아무영향도 없을 것이지만 일 억년이 지나면 큰 섭동력 때문에 태양계의 행성들이 하나로 뭉치거나 흩어져 나갈 것이라고 예측하고 있다. 18세기 말에서 19세기 초에는 라플라스, 칸트, 허셀이 천체의 운동을 화학과 관련시켜서 보려고 하였다. 라플라스는 허셀과 칸트와 더불어 가장 뛰어난 근대적 우주론을 수학적으로 시도한 사람 중의 한사람으로 거리함수를 유체와 유체끼리, 유체와 고체의 상호작용(또는 두 가지의 다른 상 사이에 작용하는 모세관현상)을 설명해 주는 편리한 도구로서 이용하였다. 이것은 여러가지의 실험조건에서의 표면장력을 나타내 주는 역할을 하게 되고, 다른 면에서는 천체의 섭동현상을 설명하려는 데 있었다.

참고로 본 논문의 주제는 아니지만, 라플라스의 후속연구를 했던 가우스와 프와송의 이론을 약술하면 다음과 같다. 역학적인 측면에서는 라플라스의 이론은 완성을 의미했기 때문에 과학사가들이 라플라스의 공식으로 불렀음은 앞서 설명한바와 같다. 그러나 개별적인 분자력의 설명방식에서는 가우스와 프와송의 방식이 더 세밀하여 두 사람의 이론을 결론에만 약술한다. 가우스의 모세관 이론의 기본적인 틀은 라플라스의 이론으로부터 출발하고 있다. 라플라스가 모세관력의 섭동에 의해서 이루어진 유체의 평형에서 이루어진 곡면식을 케플러 동경벡터를 사용한 반면, 가우스는 처음부터 에너지의 평형에 의한 계(system)로 취급하였다. 가우스는 유체와 유체, 고체와 유체 사이의 상호작용을 세분화된 개별적인 분자들 인력들의 총합과 중력위치에너지와 평형관계로 표시했다. 이것은 라플라스가 개별적인 입자들의 에너지 합을 묵시적으로 표현했던바 와는 대조적으로 명시적인 표현을 했던 것이다. 가우스는 이 인력들의 총체적인 결과를 두 가지의 6중적분식으로 세우고 발산정리를 이용하여 풀었다. 6중적분은 두 체적공간(two volume space) 사이의 상호작용을 의미하는데, 이 공간을 무한소의 원뿔로 쪼개 기준축을 따라 투영시켜 5중적분 과 4중적분으로 바꾼다. 여기서 적분값을 얻기 위해서 가우스는 분자간의 거리가 유효한 거리내에서 만의 유체면의 극소변분량만을 취했다. 이것을 다시 유체와 섭동인자가 접촉하는 점에서의 선적분으로 바꾼 다음 오일러-라그랑즈식을 써서 평균곡율로 바꾼다. 이로부터 가우스는 일정한 크기의 듀브내에서 유체가 올라가는 정도를 유체끼리의 힘과 튜브와 유체와의 힘의 비로서 수량화 시킨다.

다음으로 포아송의 이론의 핵심은 유체의 농도가 유체표면에서 변화한다는 데 있다. 300 면에 달하는 그의 방대한 저서에 비하여 라플라스나 가우스의 이론만큼 크게 평가받지 못하는 이유는 농도변화라는 그의 가정을 실험으로서 검증해내지 못했을 뿐

만 아니라, 사실상 압축을 의미하는 포아송의 가정이 불필요했기 때문이다. 그러나 N 분자간의 작용을 정적분으로 표현하는데 있어서 프리에급수의 수렴의 불가능성으로서 설명해 보인 것은 당시로서는 혁신적이고 직관적인 발상이라고 볼 수 있다. 또한 포아송은 물질의 궁극적인 실체는 분자간 인력에 있다고 보았고, 분자는 원자로 구성이 되었다고 보았다. 입자간의 인력과 반발력의 모델을 세웠고, 이에 대한 정적분을 단일한 함수로서 통합하는 것이 수리물리학의 궁극적인 목표이면서 정수라고 하였다.

