대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 3, 233-251. Aug 2007

십진블록을 활용한 소수의 나눗셈 지도에서 초등학교 5학년 학생들의 개념적 이해 과정 분석

방 정 숙* · 김 수 정**

본 연구는 주로 알고리즘 위주로 학습되는 소수의 나눗셈 지도에 반하여 십진블록을 활용하여 초등학교 5학년 학생들이 소수의 나눗셈을 보다 의미 있게 학습할 수 있는지를 면밀하게 탐색하였다. 연구결과 학생들은 다양한 소수의 나눗셈 문제를 십진블록으로 모델링하여 계산하는 과정을 통해 연산의 의미를 개념적으로 이해할 수 있었고, 알고리즘의 각 단계를 십진블록의 조작활동과 연결하여 설명함으로써 계산 원리를 터득할 수 있었다. 또한 소수의 나눗셈 계산 결과를 연산의 의미와 연결하여 개념적으로 설명할 수 있었다. 이를 통하여 본 연구는 구체적인 수업 사례를 바탕으로 소수 나눗셈 지도 방안에 대한 시사점을 제공한다.

Ⅰ. 서 론

초등학교 수학교육의 상당부분은 수와 연산을 이해하고 계산을 능숙하게 하는 데 초점을 둔다(교육부, 1998; National Council of Teachers of Mathematics[NCTM], 2000). 현행 교육과정은 수와 연산 지도에 있어서 학생들의 활동적인 참여를 강조하고 있으며 조작적 교구와 모델의 활용을 적극 권장하고 있다(교육인적자원부, 2002). 실제 현행 교과서를 살펴보면 기존 교과서에 비해서 '활동'을 강조하고 있으며 학생들이 그러한 활동을 직접 해 보면서 점차적으로 수학적 의미나 연계를 구성해 나가도록 돕고 있다.

그러나 이러한 경향은 고학년의 연산 지도에 있어서 피상적인 경우가 많다. 예를 들어, 소수 연산 지도에 있어서 띠그래프, 모눈종이, 수직선, 자 등을 이용하여 학생들이 직접 색을 칠하거나 칸을 세는 것과 같은 활동을 제시한 경우는 상대적으로 매우 적다. 대부분의 많은 활동이 자연수나 분수의 연산을 유추하여 소수 연산 방법을 간단하게 생각해보게 한 다음, 알고리즘 자체를 연습하는 데 치중되어 있다. 초등학교 학생들이 수학을 싫어하는 주된 이유 중의 하나가 계산하기가 싫어서 그렇다는 결과는 우연이 아닌 것처럼 보인다(Markovits & Pang, 2006).

하지만, 알고리즘 위주의 계산 방법에 치중된 학습에도 불구하고 많은 학생들이 연산 수행에 있어서 오류를 범한다. 특히 소수 연산에서 이런 현상은 두드러지게 나타나며 소수의 나눗셈에서 오류가 많이 발생한다(선춘화, 2005; 윤희태, 2002; Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson & Peled, 1989). 예를 들어 몫의 소수점을 바르게 찍지 못하거나 피제수나

* 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr
** 신천초등학교, gmksj@paran.com

몫에 자릿수를 메우기 위해 0이 필요한 나눗셈 문제에서 0을 적절하게 처리하지 못하는 경우가 많다. 이처럼 학생들이 소수의 나눗셈을 어려워하는 이유 중의 하나는 소수 연산의 의미에 대한 개념적 기초가 부족하고 계산 원리에 대한 명확한 이해 없이 다분히 기계적인 알고리즘을 적용하기 때문이다.

십진블록은 초등학교에서 광범위하게 이용될 수 있는 교구로써 연산에 대한 의미를 형성하고 연산의 성질과 알고리즘을 발견하는 데 도움을 줄 수 있는 효과적인 교구이다(김남희, 1999; 이소연, 2001). 특히, 관련한 선행 연구에서 십진블록은 소수와 소수 연산의 개념적 이해를 돕는 구체물로 공통적으로 권장되고 있다(김용태, 2002; Baroody & Coslick, 1998; Drexel, 1997; Hiebert & Wearne, 1986). 그러나 우리나라 교과서를 살펴보면 자연수 연산에서는 십진블록이 많이 활용되고 있으나 소수 연산에서는 전혀 활용되지 않고 있다.

