대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.3, 397-408. Sep. 2007

수학 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 방법[1)]

나 귀 수* · 이 경 화** · 한 대 희* · 송 상 헌***

본 연구에서는 학교에서 조건부 확률 개념을 학습하지 않은 6학년(12세) 수학 영재 학생들이 조건부 확률 문제를 어떻게 해결하는가를 사례 연구를 통해 보고하고자 한다. 본 연구에서는 3명의 영재 학생들에게 9개의 조건부 확률 문제를 제시하였으며, 이 문제들에 대한 영재 학생들의 문제해결 과정과 방법을 세밀한 관찰과 면담을 통해 확인하였다. 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 방법을 1차 분석 기준인 Jones et al.(1999)의 사고 특성과 본 연구자들이 설정한 2차 분석 기준에 의해 범주화하였다. 또한 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결에서 나타난 공통된 특징과 질적으로 다른 차이점을 분석하였다. 본 연구 결과, 영재 학생들의 문제해결 방법은 3가지로 범주화되었으며, 각각의 영재 학생은 문제에 포함된 맥락에 따라 서로 다른 범주의 문제해결 방법을 활용하는 것을 확인할 수 있었다.

Ⅰ. 들어가며

수학 영재 학생에 대한 정의는 연구자에 따라 매우 다양하며, 아직까지도 합의된 정의는 존재하지 않는다(Bluton, 1983; Miller, 1990; Gagne, 1991). 본 연구에서는 Gagne(1991)의 정의를 적용하여 "뛰어난 능력을 가지고 있어서 훌륭한 성취를 보일 가능성이 있다고 전문가에 의해 판별된 학생"을 수학 영재 학생으로 정의하기로 한다. Renzulli & Reis(1986)은 영재성이 평균 이상의 지적 능력, 과제 집착력, 창의성이라는 세 가지 요인의 상호작용의 결과로 나타나며, 이것들은 인성과 환경의 영향을 받는다고 주장하였다.

수학 영재 학생의 사고 특성을 관찰하고 분석한 연구에 따르면(Krutetskii, 1976; Sriraman, 2003; Lee, 2005), 영재 학생들의 문제해결과 추론은 속도와 깊이의 측면에서 일반 학생들과 매우 다르게 나타난다. Krutetskii(1976)는 수학 영재 학생들이 수학적 사실을 형식화하여 인식하며 문제의 형식과 구조를 파악하는 능력이 뛰어남을 확인하였다. Lee(2005)는 영재 학생들이 실제적 추론(practical reasoning), 체계적 추론(systemic reasoning)을 거쳐서 수학적인 형식을 갖춘 지적인 추론(intellectual reasoning) 단계로 나아가려고 노력하는 과정을 확인하였다.

Freudenthal(1973)은 확률론의 역사 분석을 통해 확률 문제를 수학적으로 정확하게 해결하는 것이 매우 어려운 일임을 주장하였다. 확률적

* 청주교대(gsna21@cje.ac.kr, handh@cje.ac.kr)
** 교원대(khmath@knue.ac.kr)
*** 경인교대(shsong@ginue.ac.kr)
1) 이 논문은 2005년도 정부 재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2005-079-BS0123)을 받아 연구되었음.

사고의 특성에 관한 연구(e.g., Hari, 2003; Iasonas & Thekla, 2003)에서는 확률적 사고와 다른 수학적 사고의 차이점, 학생들의 오개념과 발달 경로 등을 보고하였다. 확률과 관련된 문제들 중에서도 특히 조건부 확률 문제는 학생들이 이해하기 어려운 분야로 알려져 왔다(e.g., Tversky & Kahneman, 1983; Shaughnessy, 1992; Jones et al., 1999). Shaughnessy(1992)는 조건부 확률과 관련하여 학생들이 사건의 종속성과 사건의 순서성을 혼동하는 오개념을 보고하였다. Tversky & Kahneman(1983)은 조건부 확률에서 두 사건을 연결하는 연결사(conjunction)와 관련된 오개념을 보고하였다.

그러나 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결에 대한 연구는 거의 이루어지지 않았다. 특히 조건부 확률 개념이나 Bayes 공식을 학습하지 않은 영재 학생들이 조건부 확률 문제를 어떻게 해결하는가에 대한 연구는 전혀 이루어지지 않았다.

본 논문에서는 조건부 확률 개념이나 Bayes 공식을 학습하지 않은 6학년인 3명의 수학 영재 학생에 대한 사례 연구를 통하여 수학 영재 학생들이 조건부 확률 문제해결에서 보이는 특징을 세밀하게 분석하고자 한다. 본 논문의 연구 문제를 구체적으로 진술하면 다음과 같다.

(1) 조건부 확률 개념을 학습하지 않은 영재 학생들이 조건부 확률 문제해결에서 보이는 사고 특성은 어떻게 범주화될 수 있는가?

(2) 조건부 확률 개념을 학습하지 않은 영재 학생들이 조건부 확률 문제해결에서 보이는 질적으로 다른 차이점은 무엇인가?

