대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 3, 309-331. Aug 2007

학령 초의 활동주의적 수 개념 구성에 관한 연구[1)]

고 정 화*

수 지도에 관한 문제는 수학교육의 역사에서 가장 활발하게 논의된 주제로서, 수학적, 철학적, 심리학적, 수학교육학적 측면에서 다양한 관점과 주장이 제기 되었다. 수 개념은 하나의 관점에서 규정될 수 없는 복합적인 개념이며, 그 지도 역시 결코 간단한 문제가 아니다. 그럼에도 불구하고 수 개념 및 그 지도에 관한 대부분의 논의는 수 개념의 한정된 측면을 중심으로 한 것이었다. 본 연구에서는 자연수 개념을 어떻게 지도하는 것이 좋은가 하는 자연수 개념 지도 문제에 대해, 자연수 개념의 제 측면에 대해서 현대 수학교육의 근본적인 이념이 되고 있는 활동주의적 접근을 시도하고자 하였다.

이를 위해 본 연구에서는 자연수 개념의 역사적, 수리철학적 논의와 수 개념의 제측면에 관해 고찰하고, 지식의 활동적 구성과 활동을 통한 자연수 개념의 구성 및 자연수 개념 지도의 활동주의적 접근을 논의한 제 학자들의 입장을 비판적으로 분석하는 가운데 자연수 개념의 제 측면을 의미 있게 지도하기 위한 활동주의적 접근 방안을 연구 제시하였다.

I. 서 론

학교수학은 학령 초의 자연수 개념에 대한 학습으로부터 시작되며 자연수와 그 계산은 초등학교 수학의 핵심적인 부분을 이루고 있다. 그러므로 처음에 수 개념을 어떻게 배우느냐 하는 것은 장차 경험할 학교수학 전체와 관련하여 중요한 의미를 가진다고 할 수 있다. 수학교육에서 가장 기본적이고 중요한 문제 중의 하나는 수를 어떻게 가르치고 배우느냐 하는 것이라고 할 수 있다.

실제로 수 '개념'은 그리스 시대의 철학적인 설명으로부터 근세의 여러 수학자들에 의해 제시된 다양한 관점, 그리고 현대 수리철학에서 수학적 존재의 근거를 찾는 시도에 이르기까지 다양하게 논의되었으며, 수 개념 '지도'는 19세기에 심리학적, 교육학적 논의가 본격화 되면서 다양한 관점에서 활발히 논의되었다(Clason, 1968; Bell, 1971). 그런데 이러한 역사적 논의에서 주목할 만 한 점은 수 개념의 한정된 측면을 중심으로 한 지도가 논의의 초점을 이루고 있었다는 점이다. 수 개념 지도에 관한 다양한 입장 차이는 주로 인식론적, 심리학적 견해 차이에서 비롯된 것이었다. 그 만큼 학교수학에서 수를 어떻게 다루는 것이 좋은가에 대한 해답을 찾기란 매우 어려운 문제임에 틀림없다. 다른 한편으로, 수 개념에 대한 인식론적, 심리학적, 교육학적 관점에 따라 그 지도 형태가 다양하게 나타났다는 사실은 수 개념이

* 한국교육과정평가원, jhko@kice.re.kr
1) 이 논문은 고정화의 박사학위논문을 요약한 것임.

하나의 관점에서 규정될 수 없는 복합적인 개념이며, 그 지도 역시 결코 간단한 문제가 아니라는 것을 말해준다. 수 개념의 지도에서 중요한 것은 수 개념이 복합적인 측면을 지닌 것임을 알고 각각의 개념적 측면을 충실히 지도할 방안을 찾는 것이라고 할 수 있다.

본 연구에서는 '학령 초에 수 개념을 어떻게 지도하는 것이 좋은가'하는 수 개념 지도 문제에 대해, 수 개념의 제 측면에 대해서 현대 수학교육의 근본적인 이념이 되고 있는 활동주의적 접근을 시도하고자 한다.

한편, 활동주의는 구성주의와 함께 유행하였지만 구체적인 실태를 들여다보면 교육과정에서 하나의 슬로건으로서 일반적인 수준에서 피상적으로 이해되고 있으며, 구성주의도 활동을 통해 수학적 지식의 구성에 이르게 하는 구체적인 원리와 방법을 제시하지 못하고 있다(임재훈, 홍진곤, 1998: 300-306). 일반적인 이론적 논의는 무성하지만 정작 거기에서 도출될 수 있는 각각의 수학적 개념 구성을 위한 고유한 '구체적인' 교육 방안은 찾아보기 어렵다는 것이다(우정호, 2000: 275-276).

이러한 문제점을 극복하기 위해 지식의 활동적 구성에 관해 논의한 Kant, Dewey, Piaget, Davydov, Freudenthal의 이론을 고찰하여 활동을 통한 지식의 구성 메커니즘을 밝히고자 한다. 특히 이들은 지식의 활동적 구성에 관한 논의를 수 개념의 구성으로 상세화함으로써 활동을 통한 수 개념 구성 메커니즘을 이해하게 해준다. 이는 수 개념의 제 측면에 대한 활동주의적 접근을 인식론적으로 뒷받침한다고 할 수 있다.

본 연구에서는 수 개념의 제 측면에 대한 충실한 지도가 요구된다는 관점에서, 지식의 활동적 구성과 수 개념의 활동적 구성에 관한 논의를 기초로, 수 개념 지도의 활동주의적 접근 방안을 모색하고자 한다. 이를 위해 먼저 지식의 활동적 구성과 수 개념의 활동적 구성, 그리고 이를 논의한 학자들의 수 개념 지도에 관한 접근 방식을 검토하고자 한다. 그러한 이론적 논의를 바탕으로 우리나라 교과서를 분석하고 수 개념 지도 방향을 모색하며, 구체적으로 수 개념의 제측면을 지도하기 위한 활동주의적 접근을 시도하고자 한다.

II. 지식의 활동적 구성과 수 개념의 구성

1. 지식의 활동적 구성

인식 주체의 활동이 인식에서 중요한 역할을 한다는 관점은 인식을 구성으로 설명하는 데에서 비롯된 것이다. Kant는 소위 인식론의 혁명적 전환을 이루어냄으로써 지식의 구성과 관련하여 활동에 주목하게 하는 보다 명확한 계기를 마련하였다. Kant는 인식의 성립조건을 객관적 조건으로서의 외부 대상과 주관적 조건으로서의 내적 형식에서 찾고 있다. 여기서 형식은 인식을 가능하게 하는 선천적 능력, 모종의 구성적 능력인 '아프리오리'이다.[2] 인식은 인식 주체가 선천적으로 타고나는 아프리오리를 바탕으로 객관적 대상을 능동적으로 구성하는 활동으로 설명된다.

Dewey의 인식론은 경험을 바탕으로 전개되는데, 경험은 어떤 것에 작용을 가하여 그 결과

2) Kant에 의하면 인식은 현상의 질료를 특정 방식으로 정돈하는 감각 수준과 감각 수준의 인식을 개념으로 정돈하는 이해 수준으로 설명되며, 각각에 시간과 공간이라는 직관, 범주라는 아프리오리가 작용한다고 말한다.

를 당하는 것으로 활동과 본질적으로 동의어이다. Dewey는 관념이 인간과 환경, 주체와 객체 사이의 상호작용에 기원한다고 본다. 여기서 상호작용은 주체와 객체의 이분법에서 출발하는 것이 아니라 오히려 거기서부터 기능적 요소들이 도출되는 교변작용(交變作用, transaction)이다. Dewey에 의하면, 유기체와 환경의 상호작용 내에서 어떤 갈등 상황이 발생할 때 이에 대한 조정 활동이 일어나며, 조정을 추구하는 활동 속에서 자극과 반응이 구성되고, 의미 없이 받아들여지던 사건이 의미 있는 사건, 곧 대상이 된다. 지식을 구성하는 과정은 조정을 추구하는 가운데 대상을 구성하는 과정이다.

Piaget는 지적 발달을 행동 양식의 발달, 곧 행동 schèmes의 변화로 설명한다. schème은 행동과 조작의 일반적 구조이며, 행동 양식을 반복 적용하고 일반화하는 동화와 조정을 통해 행동 양식을 변화시키는 조절 기능을 갖는다. Piaget에 의하면, 수학적 지식의 구성 과정은 주체가 가지고 있는 schème과 주체가 당면한 사태 사이의 불균형을 극복하기 위한 조정 과정으로 설명된다. 논리-수학적 개념은 대상에 대한 주체의 행동의 일반적 조정으로부터 반영적 추상화에 의해 구성되는 조작적 schème이다. 조작적 schème의 구성은 학습자 내부의 상태와 환경 사이의 불균형을 극복하고 평형을 찾으려는 학습자 자신의 자기-조정적 활동에 의해 이루어진다.

소비에트 심리학은 '활동이론'으로 일컬어질 정도로 '활동'이라는 개념을 중심으로 논의된다. Davydov는 Vygotsky의 '기호에 의해 매개된 활동'과 Leont'ev의 '실제적, 물질적 활동'이라는 관점을 종합하여 '기호를 수반하는 실제적 활동'을 강조하였다. 그에 의하면, 개인은 역사적으로 발전되어 온 사회적 활동에 참여함으로써 인식을 획득한다. 즉 활동을 통한 주체와 객체 사이의 상호 변환 과정 속에서 활동의 대상 내용이 주관적인 산물이 되고, 이것과 감각 사이에 변증법적 상호작용이 일어나 대상의 본질적인 측면, 곧 보편적 관계를 얻으며, 이러한 보편적 관계는 기호 내지는 상징에 의해 재생산된다.

Freudenthal은 수학을 상식에서 출발해서 개선된 상식으로 나아가면서 확실성을 추구하는 인간의 정신적 활동이라고 규정한다. 상식이 '현실'을 공유하는 사람들의 공통된 행동 속에서 나타나는 것이라는 점에서 수학의 출발점은 '현실' 내에서의 활동이다. 확실성을 추구해가는 과정은 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 수학화 과정이다. 학생들은 현상을 경험하는 가운데 수학적 대상에 대한 심상을 구성하게 되며, 이렇게 구성된 심상은 직관적인 예비 개념으로 반성을 통해 궁극적으로 수학적 아이디어로서의 개념을 형성하게 된다. 수학적 개념은 다시 수학 자체의 수학화를 통해 체계화, 구조화된다.

위 학자들은 지식의 구성과 관련하여 활동이 갖는 의미를 설명하는 맥락은 다르지만, 모두 지식의 구성과 활동 사이의 관계를 설명함으로써 지식의 활동적 구성의 성격과 의미를 밝히고 있다. 지식의 구성 과정에서 활동이 갖는 의미는 다음과 같이 정리될 수 있다.