19세기 초의 물리학은 1850년대의 물리학에 비해서 이론의 형식과 내용에서 완전히 통일이 이루어지지 않았고 일관성이 결여되었다. 1850년대의 물리학은 물리학의 범위와 주제가 분명하게 나뉘어졌으며, 물리학의 주제가 완전한 정의와 통일성을 갖추게 되었다. 이런 측면에서 모세관이론은 펀(Finn)과 같은 극소수의 수학자를 빼고는 물리학이나 물리화학에서 다루고 있는 주제이다. 또한 그 주제의 응용범위가 매우 넓혀져서 모세관현상만을 취급하는 교재가 많지 않지만, 질 드 젠느나 롤링선등이 미세 분자차원에서 모세관론을 다루고 있다([18], [29], [28]). 오늘날 응용되는 분야는 공학에서 고속 비행 물체의 속도 측정시나, 우주선에서의 무중력상태시(중력변화시) 액체(유체)들의 작용상태와 같은 분야가 있고, 기하학에서는 극소 곡면론을 주제로 적지 않은 논문이 나오고 있다. 물리학 에서는 표면처리나 재료분야, 화학에서는 계면반응, 흡착현상, 촉매반응, 박막기술, 금속의 상전이와 관련이 있고 생물에서는 멤브란 문제와 관련된 분자생물학의 이해와 코로이드현상에서 연구에 응용되고 있다. 당시에 이들이 천체의 형상과 관련시키거나, 분자간의 인력, 화학친화력, 온도계, 기압계, 습도계 같은 계측에서의 정밀도를 높이기 위해 행했던 것과는 매우 다른 분야로 발전되었다. 내경 1cm 이상의 마노메터에서는 모세관효과가 무시된다. 최근의 카오스이론은 전자계측이나 삼체문제 등에서 큰 발전을 이루었다. 수도꼭지의 물방울의 처음에 규칙성을 보이다가 꼭지를 약간 더 열 으면 배증된 주기를 보이다가 불규칙해진다는 연구(혼돈)나([3]), 물방울의 수면파동효과([31]), n체문제의 시뮬레이션등이 이루어졌다. 결정론적인 라플라스의 우주체계는 프엥카레이래로 카오스적인 것이 확인이 되었다. 짧은 주기를 갖는 혜성은 100~1000번 가량을 태양을 회전한 후에 사라지고 있고, 만번-십만번 가량을 태양을 회전한 후 태양계를 벋어나고 있다([30]). 아직 3체 문제에서 18개의 상수문제의 완전한 해결은 이루어지지 않았고, 이 상수들이 유체역학과 결합될 지는 미지수로 남아 있다. 그러나 오늘날 컴퓨터의 시뮬레이션은 수백 개의 천체들의 거동을 근사적으로 정확하게 예측하게 해주고 있다. 열의 분산은 불안정성을 낳는 경향이 있는 반면, 표면장력은 안정성을 만들려고 한다. 표면장력은 물질의 경계부분을 비누거품의 표면처럼 부드럽게 만들려고 한다. 표면을 거칠게 하는 데에는 에너지가 소모된다. 이러한 경향들의 균형은 결정체의 크기에 좌우된다. 분산이 주로 거시적인 과정인데 비해, 표면장력은 미시적 축적에서 가장강력하다. 정통적인 연구가들은, 표면장력의 효과가 미세하기 때문에 실용적으로 무시해도 상관없는 것으로 생각했다. 그러나 가장 미세한 축적이야 말로 결정적인 것으로 판명이 되었고, 그처럼 미세한