(3) 조건부 확률 개념을 학습하지 않은 영재 학생들이 조건부 확률 문제해결에서 보이는 공통적인 특징은 무엇인가?

본 논문에서는 또한 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 과정과 그 특징을 세밀하게 분석함으로써 영재 교육에의 시사점을 얻고자 한다.

II. 이론적 틀

본 논문에서는 초등학교 수학 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결의 특징을 범주화하기 위하여 Jones et al.(1999)이 제시한 조건부 확률 사고 특성을 1차적인 분석 도구로 활용하였다. Jones et al.(1999)은 학생들의 조건부 확률에서의 사고 특성을 주관적 수준(subjective level), 전환적 수준(transitional level), 비형식적 양적 수준(informal quantitative level), 수치적 수준(numerical level)의 네 수준으로 구분하였다.

이하에서는 다음의 문제를 예로 들어, 주관적 수준, 전환적 수준, 비형식적 양적 수준, 수치적 수준 각각에 대해 설명하기로 한다.

> 상자 안에 초록색 곰 인형 4마리, 빨간색 곰 인형 3마리, 노란색 곰 인형 2마리가 들어있다. 눈을 감고, 이 상자에서 곰 인형 1개를 꺼냈을 때 빨간색이었다. 꺼낸 곰 인형을 상자에 도로 넣지 않고, 다시 한 번 곰 인형 1개를 꺼내었더니 역시 빨간색이었다. 꺼낸 곰 인형을 상자에 도로 넣지 않고, 다시 한 번 곰 인형 1개를 꺼낼 때, 빨간색 곰 인형을 뽑을 확률은 얼마인가? 왜 그런가? 초록색 곰 인형을 얻게 될 확률은 얼마인가? 왜 그런가? 노란색 곰 인형을 얻게 될 확률은 얼마인가? 왜 그런가? 각각의 문제를 숫자를 사용해 설명해 보아라.

- 주관적 수준(1수준)

이 수준의 학생들은 주관적이거나 비양적인 사고를 한다. 위의 문제에 대하여 주관적 수준(1수준)에 속하는 학생들은 "빨간색 곰 인형은 1개라서 10%이다. 노란색 곰 인형은 5%, 초록색 곰

인형은 개수가 많으므로 100%이다"와 같은 응답을 할 것이다. 주관적 수준의 학생들은, 1차 시행 전에 결과의 완전한 목록을 제시해 주어도, 한 차례 시행 후 결과의 완전한 목록을 제시하지 못한다. 또한 비복원(nonreplacement) 상황에서 확실한 사건이 발생할 때와 불가능한 사건이 발생할 때를 인식할 수 있는 정도의 사고를 한다.

- 전환적 수준(2수준)

이 수준의 이 수준은 주관적 사고에서 양적 사고로 이행하는 과도기적 단계이다. 제한적이고 비체계적인 전략을 사용하며, 수량적 판단에 기초하여 사건의 결과를 예측하기도 하지만 주관적 판단으로 돌아가기도 한다.

전환적 수준에 있는 학생은 위의 문제에 대하여 "초록색 곰 인형이 가장 많고, 노란색 곰 인형이 중간이고, 빨간색 곰 인형이 가장 적다. 숫자를 이용한 설명은 잘 모르겠다"라고 답할 것이다. 이 수준의 학생들은 비복원 상황에서 일부 사건의 확률이 바뀌는 것을 인식하지만, 그 인식이 불완전하다는 특성을 보인다.

- 비형식적 양적 수준(3수준)

이 수준은 비형식적인 양적 사고를 이용하는 단계이다. 일관된 수량적 판단에 기초해 확률 비교가 가능하다. 그러나 확률값을 표현할 때, '덜, 더, 똑같은 4개 중 1개' 등과 같은 비형식적인 용어를 이용한다. 조건부 확률과 관련하여 비복원 상황을 이해하며 변화된 확률량(probability measure)을 결정할 수 있으며, 비복원 상황에서 모든 사건의 확률이 변한다는 것을 인식할 수 있다.

비형식적 양적 수준에 속하는 어떤 학생은 위의 문제에 대해 "곰 인형이 모두 합쳐서 7마리인데 빨간색 곰 인형은 1마리, 초록색 곰 인형은 4마리, 노란색 곰 인형은 2마리가 있다. 그래서 초록색 곰 인형을 얻게 될 확률이 가장 높고, 빨간색이 가장 낮다"라고 대답할 것이다. 이 학생은 형식적인 수학적 표현을 사용하지는 않았지만 양적이고 타당하다고 할 수 있다.

- 수치적 수준(4수준)

이 수준은 타당한 수치적 사고를 하는 단계이다. 종속사건과 독립사건을 구별할 수 있으며, 수치적 확률값을 이용하여 결과를 정당화할 수 있다. 이 수준에 속하는 학생은 위의 문제에 대해 "초록색 곰 인형은 $\frac{4}{7}$, 빨간색 곰 인형은 $\frac{1}{7}$, 노란색 곰 인형은 $\frac{2}{7}$의 확률이다"라고 답할 것이다.