첫째, 구체적 활동이 지식의 구성을 가능하게 하는 토대로 작용한다. Dewey의 교변작용, Piaget의 대상에 대한 주체의 행동, Davydov의 대상을 변형하는 실제적 활동, Freudenthal의 바닥 수준의 활동은 인식 주체의 능동적 활동이 지식이 구성되는 토대가 됨을 강조한다.

둘째, 활동이 지식의 구성을 가능하게 하는 토대가 되므로 지식의 구성은 이원적 구도가 아닌 삼원적 구도로 설명된다. 인식을 설명하는 이원적 구도는 '환경(객체) → 인간(주체)',

즉 대상이 인식 주체에 영향을 미친 결과 지식이 발생한다고 본다. 그러나 지식의 활동적 구성이라는 관점은 활동을 매개 고리로 한 인간과 환경, 주체와 객체 사이의 상호작용을 통해 이루어지는 삼원적 구도로 설명된다.

셋째, 지식의 구성 과정은 조정을 추구하는 과정으로 설명된다. 지식의 구성은 주체와 객체 사이의 상호작용 속에서 드러나는 불균형을 극복하고 갈등 상황을 해결하기 위해 조정을 추구하는 과정에서 이루어진다. Dewey는 교변작용 속에서의 내부적인 조정, Piaget는 학습자 내부의 상태와 환경 사이의 불균형을 극복하고 평형을 찾으려는 학습자 자신의 자기-조정적 활동, Davydov는 실제적인 대상 활동의 결과 얻어질 산물과 실제 활동 과정에서 얻어진 감각 사이의 변증법적 상호작용, Freudenthal은 충돌되는 상식 간의 조정을 추구하는 과정을 통해 지식이 구성되어 간다고 말한다.

넷째, 지식의 구성에 관한 위 학자들의 활동주의적 접근은 인식의 상대성을 주장하는 최근의 급진적 구성주의와는 무관하다. Dewey는 인간이 공유된 활동에 참여하여 간주관적인 세계를 구성한다고 봄으로써, Piaget는 심리적 주체와 대비되는 인식 주체를 상정함으로써, Davydov는 학습자는 사회 문화적 활동, 특별히 기호에 의해 매개된 활동을 통해 그 문화의 객관적인 수학적 지식을 점유한다고 봄으로써, Freudenthal은 확실성을 추구하는 수학화 활동으로 수학을 규정함으로써 지식의 객관성을 확보하고자 하였다.

다섯째, 지식의 활동적 구성에 관한 이들 제 학자들의 관점은 구성하고자 하는 지식과 관련된 실제적인 행위를 찾는 것이 선행되어야 한다는 점에서 개념-특수적이다. 이는 이들의 인식론적 입장으로부터 끌어낸 교육적 함의점에 잘 드러나고 있다. Dewey는 아동의 현재 경험 속에서 장차 교과로 발전할 잠재력이 있는 원초적인 소재, 즉 학습하고자 하는 개념과 관련된 실제적인 활동이 출발점이 되어야 한다고 본다. Piaget는 아동에 의한 조작의 점진적인 구성을 위해 개념과 관련된 본질적인 조작을 이해하고 이를 구체적인 활동의 형태로 구성하여 제시하는 조작적 원리를 제시하였으며, 이때 조작 활동은 개념에 관하여 특수하다. Davydov는 어떤 특수한 대상-관련 활동이 각각의 수학적 형식을 유도하는지 탐구해야 한다고 말하고 있다. Freudenthal의 각각의 수학적 개념에 관한 교수학적 분석을 통해 수학적 구조가 조직화되어 나갈 수 있도록 개념 형성의 근원이 되는 현상들을 찾고 이를 교육적으로 각색하는 교수학적 현상학을 주장하였다.

여섯째, 지식의 활동적 구성에 관한 이상의 논의는 교과교육의 고유한 의미를 부각시켜준다. 지식의 구성이나 개념 형성이 주체의 개념 특수적인 활동과 밀접하게 관련된다면, 그 지식에 고유한 활동성을 강조하는 교과 고유의 더 나아가 개념 특수적인 교수법을 상정해야 한다. 개념과 관련되어 있는 실제적인 행위, 그리고 그러한 실제적인 행위가 내적인 개념형성으로 전환되는 방식은 교육 내용 및 교육 방법을 결정하게 될 것이기 때문이다. 이같은 맥락에서 특정 개념과 관련된 수학적 활동의 본질을 밝히고 이를 구현하는 실천적인 지도 문제는 활동주의 수학교육론의 중요한 과제라고 할 수 있을 것이다.

2. 수 개념의 제측면

가. 자연수 개념에 대한 역사적 고찰

그리스 시대에는 철학적인 입장에서 수에 관심을 갖게 되었다는 점에서 이전 시대와 분명하게 구분된다(Brainerd, 1979: 8). Damerow

(1996)는 그리스의 수 개념을 '개념에 기초한 산술 수준'으로 특징짓고 있으며, Englund & Nissen(1988)은 그리스의 수 개념을 '추상적인 수 개념 수준'으로 평가하고 있다. Pythagoras는 '만물은 수이다'라고 하여 수를 자연을 설명하는 근본원리라고 보며, Plato는 이데아의 세계를 상정한 그의 철학적 관점의 연장선상에서 수 개념을 실재하며 정신이 사유를 통해 얻는 것으로 본다. Aristotle은 수와 크기 개념이 감각적인 대상으로부터 추상화를 통해 얻어진다고 본다. Euclid는 원론 Ⅶ권에서 단위와 수 개념을 각각 '존재하는 사물들 각각을 하나라고 부르게 하는 것', '단위들로 이루어진 다수'라고 정의하는데, 수는 이산적인 집합에만 적용되며, 단위의 불가분성이야말로 이산적인 양의 본질이다. 수에 대한 고대 그리스 학자들의 관심은 주로 철학적인 부분에 집중되어 있었으며, 대체로 실재론적 입장에서 수를 이해하였으며, 특히 그들은 수를 이산량과 관련된 것으로 보았다.

중세는 수 점술이 지배했을 정도로 수학적으로 암흑기였다. 16세기에 이르러 Stevin이 측정이라는 실용적인 문제를 설명하고자 하면서 수 개념에 대한 큰 전환이 이루어졌다. 그는 수에 대한 그리스적인 관점에 도전하여 단위도 하나의 수라는 사실을 삼단논법으로 설득력 있게 주장하였다(Struik, 1958: 495-496). 또한 이산적인 것과 연속적인 것의 구분은 존재론적 범주에 속한 것이 아니라, 양화되는 대상의 부수적인 성질이라고 보았다. 수에 대한 이러한 관점은 측정의 실제를 일반화하여 유도된 것으로 대상의 양적인 측면을 설명한다. Newton은 수를 '어떤 양에 대하여 같은 종류의 다른 어떤 양에 의해 추상화된 비'라고 정의하고(Clason, 1968: 43), 비 개념에 기초하여 수 체계를 자연수, 분수, 무리수 세 가지 층으로 구분한다. Kant는 철학자로서 수 개념을 자신의 철학적 관점에 따라 직관 속에서 시간을 발생시킴으로써 다면적인 것을 종합한 단일체로 정의한다(Clason, 1968: 47-48).

중세 이후에는 수학적 탐구의 맥락에서 수학자들에 의해 수 개념이 다양하게 설명되었다는 특징이 있다. 그들은 주로 수학으로 자연 현상을 설명하였으며, 수 역시 물리적인 양과 관련하여 설명하고자 하였다. 수 개념과 관련하여 이산량과 연속량의 구분이 파기되었고, 인식론적으로 그리스적 실재론이 극복되었다.

19세기에 이르러 수의 학습이 어린 아동에게로 확대되면서 수 개념에 대한 심리학적, 교육학적 논의가 활발해졌다. Pestalozzi는 수, 형, 어의 직관을 인식의 기초로 보고, 실물 교수법, 직관적 지도 방법에 의한 수 개념 지도를 제안하였다. 19세기 말, 20세기 초에는 심리학의 발달로 수 개념 교육과 관련하여 다양한 방법이 출현하였다. Speer의 양의 비교 활동을 중심으로 한 관계로서의 비 방법, Dewey-McLellan의 전체량과 단위량 사이의 비라는 관점, 수 개념이 서열적인 순서, 주로 기계적인 세기를 통해 발생한다는 Phillips의 세기 방법 등이 그것이다. 1920년대에는 Thorndike를 비롯한 연결주의 심리학자들은 수 개념을 '1, 3, 17, 23을 자연수라고 한다'와 같은 설명으로 대치하였다(Clason, 1968: 64). 하지만 Thorndike는 자연수의 의미를 부정하지 않고 계열, 집합, 비, 관계 등으로 설명하였다. 형태심리학자인 Wertheimer는 사물의 집합이 갖는 Gestalt에 밀접하게 융합된 의사 수량 개념에 수 세기 조작이 도입됨으로써 발달된 개념이 자연수라고 보았다(波多野完治, 1965). 발달심리학자인 Piaget는 자연수를 분류와 계열화의 조작적 융합, 포함관계 조작과 비대칭관계 조작의 융합으로 보고 그 발생을 연구하였

다. 19세기 독일에서는 수 개념의 본질과 발달에 대한 극심한 의견 차이로 많은 논쟁이 있었으며 계산 지도 방법론도 수도를 이용한 직관주의적 관점, 수 세기를 통해 계열적으로 파악하도록 하는 세기주의적 관점, 논리주의적 관점이 나타났다. 그 외에도 세기주의와 논리주의라는 관점을 조정한 Kühnel, 논리주의적 관점에서 수 개념을 오직 집합과 관련지어 설명한 Wittmann 등의 관점이 있다.

나. 자연수 개념에 대한 수리철학적 고찰

19세기 말 실수계를 엄밀하게 구축할 필요성이 제기되면서 Dedekind, Cantor, Peano 등은 그러한 기초를 보다 단순하고 기본적인 자연수 체계에서 확립하고자 하였다(Eves, 1960: 518). Dedekind, Peano는 자연수가 수열을 형성한다는 사실과 그것이 어떤 유한 혹은 무한수열을 이루는 항을 표현하는데 사용될 수 있다는 사실에 호소하여 자연수 개념을 정의하고 있다(Brainerd, 1979: 54). 한편, 20세기에 들어와 수학 기초론에 대한 문제가 제기되면서 자연수는 다시 그 중심적인 논의의 주제가 되었다. 직관주의 수리철학자들은 수학적 개념이나 대상이 정신활동에 의해 얻어진다고 보고, 개념을 끌어내는 직관을 수학의 가장 근원적인 기초로 보았다(임정대, 2003: 37). 고대 그리스의 Pythagoras로부터 Kronecker, Poincaré 등의 직관주의적 전통은 현대 직관주의 수리철학의 창시자인 Brouwer에 의해 이어지고 있다.