축적에서는 표면효과가 응고되는 물질의 분자구조에 매우 민감하다는 것이 밝혀졌다([8]). 오늘날 삼체문제는 컴퓨터 시뮬레이션에 의해서 수백개의 물체의 상호작용을 풀어내었다. 행성간의 탐사선의 궤적을 위한 실용적인 목적과 군용적 목적에서 연구가 많이 되고 있다([11]). 오늘날 한국에서 흔히 쓰는 대학의 물리화학교재를 보면 무어의 "계면"([26], [14]), 아트킨스의 "순수물질의 물리적 변환에서 물리적 액체표면"에서 모세관이론을 다루지만 역사적으로 수학물리나 기하학자들의 관심사나 복잡한 수학적 증명이나 논증에 대한 내용은 생략이 되어있다. 따라서 19세기 초 모세관이론이 수학과 역학의 중요연구주제, 엄밀히 말해서 수리물리학의 연구주제였던 것을 아는 사람이 많지 않다.

오늘날의 모세관이론은 19세기말의 열역학의 이론에 영향을 받아서 발전이 되어왔다. 사실 수학적인 엄밀성의 부족함에도 불구하고, 라플라스나 가우스 프와송이 세워논 분자 인력 모델은 현대 이론에 매우 가깝다. 세 사람 모두 입자론적인 견지에서 모세관이론을 다루었다. 역설적이지만 오늘날에 분자, 원자, 핵자, 전자, 뉴트리노와 같은 어떠한 소립자들이건 간에 입자와 그들 사이의 거리의 개념은 비슷하게 적용이 되기 때문이다. 물론 라플라스나, 가우스, 포아송의 분자인력모델은 구시대의 옛 모델로서 오늘날은 다르게 발전을 하였다. 이것은 질점 사이의 작용을 거리함수로 표현하여 당시로서는 알아내기가 불가능했든 분자간의 거리를 극복했기 때문이기도 하지만, 모델화, 이론화, 정량화라는 시도가 모세관론에서 성공을 거두었기 때문이다. 이와 같이 모세관이론처럼 수학화의 시도가 성공한 예는 많지가 않다. 20세기에 양자이론이 도입되고서야 모세관이론에서 완전한 성공이 이루어 진 데에는 라플라스 같은 뛰어난 수학물리학자의 공헌을 간과할 수 없다.

참고 문헌

1. 박창균, 수학에서 '모더니즘'의 전개와 이에 대한 성찰 -18세기를 중심으로-, 한국수학사학지, 17(2004)No. 4, 17-26.
2. C. B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, 1959; 한국어 번역판, 김경화 옮김, 미적분학사-그 개념의 발달, 교우사, 2004.
3. 요아킴 부불라트지음, 영영록옮김, 카오스와 코스모스, 생각의 나무, 2003, 155-156.
4. 이성헌 저, 세계수학사 및 수학교육법, 교학연구사, 1984, 109-111.
5. 이호중, 모세관 이론에서의 수학과 물리학의 역사적 관계, 대한수학교육학회 추계학술대회논집(춘천교대, 2002).
6. 박세희 역, 모리스 크라인 저, 수학의 확실성, 민음사, 1984, 3장; *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, 1980.
7. 토마스 쿤, 물리과학의 성립에 있어서 수학적 전통과 실험적 전통, 김영식 편, 역사속의 과학(창작과 비평사, 1982)8장; 원본: *Mathematical versus Experimental Tradition in Development of Physical Science*, Journal of Interdisciplinary History 7(1976)1-31.
8. 제임스 글리크지음, 박배식과 성하운 옮김, 카오스, 동문사, 1993, 373.
9. Arthur W. Adamson, *Physical Chemistry of Surface*, 1967, 5-6.
10. Arthur W. Adamson and Alice P. Gast, *Physical Chemistry of Surface*, 1997, 4-43.
11. Kathleen T. Alligood & al, Chaos: *An Introduction to Dynamical System*, Springer-Verlag, 1997, 46-49 et 225.
12. F. J. Almgren, Jr., and Jean E. Taylor, *The Geometry of Soap Films and Soap Bubbles*, Scientific American, Vol. 235(July 1976)82-93.
13. Kirsti Anderson, *Calculus*, W. F. Bynum, Dictionary of The History of Science, Princeton University Press, 1981, 48-49.
14. P. W. Atkins, *Physical Chemistry*, Oxford University Press, 1998, 141-158.
15. H. J. M. Bos, *Differentials, Higher-order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus*, Archive for History of Exact Sciences, 14(1974)1-90.
16. Jean Brette, *Film de savon à l'ordinateur: la chasse aux surface minimales*, Revue du palais de la découverte, Vol 18. N° 175-176(Février-mars, 1990) 54. Vol 18 N° 173(Decémbre, 1989)44.
17. M. J. Callahan, D. Hoffman and J. T. Hoffman, *Computer Graphics Tools for*