<표Ⅱ-1> 조건부 확률 사고 특성(Jones et al., 1999, p.489)

수준	사고 특성
제1수준: 주관적 수준 (Subjective)	• 1차 시행 전에 결과의 완전한 목록을 제시해 주어도, 한 차례 시행 후 결과의 완전한 목록을 제시하지 못함. • 비복원 상황에서 확실한 사건이 발생할 때와 불가능한 사건이 발생할 때를 인식함.
제2수준: 전환적 수준 (Transitional)	• 비복원 상황에서 일부 사건의 확률이 바뀌는 것을 인식함. 그러나 그 인식이 불완전하고, 대체로 이전에 발생했던 사건에 제한되어 있음.
제3수준: 비형식적 양적 수준 (Informal Quantitative)	• 비복원 상황에서 변화한 확률량(probability measure)을 결정할 수 있음. • 비복원 상황에서 모든 사건의 확률이 변한다는 것을 인식함.
제4수준: 수치적 수준 (Numerical)	• 복원 상황과 비복원 상황에서 수치적 확률값을 구하고, 수치적 확률값을 이용하여 결과를 정당화할 수 있음. • 종속사건과 독립사건을 구별함.

이상에서 기술한 Jones et al.(1999)의 조건부 확률 사고 특성의 네 수준을 위에서 제시된 예시 문제와 관련하여 정리하면 다음의 <표Ⅱ-1> 과 같다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

연구 대상은 6학년(12세) 학생 3명이며, 이들은 모두 대한민국의 중소도시에 위치한 C대학 부설 영재교육원에서 수학 영재 교육을 받고 있는 학생들이다. C대학에서는 단답형 문항을 중심으로 하는 1차 지필 시험, 서술형 문항을 중심으로 하는 2차 지필 시험, 그리고 3차 심층 면접 시험을 통해 수학 영재 학생들을 선발한다. C대학의 영재 선발은 수학교육 전문가인 C대학의 수학교육과 교수들에 의해 관리되며, Renzulli & Reis(1986)가 영재성의 요인으로 규정한 높은 지적 능력, 과제 집착력, 창의성 등을 확인하는 것에 초점이 있다. 따라서 본 연구에 참여한 3명의 학생들은 "C대학의 수학교육 전문가들에 의해 수학적으로 탁월한 성취를 보일 잠재적 가능성을 가진 것으로 확인된(c.f., Gagne, 1991)" 수학 영재 학생이라고 할 수 있다.

국가 수준의 교육과정을 운영하고 있는 대한민국에서는 기본적인 확률 개념은 6학년(12세)에서, 조건부 확률 개념은 11학년(16세)에서 다루고 있다. 따라서 3명의 영재 학생들은 학교에서 기본적인 확률 개념은 학습했지만, 조건부 확률 개념은 학교에서 학습하지 않았다. 한편, 3명의 영재 학생들이 학교가 아닌 사교육 기관에서 조건부 확률 개념을 선행 학습했을 가능성을 염려하여 3명의 영재 학생들이 가지고 있는 사전 지식의 정도를 조사하였다. 그 결과 본 연구에 참여한 3명의 영재 학생들은 기본적인 확률 개념은 이해하고 있었지만 조건부 확률 개념은 전혀 학습하지 않은 상태인 것으로 나타났다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구에서는 3명의 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 방법과 과정을 조사하는 것을 목적으로 하였으므로, 연구 방법론에 있어서 사례 연구 방법을 활용하였다.

사례 연구는 연구의 어떤 측면을 기준으로 하는가에 따라 다양하게 구분될 수 있다. Yin(1984)은 사례 연구의 유형을 연구 목적이나 연구 결과를 기준으로 하여 개발적 사례 연구(exploratory case study), 기술적 사례 연구(descriptive case study), 설명적 사례 연구(explanatory case study)로 구분하였다. Lijphart (1971)는 사례 연구를 연구의 목적과 논리적 지향성을 기준으로 하여 비논리적 사례 연구, 해석적 사례 연구, 가설 발견 사례 연구, 이론 확인 사례 연구, 이론 부인 사례 연구, 일탈 사례 연구 등의 6가지로 구분하였다. 또한, Creswell (1998)은 사례 연구의 자료 분석 방법을 사례내 자료 분석(within-case analysis)과 사례간 자료 분석(cross-case analysis)으로 구분하였다(우정호 외, 2006에서 재인용).