논리주의 수리철학자들은 수학의 모든 기본 개념을 논리학 안에서 정의하고 논리학의 기본 원리로부터 수학의 모든 정리를 증명하고자 하였다. Frege는 류와 대응 관계라는 개념을 사용하여 자연수 n을 정확히 n개의 원소를 포함하는 하위 류(subordinate class)를 원소로 갖는 상위 류(superordinate class)로, Russell은 이를 보다 일반화시켜 관계에 따른 형(type)을 생각하고 대등관계 및 닮음관계에 의한 형으로서 기수와 순서수를 정의하였다. 이러한 외연적 정의에 대하여 Cantor는 대등한 집합의 공통성질로 자연수를 내포적으로 정의하였다(Fraenkel, 1968).

형식주의자는 수학을 공리체계로 구성하고 그것의 무모순성을 증명하고자 하며, 수학을 의미 없는 기호에 의해 형식화된 체계에 불과하다고 보고, 체계의 내적 일관성에 관심을 둔다. Hilbert는 "우리의 연구 대상인 수의 기호들은 그 자체로는 어떠한 의미도 가지지 않는다(Clason, 1968: 382 재인용)"라고 말한다. 그에게 자연수는 독특한 일관된 성질을 갖는 특정한 기호체계일 뿐이다.

다. 자연수 개념의 제 측면에 관한 논의

자연수는 다양한 측면으로 설명될 수 있는 복합적인 개념이다. Freudenthal(1973)은 수 개념에 대해 교수현상학적 분석을 시도하였는데, 그에 따르면 수 개념은 그 접근 방식에 따라 셈수, 개수, 측정수, 계산수로 구분된다. 셈수란 자연수의 수열이며 집합론에서 순서수로 형식화되고 초한순서수로 확장된다. 개수는 셈수보다 일찍 발생되며 동물에게서도 나타나며, 집합론에서 기수로 형식화되며 초한기수로 확장된다. 측정수는 단위에 대한 배수이며 수학적으로 해석하면 작용소이다. 계산수는 수의 알고리즘적 측면, 형식적인 공리적 체계로 형식화되는 측면으로, 규칙에 따라 조작되는 대상이다.

Confrey(1980)는 개념이라는 것은 단일하거나 불변인 영원한 것이 아니라 변화하는 것이며 각각이 설명하고자 하는 현상도 다르다는 '개념적 변화 이론'을 예시하는데 수 개념을 사용하고 있다. 그에 의하면, 수 개념은 집합 또는 류(class)로서의 집합(기수) 개념, 순서짓기, 무

한 수열의 형성과 관련되는 순서수 개념, 두 양 사이의 비의 추상물로서의 비 개념, 무리수 개념을 설명하는 무한 소수 개념, 실수와 수직선상의 점을 일대일 대응시켜 기하학적 개념과 결부시키는 점-수 대응 개념, 법칙을 통해 정의되는 조작적 개념으로 설명한다. Thorndike (1922)도 두 학자와 유사한 맥락에서 자연수 개념을 계열로서의 의미, 집합으로서의 의미, 비로서의 의미, 관계로서의 의미로 설명하고 있다.

결국, 학교 수학에서 다루어지는 수는 대략 셈수적 측면, 개수 또는 기수적 측면, 순서수적 측면, 측정수적 측면, 관계수 또는 계산수적 측면으로 구분되며, 특정한 구조를 이루는 산술 체계로서의 수 개념은 고등학교 이상에서 논의할 수 있으므로, 초등학교 수준에서 수의 개념적 측면은 앞의 네 가지 측면으로 구분된다고 할 수 있다.

3. 활동을 통한 수 개념의 구성

Dewey, Piaget, Davydov, Freudenthal은 지식이 활동을 통해 구성된다는 입장의 연장선상에서 자연수 개념 역시 특정한 활동을 통해 구성되는 것으로 설명한다.

Dewey는 수가 적응을 위해 사물을 다루는 능동적인 활동의 산물로서, 자원의 한계에 따라 요구되는 측정활동의 소산인 비라고 말하고 있다. 인간은 한정된 자원으로 가능한 한 최선의 결과를 달성하기 위해 목적에 맞게 수단을 조정하게 되며, 이 과정에서 양에 관한 아이디어가 발생하고 이것이 곧 측정활동으로 이어져 결과적으로 수를 얻게 된다(Dewey & McLellan, 1895: 35-36). 수는 측정 단위와 함께 나타내면 '측정된 양의' '절대적인' '크기'를 나타내지만, 수 자체는 전체량과 단위량이라는 '두 양 사이의' '상대적인' '관계'를 나타내는 것이다(Dewey & McLellan, 1895: 71-72). 수는 측정 활동을 통해 파악되는 전체량과 단위량 사이의 비, 곧 측정수이다.

Piaget는 수 개념이 행동 및 조작과 관련된 심적 구성에 근거한다고 보았다. 즉, 수 개념의 근거는 수 세기나 이미지에 있지 않고 행동의 조정을 통해 구성되는 조작, 곧 결합과 분리, 순서짓기, 포함시키기, 짝짓기 활동이 인지적 schème의 작용으로 수 관련 조작인 집합의 포함관계 조작과 계열화 조작을 구성하고 이후 schèmes의 분화와 조정을 통해 그 종합인 수 개념이 구성된다는 것이다. Piaget는 수를 기수와 순서수가 종합된 조작으로 보고 있다(Piaget, 1965: viii).

Davydov는 수학적 분석과 수 개념 발달에 대한 역사적 분석을 통해 수 개념의 발생적 근원이 대상들의 간접 비교와 모으기, 곧 양을 조작하는 활동에 있다고 보았다(Davydov, 1982). 그리고 실제적인 활동이 정신적인 조작으로 전이되는 가운데 양 사이의 내적 관계를 끌어내는 데 기호가 중요한 정신적 도구가 된다고 말하고 있다. 수는 전체 대상과 부분 사이의 관계, 하나의 양을 단위가 되는 다른 양에 의해 측정하는 가운데 얻어지는 양 사이의 일반적 관계인 비를 나타낸다(Davydov, 1990: 361-362).

Freudenthal은 자연수의 수열로 이해되는 셈수를 역사적, 발생적, 이론적으로 수학의 초석이라고 보았다(1973: 171-172). 즉, 아동은 색깔이나 문자의 이름을 배우는 것과 같이 서투르지만 수 세기를 하다가 어느 순간 갑자기 계속되는 전체 수열을 파악하게 된다. 이와 같은 맥락에서 1로부터 차례로 1을 더해 생성되는 자연수열의 가장 기본적인 성질을 형식화 한 수학적 귀납법의 원리를 중요하게 간주하고 있다. 그에 의하면, 셈수는 원시적인 수 개념으로

부터 소박한 수세기, 수학적 귀납법을 암묵적으로 사용하는 소박한 행동, 수학적 귀납법의 의식적 인식과 그것의 형식화, 집합론에서의 공리화에 이르기까지 그 수준이 다양하며 자유롭게 발달해간다(Freudenthal, 1973: 172- 179).

자연수 개념의 구성에 관한 이들의 논의를 요약하면 <표 Ⅱ-1>과 같다. 자연수 개념 구성에 관한 활동주의적 논의는, 자연수 개념이라는 동일한 주제라도, 수를 바라보는 관점에 따라 활동주의적 접근 방식에 현저한 차이가 나타날 수 있음을 보여준다.

Ⅲ. 자연수 개념 지도의 활동주의적 접근 방법

1. Dewey의 측정활동에 기초한 측정수 개념 지도 방법

Dewey는 수가 양을 측정하는 과정에서 생긴 정신 활동의 소산으로 보고 그에 기초한 구성적 활동 방법을 제안하고 있다. 그는 기존의 수 개념 교수법인 기호에 의한 방법과 사물에 의한 방법이 수가 대상을 다루는 '마음의 활동'을 통해 그리고 그 안에서 발생한다는 사실을 설명하지 못했다고 비판한다(Dewey & McLellan, 1895: 60). 그에 의하면, 수는 사물을 구성적(constructive) 또는 심적(psychical) 방법을 사용함으로써 얻어진다. 구체적으로 사물에 대한 구성적 활동을 통해 수치적 아이디어를 발달시키는 방법은 ① 자연적인 단일체, ② 전체를 구성하는 측정 단위, ③ 수 값을 결정하는 측정과정의 세 단계로 이루어진다(Dewey, 1895 & McLellan: 63-64). 수를 다루는 출발점은 세고 측정해야 할 전체 양이며, 전체로서 주어진 대상은 하나의 모호한 전체로 이를 평가할 측정 단위가 주어져야 한다. 이때 고정 단위는 수라는 아이디어에 포함된 '비' 개념을 생각하도록 훈련하기 어렵기 때문에 임의 단위에 의해 전체에 대한 비로서의 수가 구성되도록 해야 한다. 전체는 단위에 의해 측정됨으로써 수 값을 확정하게 된다.

Dewey가 수 개념 형성을 위해 제안하고 있는 구성적 활동 방법은 다양한 측정 활동에 참여하고, 그러한 활동을 반성하는 가운데 측정 활동에 내재된 수 개념을 얻게 하는 것이라고 할 수 있다. 수는 단위 반복을 통해 전체를 재구성하는 측정 활동 속에 내재된 비, 예컨대, 7은 1cm에 대한 7cm의, 2cm에 대한 14cm의, 3cm에 대한 21cm의 비이다. Dewey는 단위에 따라 주어진 양이 서로 다른 수로 파악된다는 것을 이해할 수 있도록 전체를 다양한 임의 단위에 의해 분석하고 관련짓는 구성적 연습을 제안한다(Dewey & McLellan, 1895: 163-164).

<표 Ⅱ-1> 자연수 개념에 관한 활동주의적 관점 비교

	Dewey	Piaget	Davydov	Freudenthal
발생	• 측정 활동	• 결합, 분리, 순서짓기, 포함시키기, 짝짓기 활동	• 비교하고 관계 짓는 활동	• 수 세기 활동
본질	• 전체량과 단위량 사이의 비	• 분류 및 계열화 조작의 종합	• 양적 관계를 표현하는 형식	• 무한 수열
수의 측면	• 측정수	• 기수와 순서수	• 측정수	• 셈수

2. Piaget의 분류, 짝짓기, 순서짓기 활동을 통한 자연수 개념 지도

Piaget는 자연수 개념의 본질과 그 발달에 대한 기본적인 입장을 조작적 구성주의로 제시하였다. 그에 따르면, 수 개념 지도는 수 개념과 관련된 기본적인 조작을 확인하고 그 형성을 위한 구체적 활동을 설정하는 것으로 귀결된다. Piaget는 자연수가 집합의 포함관계와 비대칭적 추이관계 조작, 곧 분류 조작과 계열화 조작의 종합에 의해 구성된다고 보고, 두 가지 조작의 자발적인 구성이 가능하도록 그와 관련된 활동을 설정하고 그러한 행동을 조정하여 조작을 형성하는 논리-수학적 경험을 시킬 필요가 있다고 보았다. 그러므로 결합과 분리, 순서짓기, 포함시키기, 짝짓기와 같은 구체물을 다루는 활동을 하고 그 결과를 관찰함으로써 그러한 행동이 내면화되고 조정되어 조작으로 구성되고 이들이 조정되어 수 개념으로 통합되도록 하고 있다. 한편, 수 개념은 집합의 포함관계와 비대칭적 추이관계 조작의 종합에 의해 구성되는 새로운 조작적 schèmes이므로 자연수의 기수적 측면과 순서수적 측면을 통합적으로 인식하도록 지도해야 한다. 이와 같은 자연수 개념에 관한 Piaget의 관점은 집합론의 기수 개념을 초등화한 새 수학의 전형인 SMSG의 교육과정과는 구분되어야 한다.