the Study of Minimal Surface, Comm. of ACM, Vol. 31, No6(1988).

18. Pierre de Gillles de Gennes, *Capillarity wetting Phenomenes: Drops, Bubbles, Pears, Waves*, Springer, 2003.
19. I. Grattan-Guinness, *Convolutions in French Mathematics* vol. 1, Birkhauser Verlag, 1990, 51.
20. I. Grattan-Guinness, *From the Calculus to Set Theory 1630-1910*, 1980.
21. T. Hawkins, *Lebesque's Theory of Integration. Its Origins and Development*, Madison, 1970.
22. P. S. Laplace, *Mécanique céleste*, vol I, 1799, 135-140.
23. P. S. Laplace, *Mécanique céleste*, vol IV, 1805, 1er supplément, 18, et 25.
24. P. S. Laplace, *Mécanique céleste*, vol. IV, 1805, 2ème supplément, 3-4 et p. 74.
25. J. G. May, *Capillarity*, W. F. Bynum, Dictionary of the History of Science, Princeton University, 1981.
26. W. J. Moore, *Physical chemistry*, 4th ed, Prenice-Hall Int., 1978, 477-478.
27. James R. Newman, *Laplace*, Scientific American, June, 1954.
28. J. S. Rowlinson, *Molecular Theory of Capillarity*, Dover ed, 2003, xii, et 19.
29. J. S. Rowlinson, *Cohesion: A Scientific History of Intermolecular Force*, Cambridge University Press, 2005.
30. Mauri Valtonen and Hannu Karttunen, *The Three-Body Problem*, Cambridge Unniversity Press, 2006, 8.
31. Andreas Wilkens et Al, Translated by David Auerbach and Jenniper Greene, *Understanding Water*, Floris Books, 2002.
32. David E. Yount, *Surface Tension of Bubble and Microbubble Nuclei*, Encyclopedia of Surface and Colloid Science Vol 4, Marcel Dekker, 2002, 5132-5145.

Theory of Capillarity of Laplace and birth of Mathematical physics

Dept. of Physics, Suwon University **Ho Joong Lee**

The success of Newton's Gravitational Theory has influenced the theory of capillarity, beginning in the early nineteenth century, by providing a major model of molecular attraction. He used the equation of the attraction of spheroids, which is expressed by second order partial differential equations, to utilize this analogy as the same kind of a particle's force, between gravitational, refractive force of light, and capillarity. The solution of the differential equation corresponds to the geometrical figure of the vessel and the contact angle which is made by the fluid. Unknown abstract functions $\varphi(f)$ represent interaction forces between molecules, giving their potential functions. By conducting several kinds of experimental conditions, it was found that the height of the ascending fluid in the tube is inversely proportional to the rayon of the tube or the distance of the plate. This model is an essential element in the theory of capillarity. Laplace has brought Newtonian mechanics to completion, which relates to the standard model of gravitational theory. Laplace-Young's equation of capillarity is applicable to minimal surfaces in mathematics, to surface tensional phenomena in physics, and to soap bubble experiments.

Key words : gravitational theory, molecular attractions, surface tension, minimal surfaces, capillarity, attraction of spheroids, partial differential equations.

2000 Mathematical Subject Classification : 31-03, 01A55, 35L20

ZDM Subject Classification : A30, D20

접수일 : 2008년 5월 28일 수정일 : 2008년 6월 29일 게재확정일 : 2008년 7월 5일