사례 연구에 대한 위의 분류 방식에 따라 본 연구를 특징지으면, 본 연구는 특정 사례를 어떤 이론적인 측면, 즉 Jones et al.(1999)의 조건부 확률 사고 특성에 근거해서 기술하고 해석한다는 측면에서 기술적 사례 연구와 해석적 사례 연구 유형을 절충하고 있다고 할 수 있다. 또한, 본 논문에서는 3명의 영재 학생들의 문제해결 방법을 서로 비교함으로써 사례간 분석을 실시하였으며, 이는 영재 학생들의 문제해결 방법에서의 질적으로 다른 차이점을 분석

하고자 한 연구 문제 (2)와 관련된다. 또한, 본 논문에서는 영재 학생 각각의 9개의 문제에 대한 해결 방법을 자체 내에서 분석함으로써 사례내 분석을 실시하였으며, 이는 영재 학생들의 문제해결 방법에서의 공통적인 특징을 분석하고자 한 연구 문제 (3)과 관련된다.

본 연구는 3시간에 해당하는 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 과정을 분석한 것이다. 본 연구에서는 3명의 영재 학생들에게 조건부 확률과 관련된 9개의 문제를 제시하고, 영재 학생들 스스로 문제를 이해하고 해결하도록 하였다. 또한 문제를 해결한 후에는 문제해결 과정을 자세히 설명하도록 하였고, 영재 학생들의 문제해결 과정에 대한 더욱 상세한 정보가 필요한 경우에는 심층 면담을 실시하였다.

연구자들 중의 1명이 3시간 동안의 문제해결 시간을 운영하면서 현장 일지를 작성했다. 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 과정을 자세히 관찰하고 기록하기 위하여, 3명의 연구 보조원이 각각 1명의 영재 학생을 담당하여 영재 학생의 문제해결 전 과정을 관찰하고 상세한 관찰 기록지를 작성하였다. 연구 보조원의 관찰 기록지는 연구자들이 사전에 합의한 반구조화된 체크리스트에 근거해서 작성되었으며, 체크리스트는 Jones et al.(1999)의 조건부 확률 사고 특성에 근거하였다. 이는 연구 보조원들이 작성한 관찰 기록지가 연구 보조원 개인의 편향성에 의존하는 것을 방지하기 위해서였다.

연구자와 연구 보조원은 영재 학생들의 문제해결에 전혀 간여하지 않았으며, 문제해결과 관련된 어떠한 힌트도 제공하지 않았다. 따라서 본 연구에서 보고되는 수학 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결의 특징은, 조건부 확률 개념을 학교에서 형식적으로 학습하지 않은 영재 학생들이 문제를 스스로 이해하고 사건의 종속성을 파악하고 조건부 확률의 값을 구하는 과정에 근거한 것이라고 할 수 있다.

3. 자료 수집 및 자료 분석

본 연구의 자료 수집 및 자료 분석은 2006년 10월~12월에 이루어졌다. 본 연구에서는 자료 수집 및 자료 분석에서의 신뢰성을 확보하기 위하여 학생들의 문제해결과 심층 면담의 과정을 비디오와 오디오로 기록하였다. 본 연구의 결과 분석은, 영재 학생들의 문제해결 기록지, 연구자의 현장 일지, 보조 교사의 관찰 기록지, 비디오와 오디오 녹화 자료 등의 다양한 출처로부터의 자료를 활용하였다. 이와 같이 다양한 출처의 자료들을 활용한 것은, 자료의 triangulation을 추구한 것으로서 사례 연구로서의 본 연구 결과의 타당성을 높이기 위한 것이다.

자료 분석에서는 특정 연구자가 가질 수도 있는 개인적 편향성의 문제를 극복하기 위하여, 연구 보조원들이 작성한 관찰 기록지를 토대로 연구자 3명(A, B, C)이 합의에 도달할 때까지 영재 학생들의 문제해결의 특징을 계속해서 분석하였다.

4. 과제

본 연구에서는 9개의 조건부 확률 문제, Q1, Q2, Q3, ⋯, Q9을 영재 학생들에게 제시하였다. 지면 관계상 9개의 조건부 확률 문제를 모두 제시할 수는 없으므로, 여기에서는 대표적인 문제 5개를 제시하기로 한다.

[Q2] 박스 안에 1에서 10까지의 숫자가 적힌 10장의 카드가 있다. 이 박스에서 임의로 카드 1장을 꺼냈더니 10의 약수가 나왔다. 이 때, 이 수가 짝수일 확률을 구하여라.

[Q3-Q4] 주머니에 흰색 공 3개와 검은색 공 3개가 들어있다. 공을 하나 꺼낸 후 집어

넣지 않고 다시 공을 꺼낸다.

[Q3] 첫 번째 뽑은 공이 흰색일 때, 두 번째 뽑은 공이 흰색일 확률을 구하여라.

[Q4] 두 번째 뽑은 공이 흰색일 때, 첫 번째 뽑은 공이 흰색일 확률을 구하여라.

[Q5] A, B 두 회사에서 생산한 공 CD가 각각 100개씩 모두 200개 있다. 이 중에서 불량품은 A 회사의 제품이 2개, B 회사의 제품이 3개이다. 공CD 200개 중에서 3개를 꺼내었는데 불량품이 한 개 나왔다. 이 불량품이 A 회사의 제품일 확률을 구하여라.