3. Davydov의 양의 조작 활동을 통한 측정수 개념 지도 방법

Davydov(1975)는 수 개념의 발생적 근원을 양을 조작하는 활동에서 찾고 이를 통해 수의 구조를 이해시키고자 하였다. 그는 이러한 관점에서 수 개념의 활동적 구성을 위해 자연수 학습 이전에 여섯 가지 주제별 활동을 수행하도록 하고 있다. 대상을 비교하는 활동, 그 결과를 문자와 등호 또는 부등호와 같은 기호로 나타내는 활동, 양적 관계의 일반적인 성질인 반사성, 대칭성, 추이성을 이해하는 활동, 양의 변화를 관찰하고 이를 등식과 부등식의 형태로 기술하는 활동, 부등식을 등식으로 바꾸는 활동, 이전에 얻은 모든 지식을 종합하는 활동이 그것이다. 이러한 과정을 통해 파악된 양적인 관계는 구체적인 양의 측정 활동을 통해 수 개념의 구성으로 이어진다.

Minskaya(1975)는 Davydov의 활동이론에 근거하여 양의 조작 활동으로부터 대상-단위-수 세 요소 사이의 상호관계를 중심으로 한 자연수 학습 교육과정을 고안하였다. 그의 교육과정에서는 측정되는 대상과 단위 사이의 관계를 결정하는 것이 자연수 학습의 주요 과정을 이룬다. 이들 세 요소 사이의 상호관계는 측정 활동을 통해 파악된다. 먼저 나무 조각과 같은 물리적인 양을 평가하는 활동이 주어지며, 그 결과를 물리적인 단위로 표현하는 것이 한계적이라는 인식 가운데 측정 결과를 효율적으로 표현할 수 있는 수단으로서 자연스럽게 수가 도입된다. 주어진 양을 측정하는데 사용한 '단위'가 1로 정의되고, 그 단위 반복에 의해 계속해서 수가 정의된다. 단위에 의해 수를 정의하면 동일한 대상이라도 단위에 따라 다른 수 값을 갖게 된다. 이후 단위에 의한 측정 활동은 수직선으로 확장되어 수 개념의 이해를 강화하게 된다. 이후 $A_e = 6$와 같이 대상과 단위 사이의 관계를 일반적인 문자식으로 표현하여 수 개념을 나타내는 일반적 형식으로서 구조적 관계를 보여주게 된다.

4. Freudenthal의 수학화 활동을 통한 셈수 지도

Freudenthal(1983)은 수 개념에 대한 현상학적

분석뿐만 아니라 수 및 연산 지도와 직접적으로 관련되는 몇 가지 논의를 하고 있다. 첫째, 수와 세기, 사칙연산은 무엇보다도 양이 관여된 현상을 조직하는 수단이어야 한다. 이러한 관점에서 보면 자연수를 기호나 숫자의 배열로 간주하는 것, 내포적으로 구성된 수 개념을 외연적으로 형식화 하는 것, 관습적인 규칙에 의해 수행되는 계산 학습 등은 타당한 방법이 아니다. 둘째, 소위 발달적 현상학에 따라 셈수를 중심으로 수 개념을 지도해야 한다. 대부분의 아동은 정신적인 대상으로서의 수를 구성하기 전에 수 세기를 자연스럽게 학습하며, 수 세기는 수사를 열거하기, 세어지는 집합과 숫자를 관련짓기, 센 결과를 집합의 원소의 수로 해석하기의 단계로 진행된다. Freudenthal은 셈수의 구조를 통찰하도록 하기 위해 다양한 세기 활동을 제안하고 있다. 그는 새 수학 이후 기수 중심의 수 개념 지도는 수학적으로 불충분할 뿐만 아니라, 중요하지도 않으며, 교수학적으로도 불충분하다고 비판하면서, 셈수를 강조해 온 전통적인 교수학적 방법이 다시금 부활되어야 한다고 주장한다. 셋째, 수와 그 연산 지도에 있어 수직선이 중요한 역할을 해야 한다. 수직선은 수를 시각화해주고, 무한을 표현하는 데에도 용이하며, 다른 크기의 눈금을 사용하면 서로 다르면서도 같은 것을 나타낼 수 있다. 넷째, 자연수의 십진 기수법 구조의 지도에 주의를 기울여야 한다. 자연수의 구조를 획득하는 방법은 십진법이라고 하는 자연수에 부여된 기수법의 구조를 획득하는 방법 밖에 없으며, 주판을 십진법의 묶기 구조와 자리 법칙을 구현하고 있는 유용한 교구로 사용될 수 있다.

Freudenthal은 자신의 논의를 구체적인 교육과정의 형식으로 구현하여 제시하고 있지 않지만, 그의 논의는 Freudenthal 연구소를 중심으로 연구되어 온 '현실주의 수학교육'의 수 개념 지도에 상당부분 반영되어 있다. 「Children Learn Mathematics」(2002)가 그 대표적인 자료이다. 이 책에서는 자연수를 개념적으로 접근하기보다는 현실의 문맥 속에서 수 세기 능력을 발달시키고 수의 다양한 의미를 경험하게 하고, 이러한 과정 속에서 수를 구조화해 나가고자 한다. 수적 능력이 발달하기 시작하는 학령 전 단계를 수 세기와 수 감각을 기르는 시기로 풍부한 문맥 상황을 제시하고 다양한 활동을 통해 수 세기 능력의 발달에 중점을 둔다. 계산의 기초로서 개수 세기 능력이 획득되면 학령 전의 주요 학습 내용인 수 세기와 계산을 학습하게 되며, 이는 '문맥과 관련된' 수 세기와 계산, '대상과 관련된' 수 세기와 계산, '순수한' 수 세기와 계산이라는 세 수준으로 진행된다. 학령 전 단계에서 아동이 일상생활 문맥 속에서 수를 경험하였다면, 학교 교육에서는 실세계 곧 문맥 속에서의 수와는 별도로 수의 구조에 관심을 둔다. 그리하여 초등학교 1학년에서는 수 세기 활동을 바탕으로 20까지의 세기 열과 다양한 구조적 모델 및 구조화 전략을 통해 수의 구조 및 연산을 다루게 된다. 수 세기와 계산은 '수 세기와 계산', '구조화를 통한 계산', '형식적인 계산' 세 수준으로 구분된다. 1학년의 계산 지도는 문맥 상황으로부터 점점 산술 내의 체계적인 활동으로 이동하도록 구성된다.

이상에서 우리는 Dewey, Piaget, Davydov, Freudenthal의 자연수 개념 지도에 관한 활동주의적 접근 방법을 살펴보았다. 이들은 모두 활동을 중심으로 한 자연수 개념 지도 방법을 논의하고 있지만, 자연수 개념에 대한 입장이 상이한 만큼, 자연수 개념 지도에서의 중심적인 활동의 내용과 같은 세부적인 면에서는 적지 않은 차이를 보이고 있다.

Ⅳ. 우리나라 교육과정에서의 자연수 개념 지도 과정 분석 및 개선 방향 탐색

이 장에서는 지금까지 고찰한 것을 바탕으로 현행 우리나라 교육과정의 자연수 개념 지도 과정을 [1-가 단계]부터 [4-가 단계][3]에 중점을 두어 분석하고 그 개선 방향을 탐색한다.

1. 자연수 개념 지도 과정 분석

셈수적 측면과 관련하여 수 세기, 개수 세기, 자연수열의 구성원리라는 세 가지 차원에서 분석하였다. 수 세기는 [1-가 단계] 초기부터 다양한 활동이 주어진다. 수 세기에 의한 개수로 자연수 개념을 지도한 후에 하나 더 많은 것, 하나 더 적은 것을 통해 자연수의 구성과 순서관계를 다룬다. 교과서의 쪽수나 수 배열표를 통해 수의 계열과 순서관계를 지도하고 있다. 선형적인 수의 배열 속에서 연속된 수를 순서대로 쓰는 활동은 수 계열의 구성 원리가 내재되어 있으나 교과서에서는 그것을 반성하도록 지도하고 있지 않다. [4-가 단계]는 다섯 자리 이상의 수 범위로 확대하여 자연수를 마무리짓게 되므로 수 계열의 구성 원리를 반성하게 하기에 적절하지만, 화폐 모형을 통해 조 단위까지 지도하면서 자리잡기에 의한 십진기수법의 이해와 활용에 중점을 둔다. 즉, 자연수열의 구성과 자리값의 원리에 초점을 맞추고 있을 뿐 자연수열의 특성에 대한 반성이 이루어지도록 하고 있지 않다. 이는 셈수의 구성 원리 곧 수학적 귀납법의 원리를 무한집합인 자연수 전체의 생성 원리로 이해하는 것과는 큰 차이가 있다. 초등학교 [4-가 단계] 이후 셈수의 구성 원리에 대한 반성이 거의 이루어지지 않다가, 고등학교에서 갑작스럽게 셈수의 핵심인 자연수열의 가장 기본이 되는 성질을 형식화한 수학적 귀납법의 원리에 따른 수학적 귀납법이 지도된다. 수학적 귀납법은 고등학교 수학에서 무한집합에 대한 성질을 증명하는 최초의 경험으로, 이는 현대 수학의 매우 중요한 사고방법 중의 하나이다. 수학적 귀납법이 의미 있게 지도되기 위해서는, 무한집합인 자연수열의 구성에 관한 직관적 인식이 바탕이 되어야 하지만, 무한집합인 자연수열의 구성 원리에 관한 반성적 논의가 이루어지지 않은 채, 자연수에 관한 전칭명제를 증명하는 방법으로 갑작스럽게 등장하여 학생들이 그 의미를 이해하기 어렵다.

<표 Ⅲ-1> 활동주의적 자연수 개념 지도에 관한 입장 비교

	Dewey	Piaget	Davydov	Freudenthal
지도 방법	• 측정 활동을 통한 구성적 방법	• 분류, 계열화, 대응 활동을 통한 수 조작의 구성	• 양의 조작 활동과 기호 표현	• 셈수적 접근을 통한 점진적 수학화
활동 내용	• 측정 활동 • 단위를 달리한 다양한 수 세기 활동	• 분류, 순서짓기, 짝짓기 활동 • Cuisenaire 색막대 조작 활동	• 비교하고 관계 짓는 활동, 측정활동 • 수학적 관계를 기호로 나타내는 활동	• 세 수준의 수 세기 활동 • 세 수준을 거치는 계산 활동

3) [수학 1-가] 단계부터 [수학 4-가] 단계까지의 교과서는 교육인적자원부(2002)를 사용하였다.

순서수적 측면에서 자연수를 지도한다는 것은 초등학교 1학년의 경우 대상이 제시되었을 때 차례대로 순서가 정해지는 경우 그 순서를 나타내는데 자연수가 사용된다는 것을 이해하도록 하는 것이다. 이를 위해 다양한 활동이 사용되고 있지만, 활동을 통해 순서수 개념을 이끌어내는 것이 아니라 순서수의 의미를 익히기 위해 활동이 제시된다. 이는 활동으로부터 개념을 이끌어내도록 하는 활동의 도입 취지에 어긋난다. 활동주의적 관점에서 순서수 개념의 구성을 위해서는 사물을 차례로 배열하는 활동, 배열된 두 집합 사이의 사물을 순서대로 대응하는 활동을 통해 계열화 조작을 구성하도록 하는 것이 적절한 것으로 보인다.

개수적 측면은 우리나라 교육과정에서 수 개념 지도의 중심을 이룬다. 사물의 개수를 세어 본 후, 대상과 수도를 제시하여 수를 정의한다. 이후 수 모형을 통한 직관적인 10의 인식, 묶음과 낱개를 통한 전체 개수 파악, 이를 통한 십진기수법의 이해 등을 다룬다. 한편, 학교수학에서 기수적 측면은 집합론의 기수 개념을 초등화한 형태인 대등한 집합의 공통성질로 다루는 것으로 나타났다. 그 특징적인 방법은 일대일 대응을 초등화한 짝짓기이다. 제7차 교육과정에서는 기수적 측면을 특징짓는 일대일 대응 곧, 짝짓기 활동이 두 수의 크기 비교와 관련하여서만 취급되고 있다. 제7차 교육과정에서는 집합론식의 기수 개념은 지도되지 않고 있다.

측정수적 측면은 양의 비교 활동 또는 측정 활동과 수의 도입 사이의 선후 관계, 측정수 개념의 핵심인 단위의 다양성 문제를 중심으로 분석할 수 있다. 제7차 교육과정에서는 측정 영역이 수 영역과 독립적인 단원으로 설정되어 있으며, 수 개념을 학습한 후 측정 영역을 별도의 내용으로 다루게 되어 있다. 수 개념을 지도하기 위한 수단으로 측정 활동이 사용되는 것이 아니라, 오히려 반대로 측정값을 표현하기 위해 수가 사용된다. 다시 말해 측정수가 수의 개념적 측면으로 지도되고 있지 않다. 측정은 양감을 기르기 위해 길이, 높이, 들이, 무게, 넓이 등 다양한 양을 비교하는 활동으로부터 정확한 양의 비교를 위한 길이재기로 이어지며, 그 후 길이 비교, 임의 단위에 의한 길이 측정, 보편 단위에 의한 길이 측정이라는 활동을 수행하게 된다. 양을 비교하는 활동을 단순히 양감을 기른다는 측면에서만 접근하고 있으며, 여러 가지 단위로 측정하고 난 후 단위에 따라 측정값이 달라진다는 것을 확인하도록 하고 있지만, 이는 어디까지나 표준 단위의 도입이 요구된다는 점에 초점이 맞추어진 것이다. 제7차 교육과정에서는 전반적으로 측정 활동을 통해 전체량과 단위 사이의 관계인 비로서의 수 개념을 지도하려는 것이 아니라, 측정 결과를 나타내는 수단으로 수가 사용되고 있다. '수 → 측정 활동'으로의 방향이 '양의 크기는 얼마인가?' 하는 질문과 관련된다면, '측정 활동 → 수'로의 방향은 '수는 무엇인가?' 하는 질문과 관련된다. 이 둘은 원천적으로 다른 질문에 속한다. 제7차 교육과정에서는 측정수의 개념적 지도가 명시적으로 이루어지지 않고 있다고 할 수 있다.

제7차 교육과정에 따른 교과서를 분석한 결과, 수 개념의 지도가 [4-가 단계]에서 마무리되고 있으나, 개념적 측면에서의 수 지도는 1학년 1학기 초반부에 집중되어 있다. 이후에는 수 '범위'의 확장은 이루어지지만, '개념적' 영역이 확장되고 있지는 않다.

2. 자연수 개념 지도의 개선 방향 탐색

앞의 이론적 논의와 교과서 분석을 바탕으로 자연수 개념 지도의 개선 방향을 다음과 같이

몇 가지로 제시할 수 있다.

첫째, 자연수 개념은 그 제 측면을 모두 지도할 필요가 있다고 생각된다. 앞 장에서 논의한 바와 같이 자연수 개념은 복합적인 개념으로서 역사적으로 수리철학적으로 인식론적으로 심리학적으로 교육학적으로 다양한 측면에서 논의되어 왔으며 다양하게 해석되어 왔다. 또한 자연수 개념 및 그 지도에 대한 활동주의적 접근을 주장하는 제 학자들의 이론은 활동을 통해 자연수 개념을 구성한다는 공통된 접근 방식에도 불구하고, 인식론적 관점에 따라 각기 다른 개념적 측면을 중심으로 자연수 개념의 발생과 본질 및 그 지도에 관해 논의하고 있다. 한편, 수 개념 지도의 역사를 살펴보면, 수 개념이 다양한 측면을 지니고 있음에도 불구하고, 특정 측면에 편중된 지도가 이루어지고, 그에 대한 비판으로서 다른 대안이 제기되고, 다시 그러한 대안에 대한 문제점이 제기되는 순환이 반복되었다고 해도 과언이 아니다. 19세기 말부터 20세기에 등장한 수 개념에 대한 다양한 심리학적 접근과 그에 따른 교과서의 구성은 그러한 순환의 역사를 보여준다 (Clason, 1968). 또한 19세기 독일의 직관주의와 세기주의의 극심한 논쟁, 20세기의 수 세기와 수도의 결합을 통한 조정 노력, 그에 대한 논리주의적 관점에서의 비판 역시 그와 유사한 맥락에 있다고 할 수 있다(우정호, 1998). 수는 여러 가지 개념의 복합체이므로 수학교육에서 어느 한 측면만을 강조하는 것은 바람직하지 않으며, 가능한 한 수 개념의 제 측면을 이해할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

수 개념의 제 측면을 통합적으로 지도해야 한다는 관점에서 볼 때, 우리나라 수 개념 지도에서는 반성적 논의를 통해 자연수열의 구성 원리에 관한 보다 명확한 인식이 가능하도록 셈수적 측면의 지도가 보강되어야 할 것이며, 양과 측정을 수에 대한 개념적 접근과 무관하게 다룰 것이 아니라 측정 활동을 통해 전체량과 단위 사이의 비라는 자연수의 측정수적 측면의 지도가 이루어지도록 해야 할 것이다. 기수적 측면과 관련하여서는 대등한 집합 사이의 짝짓기 활동을 통한 수의 보존 개념이 다루어질 필요가 있다고 생각된다. 아동에게 수를 대등한 집합의 공통성질로 인식하도록 하는 것은 무리가 있지만, 보존 개념을 자발적으로 형성하게 되는 학령기 아동에게 집합의 원소 사이의 짝짓기 활동을 기초로 그 대등성을 확인하고 수의 보존을 이해하는 형태로 기수적 측면을 지도하는 것이 필요하다고 생각된다.

둘째, 학령 초의 자연수 개념의 지도는 활동주의적으로 접근해야 할 것이다. 활동주의에 따르면, 지식은 인식 주체의 능동적인 활동으로부터 구성되는 것이다. 그런데 지식의 활동적 구성의 성격을 밝히고 있는 제 학자들은 자신의 이론을 한결같이 자연수 개념의 구성으로 예시하고 있다. 이는 자연수 개념이 그 만큼 활동주의적 접근에 적합한 소재가 되기 때문이다. 자연수는 학교수학의 출발점으로 이제 막 학령기에 들어서는 아동이 접하게 되는 최초의 개념이며 수학의 출발점이다. 특히 자연수는 수 체계의 가장 기본이 되는 수로서, 인지 발달 과정에서나 학습의 논리적, 수학적 순서에 있어 가장 기본이 된다. 무엇보다 자연수 개념을 학습하는 학령 초의 아동의 학습에서는 구체적인 활동이 절대적인 중요성을 갖는다. 따라서 자연수 개념의 제 측면의 지도는 활동주의적인 접근을 통해서만 의미 있게 지도될 수 있을 것이다. 수학적 개념의 학습에서 활동의 의미는 그러한 활동을 통해 개념이 구성된다는 데 있다. 활동적 학습 원리의 핵심은 구체적인 활동을 통한 조작의 구성이다. 자연수 개념의 지도를 활동주의적으로 접근한다고 할 때, 구

체적으로 어떤 활동을 통해 지도할 것인가 하는 것이 중요한 문제가 된다. 활동주의적 접근의 특징은 개념-특수적이므로 구성하고자 하는 개념의 본질과 관련된 실제적인 활동을 찾는 것이 중요하다. 앞에서 살펴본 학자들은 자연수 개념의 본질을 특정 측면에 초점을 두어 설명하면서 그와 관련된 활동을 제시하였다. 이와 달리 우리나라 수학 교과서에서의 활동적 접근은 전달하고자 하는 개념이 주어지고 이를 예시하는 활동이 주어지고 있다는 점에서 활동의 반성을 통한 개념의 구성과는 구분되어야 한다. 이는 우리나라 수학교육과정이 지식의 활동적 구성의 의미에 대한 명확한 이해가 결여된 상태에서 제시된 소위 구성주의 인식론을 바탕으로 한 방법적 원리로서 활동 중심의 교수 학습 원리를 지향한 데에서 나온 귀결이라고 할 수 있을 것이다. 한편, 수학적 지식의 구성을 위한 구체적인 활동의 장을 마련하는 데 있어서 교구의 활용이 유용할 수 있다(김응태, 박한식, 우정호, 1994: 111). 자연수 개념이 활동적으로 구성된다는 입장에서 보면, 지도하고자 하는 자연수 개념의 본질을 잘 구현할 수 있으면서도 아동의 적극적인 활동을 유도할 수 있는 적절한 활동적 교구가 유용하게 사용될 수 있다고 판단된다.