[Q7] 어떤 의사가 암에 걸린 사람을 암에 걸렸다고 진단할 확률은 98%이고, 암에 걸리지 않은 사람을 암에 걸리지 않았다고 진단할 확률은 92%라고 한다. 이 의사가 실제로 암에 걸린 사람 400명과 실제로 암에 걸리지 않은 사람 600명을 진찰한다고 하자. 이 의사가 1000명 중 임의의 한 사람을 택하여 암에 걸렸다고 진단했을 때, 그 사람이 실제로 암에 걸렸을 확률을 구하여라.

Ⅳ. 결과 및 논의

1. 연구 문제 1: 영재 학생들의 문제해결 방법의 범주화

본 연구에서는 Jones et al.(1999)의 조건부 확률 사고 특성을 1차 분석 도구로 활용하였다. 본 연구에서 Jones et al.(1999)의 조건부 확률 사고 특성을 1차 분석 도구로 활용한 이유는, Jones et al.(1999)의 연구 결과를 확장하여 본 연구에 적용할 것으로 기대하였기 때문이다. 또한, 연구자들이 본 연구를 수행할 당시 조건부 확률 사고 특성 및 사고 수준과 관련되어 참고할 수 있는 선행 연구가 Jones et al.(1999)의 연구 이외에는 거의 없는 상태였기 때문이다.

그러나 실제로 3명의 영재 학생의 조건부 확률 문제해결 방법을 분석한 결과, Jones et al.(1999)이 제시한 틀이 영재 학생들의 문제해결 방법을 분석하기에 적절하지 않은 것으로 나타났다. 그 이유는 Jones et al.(1999)의 사고 특성이 조건부 확률과 관련된 다양한 맥락 중에서도 주로 비복원 상황을 중심으로 하고 있기 때문이었다. 반면에 본 연구에서는 비복원 상황 이외에도 조건부 확률과 관련된 다양한 맥락을 포함하는 과제들을 영재 학생들에게 제시하였다.

이와 같은 이유로 인해, 본 연구자들은 9개의 조건부 확률 문제에 대해 3명의 영재 학생들이 나타낸 문제해결 방법에 근거하여 2차 분석 카테고리인 C1, C2, C3를 도출하였다. 예를 들어, "X라는 사건이 발생했을 때 Y라는 사건이 발생할 확률을 구하여라"는 문제에 대해, C1, C2, C3에 해당하는 문제해결 방법은 다음과 같다.

- C1: 조건이 되는 사건 X를 무시하고 사건 Y만을 고려하여 확률값 P(Y)를 구함.
- C2: 사건 X와 사건 Y가 동시에 발생할 확률인 $P(X \cap Y)$를 구함.
- C3: 조건부 확률 P(Y|X)의 값을 정확하게 구하고 그 이유를 수학적으로 타당하게 제시함. (여기에서 P(Y|X)는 사건 A가 발생했다는 조건 하에 사건 B가 발생할 조건부 확률을 의미하는 수학 기호임)

위에서 C1과 C2는 문제에 포함된 사건의 종속성을 파악하지 못한 상태로서 Jones et al.(1999)의 4수준에는 도달하지 못한 수준이다. 그러나 C1과 C2에 해당하는 문제해결 방법이 Jones et al.(1999)의 1, 2, 3수준의 어느 하나에 속한다고 말하기는 어렵다. 오히려, C1과 C2는 Jones et al.(1999)의 3수준과 4수준 사이에 해당한다고 말하는 것이 적절하다. C3은 사건의 종속성을 인식하고 조건부 확률의 값을 정확하게 구하고 타당한 수학적 설명을 제시할 수 있는

단계로서 Jones et al.(1999)의 4수준에 해당한다.

3명의 수학 영재 학생 ES1, ES2, ES3이 9개의 조건부 확률 문제(Q1, Q2, Q3, …, Q9)에 대해 나타낸 문제해결 방법을 1차 분석 기준인 Jones et al.(1999)의 사고 특성과 2차 분석 기준인 C1, C2, C3에 따라 분류하면 <표Ⅳ-1>와 같다. <표Ⅳ-1>에서 '3~4 수준'은 Jones et al.(1999)의 3수준과 4수준 사이를 의미한다.

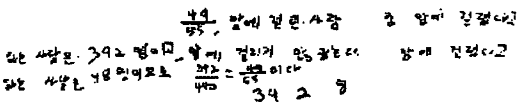
2. 연구 문제 2: 영재 학생들의 문제해결에서의 질적인 차이점

3명의 영재 학생들은 조건부 확률 문제해결에서 질적인 차이점을 나타냈다(<표Ⅳ-1> 참고). ES1은 문제에 대해 빠르게 접근하고 문제에 대한 답을 제시하는 속도는 매우 빨랐지만, 문제를 이해하고 정확한 답을 구하는 데에 있어서는 미흡하였다. ES1은 문제에 내포된 사건의 종속성을 파악하지 못하고 학교에서 이미 학습한 기본적인 확률 개념을 적용하여 문제를 해결하고자 시도하였다. ES1은 9개 중에서 8개의 문제에 대해 사건의 종속성을 인식하지 못하고 C1이나 C2에 해당하는 문제해결 방법을 에도 불구하고 이전에 학습한 수학 개념을 무리하게 적용하려고 시도한 것이다.