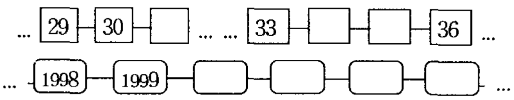
셋째, 학령 초부터 수 개념의 제 측면을 경험할 수 있도록 관련된 활동을 적절한 교구를 통해 제시하고 그로부터 자연수 개념의 다양한 측면에 대한 수 감각을 구성하도록 하는 구체적인 지도 방안을 고안하는 것이 바람직할 것으로 생각된다. 우리나라 교육과정 분석에서 살펴본 바와 같이, 개념적 측면에서의 자연수 지도는 실질적으로 1학년 1학기 초에 주로 이루어지고 고등학교에서 수학적 귀납법의 원리를 다루기까지 자연수 개념을 거의 다루지 않는다. 그 결과 자연수 개념에 대한 불명확한 이해 상태와 수학적 귀납법의 지도에서 일어나는 것과 같은 개념적 단절의 문제가 야기된다. Freudenthal은 이와 같이 수학적 귀납법이 지니는 중요성에 비추어 자연수열의 생성원리에 대한 직관적 의식의 점진적인 수학화의 교수학적 의의에 주목하였다. Dieudonné(1961)가 경험적인 또는 준-경험적인 바탕 위에서 수학적 이론에 익숙해지도록 좀 더 빠른 시기에 산술법칙의 타당성의 증명에 주목할 것을 강조한 것은 학령 초부터 셈수에 대한 의식적인 지도를 강화해야 한다는 사실을 뒷받침한다.

Dewey와 Davydov는 측정수의 교수학적 의의를 이후 학습하게 되는 분수, 실수와의 유기적 관계에서 찾고 있다. 바꾸어 말하면, 측정수적 측면에 대한 개념적 지도가 이루어지지 않을 경우, 고정 단위 개념에 고착되어 단위 변환에 자유롭지 못하며 자연수에서 실수에 이르는 수 체계의 유기적 관계를 이해하기 어렵다는 것이다. 그러므로 전체와 단위 사이의 비로서의 측정수는 자연수 개념의 지도에서부터 이루어질 필요가 있다. 두 사람은 측정수 개념은 양을 다루는 활동으로부터 어린 아동에게도 학습이 가능하다는 것을 보여주고 있다. 그러므로 자연수 개념의 제 측면의 지도는 학령 초부터 시작하여 지속적으로 다루는 것이 적절하며, 자연수 개념의 제 측면에 대한 초보적인 인식을 바탕으로 그 수학화 과정을 점진적으로 심화·확장시켜나가야 할 것이다.

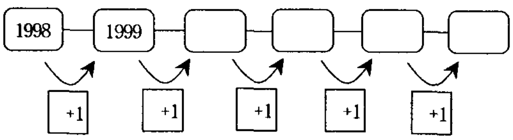
학령 초부터 수 개념의 제 측면에 대한 초보적인 인식을 갖도록 한다고 할 때 어느 수준까지 다룰 것인가 하는 점과 관련하여, 개수적 측면과 순서수적인 측면의 지도는 학령 초에 완성될 수 있는 것으로 보인다. 다만 기수적 측면을 고려하여 10미만의 자연수를 학습하는 단계에서 집합의 원소 사이의 짝짓기 활동을

기초로 그 대등성을 확인하는 가운데 수의 보존 개념을 의식하도록 하는 내용이 보완될 필요가 있을 것으로 생각된다.

셈수적 측면의 지도에서는 학령 초에 '하나 더 많은 수, 하나 더 적은 수'를 지도할 때 주어진 수에 1을 더해 그 다음 수를 생성하게 된다는 자연수열의 성질을 적극적으로 드러내어 수의 구성 원리를 부각시킬 필요가 있다. 이후 더 큰 수를 지도할 때 십진기수법의 이해에만 초점을 둘 것이 아니라 아래와 같이 점을 찍어 1을 더해 큰 수가 반복적으로 구성되어 자연수열이 무한히 구성되어져 간다는 동적인 차원을 부각시키는 것이 필요하다고 생각된다.



자연수열의 구성 원리를 반성하도록 하기 위해서는 '(앞의 수)+1=(다음 수)'와 같은 도식이 적절히 사용될 수 있을 것이다.



[그림 Ⅳ-1] 자연수열의 구성에 대한 반성적 이해

이와 같은 자연수열의 생성 원리가 동일한 방식으로 두 자리 수, 세 자리 수에 적용된다는 것을 강조하고, 큰 수를 다루는 단계에서 수의 무한성을 직관적으로 다룰 필요가 있다.

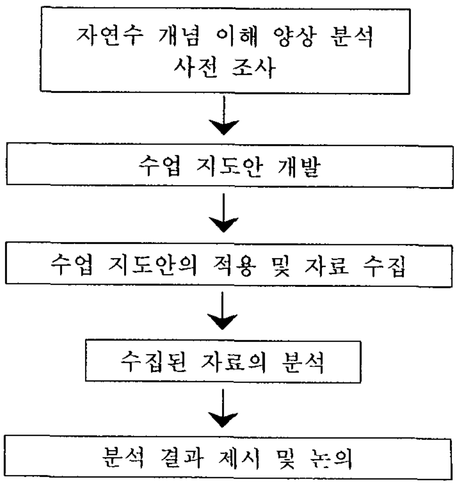
자연수 개념의 측정수 측면은 양을 비교하고 측정하는 활동을 통해 지도 가능하다. 측정수의 본질은 전체가 단위에 따라 상대적으로 결정되는 비라는 것이므로, 학령 초에 서로 다른 단위를 가지고 양을 측정하는 활동을 수행하는 가운데 수가 단위에 의해 상대적으로 결정된다는 사실을 이해하고 자연수를 그와 같은 관점에서 비로서 이해하도록 하는 것이 요구된다. 그리고 측정수의 핵심적인 특징 중의 하나가 이산량과 연속량의 구분을 없앴다는 것임을 생각할 때, 그러한 활동을 이산량과 연속량 모두에 대해 수행할 필요가 있다.

Ⅴ. 자연수 개념의 제 측면에 대한 학령 초의 활동주의적인 통합적 접근

여기서는 학령 초부터 자연수 개념의 제 측면을 경험할 수 있도록 하는 활동주의적인 통합적 접근을 교수 실험을 통해 구현해보고자 한다.

1. 교수실험 방법 및 절차

교수실험은 수업 지도안 개발과 그에 따른 아동들의 활동의 분석이라는 두 가지 문제에 초점을 맞춘다. 이 연구에서는 다음과 같은 교수실험 절차를 따라 진행된다.



[그림 Ⅴ-1] 연구 절차

수업에서 나타나는 아동의 학습과정의 특성을 살펴보기 위해서는 자연스러운 교수 상황에서 일어나는 학습과정에 초점을 두는 질적 연구 방법을 취한다.

이 연구에 참여한 아동은 경기도 안양시에 소재한 A 초등학교 1학년의 같은 반 아동 4명과 서울시 관악구에 소재한 C 초등학교 1학년의 같은 반 아동 4명이었다. 아동들의 지식 수준에 따라 대상을 선정하고자 하였으나 이제 막 입학한 아동들이므로 지식수준이나 학습 능력을 검증하기 어려웠다. 이들은 대체로 한글과 10까지의 수를 적을 수 있었다. 방과 후 실험 수업에 참여할 시간적 여유가 있는 아동들을 부모의 동의 하에 선정하였으며, 선정된 아동들은 거주지나 부모의 교육정도, 경제 형편, 선행 학습 정도 등 외적인 조건 면에서 다양하였다.

교수실험 연구를 위한 자료수집 방법으로 검사지, 비디오 녹화, 오디오 녹음, 비형식적 면담을 사용하였다. 아동의 자연수 개념 이해 양상을 파악하기 위해 실시된 사전 조사는 제작된 문항을 중심으로 질문한 뒤 답을 하도록 하는 방식으로 이루어졌다. 조사는 임상적 면담 형식으로 이루어졌는데, 이는 어린 아동에게 지필 형식이 적절하지 않다고 판단되었고, 학생들이 무엇을 알고 있는지를 평가할 뿐만 아니라 대답을 하는 과정, 그리고 그렇게 믿게 된 이유를 평가할 수 있게 해주기 때문이었다. 검사지를 만들었으나 실제 조사에서는 주로 연구자가 각 문항의 질문 내용을 미리 외워 설명해주는 형식으로 진행하였으며, 동시에 질문하는 집단적인 임상적 면담 형식을 취하였으며, 각 아동의 반응을 개별적으로 살펴볼 필요성이 있다고 판단된 경우 개별적인 면담 형식으로 조사하였다. 전체 문항의 조사 과정은 녹음하여 분석하였다.

연구자가 직접 수업을 진행하였으므로 아동들의 반응에 따라 다양한 발문을 제시하여 수업의 흐름을 잡아갈 수 있었고, 특정 아동의 독특한 반응에 대해 개인적인 심층 질문을 통해 그의 내적인 이해 상태를 좀더 면밀하게 이해할 수 있었다. 그러나 객관적인 관찰자로서 세부적인 특징들을 포착하기 어려웠고, 관찰하거나 경험한 내용을 즉석에서 기록할 수 없다는 한계가 있었다. 이를 보완하기 위해 연구자 편에 녹음기를 두고 반대편에 비디오를 두어 수업의 진행 과정을 녹화하였다. 수업이 끝난 즉시 수업 중에 아동들이 나타낸 활동의 특징을 상기하면서 비디오를 반복해서 관찰하며 대화를 전사하였다.

2. 아동의 자연수 개념 이해 양상 조사

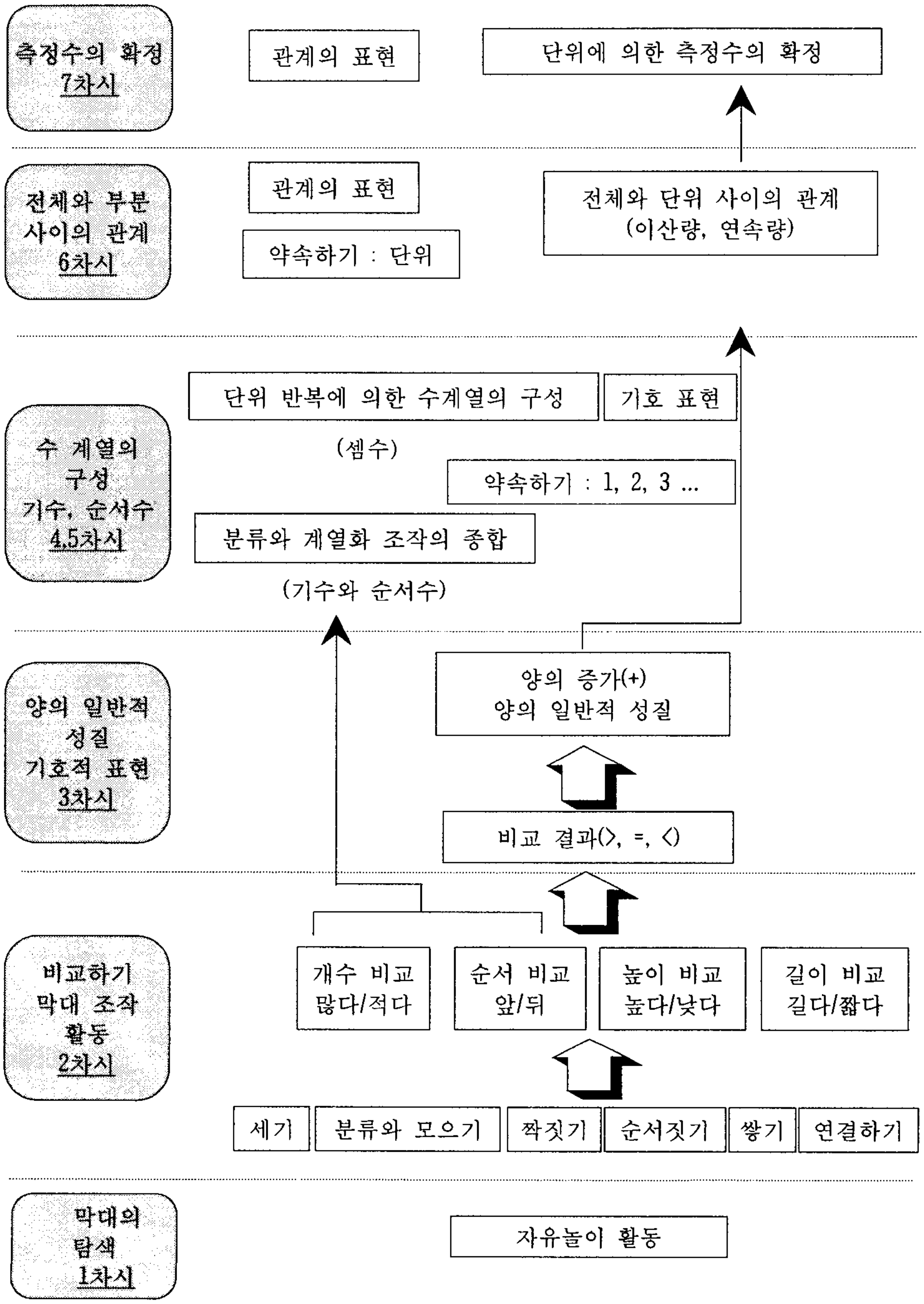
아동의 자연수 개념의 이해 실태를 분석하기 위해 문항을 크게 자연수의 제 측면과 관련하여 자연수 계열의 구성 원리에 관한 이해, 집합의 대등성을 비롯한 기수에 관한 이해, 순서수 개념의 이해, 측정수 개념의 이해 네 가지로 나누었다. 각 문항의 내용은 본 연구에서 다룬 네 학자들의 자연수 개념에 대한 견해를 참조하여 구성하였다.

조사 결과, 수 세기, 기수의 보존과 대등성 개념의 이해에는 거의 문제가 없었으나 자연수 개열의 무한성에 관한 직관적 인식, 측정수 관련 문항에 대해서는 낮은 이해도를 나타내었다.

3. 자연수 개념의 제 측면의 통합적 지도를 위한 활동적 교재 구성

Cuisenaire 색막대는 자연수 개념뿐만 아니라 그 연산과 수 사이의 관계, 나아가 분수와 소

수까지 취급할 수 있게 하고, 그 밖의 여러 가지 수학적 내용의 이해를 돕기 위한 활동적 교구로 인정되어 널리 사용되어 왔다(김응태 외, 1994: 245). Cuisenaire 색막대의 조작은 본질적으로는 막대의 끝과 끝을 맞추어 놓는 것과 그것을 옆으로 나란히 놓는 것 두 가지 행동에



[그림 V-2] Cuisenaire 색막대를 이용한 자연수 개념 학습의 흐름도

기초한다(Gattegno, 1963: 47) 그럼에도 불구하고 Cuisenaire 색막대는 분류하고 모으기, 크기 순서대로 나열하기, 수의 구조적 관계를 파악하기, 막대의 크기를 상대적으로 결정하기, 색깔을 나타내는 머릿글자를 이용하여 조작 활동의 결과를 나타내기 등 탐구 상황을 풍부하게 구성할 수 있는 교구이다. 무엇보다 수 조작과 동형인 실제적인 활동을 쉽게 할 수 있기 때문에 아동 자신에 의한 수 조작의 자발적 구성을 도울 수 있는 조작적인 교구로 활동될 수 있다 (Piaget, 1971: 48-49). 따라서 본 연구에서는 Cuisenaire 색막대를 이용하여 자연수 개념의 제 측면을 통합적으로 지도하는 활동적 접근을 시도하였다.

활동을 통해 자연수 개념의 제 측면을 통합적으로 지도한다고 할 때 어떤 방식으로 계열성을 부여할 것인가 하는 문제가 대두된다. 직관주의자들은 자연수를 셈수적 측면에서 파악하며, 직관이라는 정신 능력의 산물로서 얻어진다고 말한다. 자연수열의 인식은 이성이나 일반적인 판단의 발달과 거의 무관하며, 다양한 연속적이고 율동적인 운동 속에서 가능한다. 아동의 발달에서 수사를 듣고 모방하며 무의식적으로 사용하는 능력을 생각할 때 셈수는 수 개념 발달의 첫 단계를 이룬다는 것이다. 이는 자연수 개념의 지도에서 초기 단계에 셈수가 자연스럽게 지도될 수 있다는 근거가 된다. 다만 이것은 셈수의 구조적 의식과는 구분된다. 한편, Piaget의 주장에 따르면, 일대일 대응에 의한 대등성과 수의 보존 개념에 관한 이해는 구체적 조작기의 아동에게 인지적으로 큰 부담을 주지 않는다. 이에 반해 측정수는 단위의 변환과 그에 따른 전체량과의 상대적인 관계라는 비교적 복잡한 사고를 요구한다. 일상적인 경험 세계에서 고정 단위에 익숙한 아동에게 단위 변환이라는 것은 상당한 인지적인 어려움을 유발하며, 주어진 양의 값이 단위에 따라 상대적으로 정해진다는 것 역시 그 이해가 용이하지 않을 것으로 생각된다. 그러므로 자연수 개념의 제 측면을 지도하는 계열에 있어서, 수 세기나 개수 세기와 같은 초보적인 활동은 초기에 다루되, 자연수열의 계열적 구성에 관한 이해는 나중에 다룬다. 자연수열의 계열적 구성에 관한 이해는 기수와 순서수 개념과 비교할 때 그 우선성을 논의하기가 쉽지 않지만, 자연수 개념 이해 양상 조사 결과를 토대로 기수와 순서수 개념을 다룬 후에 시간적 간격을 두지 않고 자연수열의 구성을 다룬다. 측정수 개념은 관계 개념으로서의 그 인지적 복잡성을 고려하여 맨 나중에 다룬다. 전체적으로 수업은 Cuisenaire 색막대에 대한 탐색으로부터 시작하여 총 7차시로 구성되었다.

4. 아동의 조작 활동 및 반응 분석

실험 수업의 목적은 자연수 개념의 제 측면에 대한 통합적 인식이 어떤 형태로 어느 정도로 가능한지 알아보는 것이었다. 특히 Cuisenaire 색막대가 수 개념의 제 측면에 대한 활동주의적인 지도에 어떤 방식으로 기여하는지 알아보는 것이 주요 목적이라고 할 수 있다. 분석은 녹화 내용의 전사 자료와 관찰 노트를 토대로 하였으며, 아동들의 막대 조작 방식, 막대를 조작한 후의 반응 양상, 막대의 조작 활동이 자연수 개념 이해에 작용한 방식, 그것으로부터 이끌어 낼 수 있는 함의점 등에 초점을 맞추어 분석하였다.

아동의 수 개념 이해 양상에 관한 사전 조사와 수업에서의 활동 양상을 분석한 결과를 토대로 자연수 개념의 이해 수준을 평가하기 위한 기준을 다음과 같이 상정하였다.

실험 수업에 참여한 8명의 아동들이 사전 조사에서 보인 자연수 개념의 이해 수준과 실험 수업 이후의 이해 수준을 비교하면 다음 표와 같다. 사전 조사에서 아동들은 기수와 순서수 개념은 비교적 잘 이해하였으나 셈수와 측정수 개념의 이해는 미흡하였다.

셈수의 경우, 수가 끝이 없다는 것을 받아들이지 않거나 무한을 '조' 또는 '해'와 같이 무한히 큰 수를 지칭하는 하나의 용어로 간주하였다. 측정수의 경우, 임의단위를 제시한 후 전체의 값을 결정하도록 하였을 때, 주어진 단위와 무관하게 처음부터 개별 사물을 단위로 하여 전체의 값을 결정하거나 단위로 주어진 것을 첫 번째에만 적용하고 그 다음부터는 다시 고정단위를 적용하여 전체의 값을 결정하였다.

실험 수업을 마친 후에는 모든 아동의 자연수 개념의 제 측면에 대한 이해 수준이 매우 높아졌다. 셈수의 경우, 수업에서의 막대 조작 활동을 상기하면서 손동작이나 그와 같은 활동을 반복하면서 적절하게 설명하였다. 측정수의 경우, 대체로 아동들은 전체로서 주어진 것이 단위에 의해 상대적으로 결정된다거나 단위를 반복 적용해서 전체의 값을 결정해야 한다는 것을 이해하였다. 전반적으로 아동들은 자연수 개념의 이해에 있어 바람직한 방향으로 변화되었다. 이는 Cuisenaire 색막대를 이용한 활동주

<표 V-1> 자연수 개념의 이해 수준 평가 기준

셈수	C1	자연수를 유한한 것으로 인식한다.
	C2	자연수는 무한히 많다고 말하나 자연수 계열의 구성 방식을 설명하지 못한다.
	C3	자연수 계열의 구성 방식을 활동이나 말로 적절하게 설명한다.
기수와 순서수	CO1	일대일 대응이나 순서 대응을 할 수 없다. 보존 개념이 결여되어 있다.
	CO2	시행착오를 거쳐 일대일 대응과 순서 대응을 시킬 수 있다. 시행착오를 거쳐 대등성을 인식한다.
	CO3	일대일 대응이나 순서 대응을 자유롭게 할 수 있다. 보존 개념을 이해하고 대등성의 개념을 인식한다.
측정수	M1	고정단위에 구속되어 있으며, 임의단위에 따른 측정수를 결정하지 못한다.
	M2	임의단위를 의식하지만 측정수를 결정하기 위해 반복해서 적용하지 못한다.
	M3	임의단위를 반복 적용하여 측정수를 정확하게 결정한다.