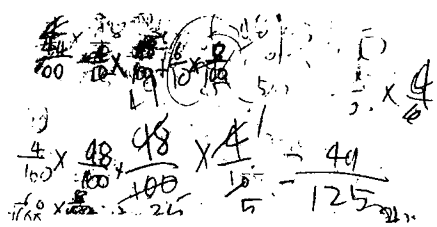
반면에, ES2와 ES3는 9개 중에서 6~7개의 문제에 대해 학교에서 학습한 기본적 확률 개념을 적용하는 대신에 문제에 내포된 사건의 종속성을 파악하여 문제를 해결하였다.

그러나 ES2와 ES3가 사건의 종속성을 인식하여 조건부 확률값을 구할 수 있는 문제들의 맥락은 약간 차이가 났다. ES2와 ES3은 [Q1], [Q3], [Q5], [Q8], [Q9]에서는 조건부 확률값을 정확하게 구했지만, [Q2], [Q4], [Q6], [Q7]에서는 사건의 종속성을 서로 다르게 인식하였다(<표Ⅳ-1> 참고). 예를 들어, [Q7]에서 ES2는 C3에 해당하는 문제해결 방법을 나타냈지만, ES3은 C2에 해당하는 문제해결 방법을 나타냈다. [Q7]에 대한 ES2와 ES3의 문제해결 방법은 다음과 같다.

ES2[Q7]:



ES2[Q7]:



<표Ⅳ-1> 수학 영재 학생의 조건부 확률 문제해결 방법

	ES1		ES2		ES3	
	1차 분석	2차 분석	1차 분석	2차 분석	1차 분석	2차 분석
Q1	3~4 수준	C1	4 수준	C3	4 수준	C3
Q2		C2	3~4 수준	C2	4 수준	C3
Q3	4 수준	C3	4 수준	C3	4 수준	C3
Q4	3~4 수준	C1	3~4 수준	C1	3~4 수준	C2
Q5		C2	4 수준	C3	4 수준	C3
Q6		C2	4 수준	C3	3~4 수준	C2
Q7		C2	4 수준	C3	3~4 수준	C2
Q8		C2	4 수준	C3	4 수준	C3
Q9		C2	4 수준	C3	4 수준	C3

3. 연구 문제 3: 영재 학생들의 문제해결 방법에서의 공통 특징

가. 문제해결 방법에서의 맥락 의존성

각각의 영재 학생은 문제에 내포된 맥락에 따라 각각의 문제에 대해 서로 다른 사고 특성을 나타냈다. 다시 말해서 각각의 영재 학생의 조건부 확률 문제해결 방법이 모든 문제에 대해 일관성 있게 나타난 것은 아니다. <표Ⅳ-1>에서 알 수 있는 바와 같이, 각각의 영재 학생은 어떤 문제에서는 C1에 해당하는 해결 방법을 나타낸 반면에, 또 다른 문제에서는 C3에 해당하는 해결 방법을 나타냈다. 이는 각각의 영재 학생의 문제해결 방법이 다소간은 맥락 의존적임을 의미한다고 할 수 있다.

각각의 영재 학생은 어떤 맥락에서는 사건의 종속성을 분명하게 인식했지만, 또 다른 맥락에서는 사건의 종속성을 인식하지 못하였다. 예를 들어, ES2는 [Q2]에 대해서는 C2에 해당하는 문제해결 방법을 나타냈지만, [Q3]에 대해서는 C3에 해당하는 문제해결 방법을 나타냈다. ES2가 [Q2]와 [Q3]에 대해 제시한 문제해결 방법은 다음과 같다.

ES2[Q2]: 확률은 1/5. 숫자 카드 10장 중 10의 약수이자 짝수인 것은 2, 10. 두 장이 나올 확률은 2/10=1/5이다.

ES2[Q3]: 첫 번째로 흰색 공을 뽑고 나면 흰색 2개, 검은색 3개가 남는다. 이 때 총 개수는 5개이고 흰색은 2개이니까 2/5이다.

학생 ES2는 [Q2]에 대해서는 "10의 약수이자 짝수인 수가 2개이므로 확률은 2/10"라고 답하였다. ES2는 "짝수가 나온다"는 사건이 "10의 약수가 나왔다"는 사건에 종속됨을 인식하지 못한 것이다. 반면에, ES2는 [Q3]에 대해서는 조건부 확률 $P(Y|X)$의 값을 정확하게 구하고 타당한 수학적 설명을 제시하였다.

나. 사건의 종속성과 사건의 순서성 구분의 어려움

3명의 영재 학생들이 가장 큰 어려움을 나타낸 문제는 [Q4]였다(<표Ⅳ-1> 참고). 3명의 영재 학생 모두가 문제해결에 실패한 것은 9개의 문제 중에서 [Q4]가 유일하다. [Q4]에 대한 ES1, ES2, ES3의 문제해결 방법은 다음과 같다.

ES1[Q4]: 두 번째에 어떤 색깔을 뽑았는지 안다고 해서 첫 번째에 뽑은 공의 색깔까지 알 수는 없다. 따라서 3/6=1/2이다.

ES2[Q4]: 두 번째로 어떤 공을 뽑던 간에 첫 번째에는 흰색 3개 검은색 3개가 있기 때문에 3/6은 1/2이다.

ES32[Q4]: 3/6…. (2/5) · (3/6)=1/5

학생 ES1과 ES2는 "두 번째 뽑은 공이 흰색"이라는 사건이 두 번째로 발생했다는 이유로 이 사건을 무시하고 "첫번째 뽑은 공이 흰색"일 확률만을 구하였다. 학생 ES3은 "첫번째 뽑은 공이 흰색이고 두 번째 뽑은 공이 흰색"일 확률을 구하였다. 3명의 영재 학생 모두, 사건의 종속성과 사건의 순서성, 즉 사건의 발생 순서와 조건이 되는 사건 사이의 관계를 혼동하는 어려움을 나타냈다. 이러한 결과는 Shaughnessy (1992)가 보고한 조건부 확률과 관련된 대표적인 오개념과 일관되는 것이다. 이로부터 학생들이 조건부 확률 개념과 관련하여 겪을 수 있는 가장 큰 어려움은 사건의 순서성과 사건의 종속성을 구분하는 것임을 이끌어낼 수 있다.

다. 정련된 문제해결 방법의 활용

우리나라에서는 11학년(16세)에서 조건부 확률을 다룰 때 Bayes 공식의 지도에 초점을 맞추고 있다. 학교에서 조건부 확률을 학습하지 않은 상태에서 본 연구에 참여한 영재 학생들은 Bayes 공식과는 다른 접근 방식으로 조건부 확률 문제를 해결하였다. 예를 들어, [Q5]에 대한 ES2와 ES3의 문제해결 방법은 다음과 같다.

ES2:

$\frac{2}{5}$, 지금 불량품이 어느 회사 제품이냐고 물어봤으므로 불량품이 나올 확률은 필요하지 않다. 그러므로 $\frac{\text{A회사의 개수}}{\text{총 개수}} = \frac{2}{5}$이다

	A회사	B회사	총계
정품	98	97	195
불량품	2	3	5
	200	200	400

ES3: 2/5. 불량품 한 개가 이미 나왔으므로, (X 회사의 불량품/전체 불량품)만 고려하면 돼요.

$$\frac{2\ (\text{A회사의 불량품})}{5\ (\text{전체 불량품})}$$

ES2와 ES3는 "불량품 한 개가 나왔다"는 조건이 되는 사건을 파악하고 곧바로 조건부 확률값 2/5를 구하였다. ES2와 ES3는 Bayes 공식을 알지 못하는 상태에서 문제의 맥락에 포함에 사건의 종속성을 파악하여 수학적으로 훨씬 더 우아한 해결 방법을 활용했음을 알 수 있다.

[Q5]는 11학년 수학 교과서에서 제시되는 전형적인 문제로서, 교과서에서는 Bayes 공식을 이용하여 다음과 같은 문제해결 방법을 제시하고 있다.

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\dfrac{{}_2C_1\times{}_{195}C_2}{{}_{200}C_3}}{\dfrac{{}_5C_1\times{}_{195}C_2}{{}_{200}C_3}}=\frac{{}_2C_1}{{}_5C_1}=\frac{2}{5}$$

이로부터 영재 학생들이 사건의 종속성과 관련된 다양한 맥락의 조건부 확률 문제를 해결한 다음 Bayes 공식을 재발견할 수 있도록 안내하는 영재 교육 프로그램의 가능성과 의미를 고려해 볼 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 3명의 영재 학생들이 학교에서 조건부 확률 개념을 학습하지 않은 상태에서 교사의 어떠한 도움도 없이 조건부 확률 문제를 해결하는 과정을 관찰하고 면담하였다. 본 연구 결과, 학생 ES1은 사건의 종속성을 파악하지 못하고 조건부 확률값을 구하는 데에 거의 성공하지 못했다. 그러나, 학생 ES2와 ES3는 9개 중에서 6~7개의 문제에서 문제의 맥락으로부터 사건의 종속성을 파악하고 성공적으로 조건부 확률값을 구하였다.

영재 학생들의 문제해결 방법은 3가지로 범주화되었으며, 영재 학생들은 각각 질적으로 다른 문제해결 방법을 활용하는 것으로 확인되었다. 또한 각각의 영재 학생은 문제에 포함된 맥락에 따라 사건의 종속성을 서로 다르게 인식함을 확인할 수 있었다. 이것은 문제에 포함된 맥락에 따라 개별 영재 학생의 사고 수준이나 문제해결 방법이 요동친다는 것을 의미한다. 이러한 현상에 대해서는 보다 적극적인 분석이 필요하며, 이는 의미있는 추후 연구 과제라고 할 수 있다.