<표 V-2> 아동별 자연수 개념 이해 상태 변화

	셈수	기수와 순서수	측정수(이산량)	측정수(연속량)
학생 A	C1 → C2	CO3 → CO3	M3 → M3	M3 → M3
학생 B	C2 → C3	CO2 → CO2	M2 → M2	M2 → M2
학생 C	C1 → C3	CO2 → CO2	M1 → M3	M2 → M3
학생 D	C1 → C3	CO2 → CO2	M2 → M3	M2 → M3
학생 E	C3 → C3	CO3 → CO3	M2 → M3	M2 → M3
학생 F	C2 → C3	CO3 → CO3	M3 → M3	M3 → M3
학생 G	C2 → C3	CO3 → CO3	M3 → M3	M1 → M3
학생 H	C2 → C3	CO3 → CO3	M1 → M3	M3 → M3

의적 수업이 자연수 개념의 이해 및 구성에 긍정적인 영향을 미쳤다는 것을 의미한다. 또한 활동주의적인 접근을 활용한다면 학령 초에도 자연수 개념의 제 측면에 대한 초보적인 인식이 가능하다는 것을 보여준다.

5. 논의

교수실험에 대한 전반적인 분석 결과 다음과 같은 함의점을 얻을 수 있었다.

첫째, 기수와 순서수의 경우, 아동이 이미 일대일 대응과 순서 대응을 이해하고 있으므로 분류와 짝짓기, 순서 짓기와 같은 활동을 통해 이미 이해하고 있는 사실을 확인시켜주면서 기수와 순서수를 자연수의 개념적 측면으로 의식하도록 하는 수준에서 지도될 필요가 있다.

둘째, 셈수의 경우, 학령 초에는 막대 배열 활동과 같이 구체물을 조작하는 활동을 통해 자연수 계열의 구성 원리에 초점을 맞추고, 무한 수계열로의 확장은 아동의 인지 수준을 고려하여 차후로 미룰 필요가 있다. 구체적으로 두 자리 수, 세 자리 수 등에 대한 학습에서 셈수의 성질에 관해 계속해서 강조하고, 큰 수를 다루는 과정에서 무한 수계열의 구성 원리를 제시하는 것이 적절하다.

셋째, 측정수의 경우, 단위의 변환에 친숙해지도록 다양한 측정 활동을 제공해야 한다. 아동은 이산량에 대해서는 개별 사물을 하나의 단위로 생각하며, 연속량에 대해서는 나름대로 생각하는 일정한 크기 자체를 정해진 단위로 생각하는 경향이 있다. 다양한 비교 준거에 따라 비교하는 활동, 다양한 단위에 의해 전체값을 결정하는 활동이 풍부하게 이루어져야 한다. 또한 학령 초에 전체-단위-수 사이의 관계를 일반적인 수준에서 이해하는 것은 무리가 있으므로, 구체물이나 그림을 사용하여 전체와 단위 사이의 관계를 파악하게 하는 것이 적절하다.

넷째, 실험 수업에서 사용한 기호적 표현 활동은 아동이 수행한 활동의 결과를 정리하고 활동의 본질을 드러내는데 매우 긍정적으로 작용한다는 것을 알 수 있었다. 그러므로 각각의 개념 학습시 필요에 따라 적절한 형태의 기호적 표현을 구상하여 사용할 것을 제안한다.

Ⅵ. 요약 및 결론

본 연구에서는 '학령 초에 자연수 개념을 어떻게 지도하는 것이 좋은가?'하는 문제에 대해, 자연수 개념의 제 측면에 대해서 현대 수학교육의 근본적인 이념이 되고 있는 활동주의적 접근을 시도하고자 하였다. 이를 위한 이론적 바탕으로 Kant, Dewey, Piaget, Davydov, Freudenthal의 인식론을 중심으로 지식의 활동적 구성에 대한 이론과 활동을 통한 자연수 개념의 구성 및 자연수 개념 지도의 활동주의적 접근에 관한 이론을 분석 고찰하고, 역사적, 수리철학적 고찰을 통해 자연수 개념의 제 측면에 관해 논의하였다. 이러한 이론적 분석을 바탕으로 우리나라 수학교육과정에서의 학령 초의 자연수 개념 지도 과정의 문제점을 분석하고 자연수 개념의 제 측면을 종합적으로 지도하는 활동주의적인 접근 방향을 탐색하였다. 그리고 그러한 지도 방향에 따라 학령 초에 Cuisenaire 색막대를 이용하여 자연수 개념의 제 측면을 지도하기 위한 활동주의적 접근을 시도하였다. 실험 수업의 결과 Cuisenaire 색막대를 이용한 활동주의적 수업이 수 개념의 이해 및 구성에 긍정적인 영향을 미치며, 활동적인 접근을 활용한다면 학령 초에도 수 개념의 제 측면에 대한 초보적인 인식이 가능하다는 것을 확인할

수 있었다.

본 연구에서는 학교수학에서 처음 학습하게 되는 학령 초의 자연수 개념의 활동적 구성 및 그에 따른 지도 문제에 초점을 맞추어 논의하였으며 이후 수 개념 지도에 관해서는 논의하는 과정에서 필요한 정도로 대략적인 제안을 하였다. 그러므로 학령 초의 활동을 통한 자연수 개념의 초보적인 구성으로부터 이후 자연수 개념이 심화·발전되어 가도록 어떻게 지도가 전개되어 갈 수 있는지, 자연수 개념 지도에 관한 전체적인 지도 방안을 제시하는 좀더 구체적이고 상세한 연구가 요구된다. 또한 본 연구에서 실시한 실험 수업은 활동주의적 수 개념 구성에 대한 기초 자료를 제공하기 위해 소수 아동을 대상으로 하여 활동을 통한 자연수 개념의 제 측면에 대한 지도 가능성을 탐색한 것이다. 이를 교실 상황으로 확대하여 연구할 필요가 있다.

참고문헌

교육인적자원부(2002a). **수학 1-가**. 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002b). **수학 1-나**. 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002c). **수학 2-가**. 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002d). **수학 2-나**. 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002e). **수학 3-가**. 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002f). **수학 3-나**. 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002g). **수학 4-가**. 대한교과서 주식회사.

김응태·박한식·우정호(1994). 증보 수학교육학 개론. 서울대학교 출판부.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.

임재훈, 홍진곤(1998). "조작적 구성주의와 사회적 구성주의에서 구성의 의미와 과정". **대한수학교육학회 논문집, 8**(1), 299-312.

임정대(2003). **수학기초론의 이해**. 청문각.

波多野完治(1965). **ピアジエの認識心理學**. 國土社

Bell, J. A.(1971). Trends in Secondary Mathematics in Relation to Psychological Theories: 1893-1970. Ph. D. Dissertation. The University of Oklahoma Graduate College.

Brainerd, C. J. (1979). *The Origin of Number Concept.* 유승구(역)(1991). 수 개념의 기원. 서울: 성원사.

Clason, R. G.(1968). *Number concepts in arithmetic texts of the United States from 1880 to 1966, with related Psychological and mathematical developments.* Unpublished doctoral dissertation. The University of Michigan.

Confrey, J. (1980). *Conceptual Change, Number Concepts and the Introduction to Calculus.* Unpublished Doctoral Dissertation. The University of Chicago.

Damerow, P. (1996). Number as a second-order concept. *Science in context, 9*(2), 139-149.

Davydov, V. V.(1975). "The Psychological Characteristics of the Prenumerical Period of Mathematics Institution". In L. P.

Steffe(ed.) Soviet Studies in Psychology of Learning and Teaching Mathematics Vol. Ⅶ. 109-205. The University of Chicago.

Davydov, V. V.(1990). *Types of Generalization in Institution.* In J. Kilpatrick (ed.) *Soviet Studies in Mathematics Education.* Vol.2. The National Council of Teachers of Mathematics.

Dewey, J. and McLellan, J. A.(1895). *The Psychology of Number: And Its Applications to Methods of Teaching Arithmetic.* New York: D. Appleton and Company.

Dieudonné, J. A.(1961). *New Thinking in School Mathematics.* In H. Fehr,(ed.) New Thinking in School Mathematics (pp.31-49). OECD.

Englund, K. R. & Nissen, J. H.(1988). "The First Representations of Numbers and the Development of the Number Concept". *Boston studies in the philosophy of science, 175*(1995). 275-297.

Eves, H.(1960). *An Introduction to History of Mathematics.* 이우영, 신항균(역)(1995). 수학사. 서울: 경문사.

Fraenkel, A. A.(1968). *Abstract Set Theory.* Amsterdam, North Holland Publishing Company.

Freudenthal, H.(1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H.(1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gattegno, C. (1963). *For the Teaching of Mathematics.* Vol.3. Educational Explorers Limited Reading.

Marja, H.(ed.) (2002). *Childeren Learn Mathematics.* Freudenthal Institute Utrecht University.

Minskaya, G. I. (1975). Developing the Concept of Number by Means of the Relationship of Quantities. In L. P. Steffe(ed.) *Soviet studies in psychology of learning and teaching mathematics Vol.* Ⅶ (207-261). The University of Chicago.

Piaget, J.(1965). *The Child's Conception of Number.* W. W. Norton & Company, Inc.

Piaget, J.(1971). *Science of Education and the Psychology of the Child.* Penguin Books.

Struik J. D.(1958). *The principal works of Simon Stevin.* Amsterdam: C. V. Swets & Zeitlinger.

Thorndike, E. L.(1922). *The Psychology of Arithmetic.* The Macmillan Company.

A Study on Activistic Construction of Number Concept in the Children at the Beginning of School Age

Ko, Jung Hwa (Korea Institute of Curriculum and Evaluation)

Mathematics education starts from learning the concept of number. How the children at the beginning of school age learn the concept of natural number is therefore important for their future mathematics education. Since ancient Greek period, the concept of natural number has reflected various mathematical-philosophical points of view at each period and has been discussed ceaselessly. The concept of natural number is hard to define. Since 19th century, it has also been widely discussed in psychology and education on how to teach the concept of natural number to the children at the beginning of school age. Most of the works, however, were focused on limited aspects of natural number concept.

This study aims to show the best way to teach the children at the beginning of school age the various aspects of natural number concept based on activistic perspective, which played a crucial role in modern mathematics education.

With this purpose, I investigated the theory of the activistic construction of knowledge and the construction of natural number concept through activity, and activistic approaches about instruction in natural number concept made by Kant, Dewey, Piaget, Davydov and Freudenthal. In addition, I also discussed various aspects of natural number concept in historical and mathematical-philosophical points of view. Based on this investigation, I tried to find out existing problems in instructing natural number to primary school children in the 7th National Curriculum and aimed to provide a new solution to improve present problems based on activistic approaches.

And based on activistic perspective, I conducted an experiment using Cuisenaire colour rods and showed that even the children at the beginning of school age can acquire the various aspects of natural number concept efficiently.

To sum up, in this thesis, I analyzed epistemological background on activistic construction of natural number concept and presented activistic approach method to teach various aspects of natural number concept to the children at the beginning of school age based on activism.

* **Kew words** : natural number concept(자연수 개념), activism(활동주의), construction of knowledge(지식의 구성), Cuisenaire color rods(퀴즈네르 색막대).

논문접수: 2007. 7. 15
심사완료: 2007. 8. 16