한편, 본 연구에 참여한 3명의 영재 학생들은, 사건의 종속성과 사건의 순서성, 즉 사건의

발생 순서와 조건이 되는 사건 사이의 관계를 구분하는 데서 가장 큰 어려움을 나타냈다. 이러한 결과는 Shaughnessy(1992)가 보고한 조건부 확률과 관련된 대표적인 오개념과 일관된다.

이와 같은 연구 결과를 토대로 본 연구에서는 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에서는 사건의 종속성과 관련된 풍부한 맥락의 문제를 제시했을 때, 영재 학생들이 스스로 사건의 종속성을 인식하고 조건부 확률값을 구할 수 있음을 확인하였다. 이로부터, 영재 학생들을 지도함에 있어서, 수학적 개념이나 원리, 문제해결 방법과 과정 등을 교사가 주도하여 설명하기 보다는, 수학적으로 풍부한 맥락을 포함하는 문제를 학생들에게 제시하고 학생들 스스로 문제를 해결해 가면서 수학적 개념이나 원리를 발견하도록 하는 것이 바람직하다는 영재 교육의 시사점을 도출할 수 있다.

둘째, 본 연구에서는 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 방법의 특징을 파악하기 위하여 Jones et al.(1999)의 조건부 확률 사고 특성을 1차 분석 도구로 활용하였다. 그러나 영재 학생의 조건부 확률 문제해결 방법을 분석한 결과, Jones et al.(1999)이 제시한 틀이 영재 학생들의 문제해결 방법을 분석하기에 적절하지 않은 것으로 나타났다. 그 이유는 Jones et al.(1999)의 사고 특성이 조건부 확률과 관련된 다양한 맥락 중에서도 주로 비복원 상황을 중심으로 하고 있기 때문이었다. 반면에 본 연구에서는 비복원 상황 이외에도 조건부 확률과 관련된 다양한 맥락을 포함하는 과제들을 영재 학생들에게 제시하였다. 이로부터 조건부 확률 사고 특성을 분석하기 위한 틀 설정을 위한 심층적인 연구가 필요하다고 할 수 있다.

참고문헌

우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈(2006). **수학교육학 연구 방법론**. 서울: 경문사.

Bluton, C. (1983). Science Talent: The Elusive Gift. *School Science and Mathematics, 83*(8). 654-664.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dortrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company, 581-614.

____________(1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Dortrecht, The Netherlands: D. Reidel Pubishing Company.

Gagne, F. (1991). Toward a differentiated Model of Gifted and Talent. In Colangelo N. & Davis G. A. (Eds.), *Handbook of Gifted Education*. Boston: Allyn and Bacon, 65-80.

Hari, P. K. (2003). Secondary School Mathematics Pre-service Teachers' Probabilistic Reasoning in Individual and Pair Settings. In Pateman, N. A., Dougherty, B. J., & Zilliox, J. (Eds.), *Proc. 27th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 3. pp.173-180). Honolulu, USA: PME.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1999). Students' Probabilistic Thinking in Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 487-521.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.*

University of Chicago Press.

Lee, K. H. (2005). Mathematically Gifted Students' Geometrical Reasoning and Informal Proof. In Helen L. C. & Jill, L. V. (Eds.), Proc. 29th *Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 3. pp.241-248). Melbourn, AUSTRALIA: PME.

Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent.* ERIC E482. Office of Educational Research and Improvement. Washing, D.C.

Renzulli, J. S. & Reis, S. (1986). *The Schoolwide Enrichment Model: A Comprehensive Plan for Educational Excellence.* Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. In Douglas A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York, NY: Macmillan Publishing Company, 465-494.

Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences of Four Gifted Students. *Journal of Secondary Gifted Education, 14*, 151-165.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgement. *Psychological Review, 90,* 293-315.

Mathematically Gifted Students' Problem Solving Approaches on Conditional Probability

Na, Gwi Soo (Cheongju National University of Education)
Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)
Han, Dae Hee (Cheongju National University of Education)
Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education)

This research intends to look into how mathematically gifted 6th graders (age12) who have not learned conditional probability before solve conditional probability problems. In this research, 9 conditional probability problems were given to 3 gifted students, and their problem solving approaches were analysed through the observation of their problem solving processes and interviews. The approaches the gifted students made in solving conditional probability problems were categorized, and characteristics revealed in their approaches were analysed. As a result of this research, the gifted students' problem solving approaches were classified into three categories and it was confirmed that their approaches depend on the context included in the problem.

* key words : mathematically gifted student(수학 영재 학생), conditional probability problem-solving(조건부 확률 문제 해결)

논문접수 : 2007. 8. 15
심사완료 : 2007. 9. 19