이에 본 연구는 소수의 나눗셈을 처음 접하는 5학년 학생들에게 십진블록을 활용하여 지도해 보면서 학생들이 연산의 의미를 어떻게 이해하여 모델링하는지, 십진블록을 활용한 계산 과정을 알고리즘과 어떻게 연결하여 이해하는지, 연산의 결과를 어떻게 해석하여 모델링하는지 면밀히 분석하고자 하였다. 전반적으로 초등수학교육에서 소수는 분수에 비해 덜 관심을 받아왔고, 관련한 연구가 많지 않다. 그나마 소수 개념 지도의 일반적인 문제점 및 전반적인 개선방향(김용태, 임해경, 안병곤, 신봉숙, 2001; 변희현, 2005)과 소수 계산 오류에 대한 연구(윤희태, 2002; 이경아, 1996)가 대부분이어서 소수의 나눗셈과 관련한 구체적인 연구는 매우 미흡한 실정이다. 본 연구는 부족하나마 현행 교과서에서 활용하지 않은 십진블록을 가지고 소수의 나눗셈을 지도한 구체적인 수업 사례를 제공하고 그 과정에서 학생들의 개념적 이해 과정을 상세히 분석함으로써 구체적인 지도 방안을 모색하는 데 도움을 줄 것으로 기대된다.

II. 이론적 배경

1. 소수 나눗셈의 계산 오류 및 원인과 관련된 연구

소수 계산에서 학생들은 오류를 많이 범한다. 이와 관련된 최근 국내 연구를 살펴보면, 학생들은 특히 소수의 나눗셈에서 피제수나 몫에 자릿수를 메우기 위해 0이 필요한 문제를 어려워하는 것으로 드러났다(이경아, 1996). 또한 구체적으로 오류 유형별 빈도를 살펴보면, 소수 나눗셈의 경우, 알고리즘 오류(계산 과정을 이해할 수 없거나 소수 계산의 알고리즘을 정확하게 사용하지 못하는 오류), 소수점 오류(몫의 소수점 위치가 바르지 않거나 소수점을 빠뜨리는 오류), 자연수의 나눗셈 오류(소수 계산에서 자연수의 나눗셈을 잘못함으로써 범하는 오류) 순이다(윤희태, 2002).

이러한 오류의 원인은 분수의 개념 및 소수와의 상호관계에 대한 이해 부족, 자릿값에 대한 이해 부족, 자연수의 기초 계산 능력의 부족 등 선행지식과 밀접하게 관련되어 있다. 이와 관련하여 십진블록을 활용한 조작 활동은 소수와 십진분수의 연결 관계와 자릿값 등의 개념을 파악하는 데 도움이 되고, 계산 원리를 직접 모델링함으로써 선행지식을 유용하게 연결시켜 소수 계산에서 나타나는 오류를 줄이는 데 효과적일 수 있다(방정숙, 김재화, 2006; Baroody & Coslick, 1998).

2. 소수 지도 과정에 관한 연구

Hiebert와 Behr(1988)에 따르면, 초등학교에서 범자연수, 분수, 소수를 각각 분리하여 가르침으로써 대부분의 학생들이 이들 개념을 서로 연결하여 이해하는데 어려움을 겪고 있으며 분수와 소수 자체에 대한 개념적 이해 없이 여러 가지 기호 조작법이나 소수 계산 법칙을 익히는 데 치중되어 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 Hiebert(1992)는 소수의 자릿값, 소수와 분수의 연결을 강조하고, 알고리즘을 개념 및 원리와 연결하며 되도록 실생활과 연계하여 지도하는 것이 필요하다고 주장한다. 또한 계산 결과를 실생활에서 일어나는 문제에 대응시켜서 검증할 수 있도록 지도하여야 한다고 제안한다. NCTM(2000)에서도 비슷한 맥락에서 자릿값에 대한 확고한 개념적 기초를 토대로 소수 연산을 수행할 것, 자연수 연산 결과와의 차이점을 인식하면서 소수 연산 결과를 파악할 것, 소수 계산 알고리즘을 개발하고 분석하여 상황에 맞게 능숙하게 활용할 것을 강조한다.

한편, 김용태 외(2001)는 교수요목기부터 제7차 교육과정기까지의 우리나라 교과서를 분석하여 소수 지도의 문제점을 지적하였는데, 그 중 본 연구와 관련된 문제점을 요약하면 십진분수를 충분히 다루지 않은 상태에서 소수를 십진분수의 동치류의 다른 표현으로 도입하는 점, 소수와 분수 그리고 자연수와의 표기 체계에 대한 유사점과 차이점을 인식시키는 활동이 부족한 점, 소수의 계열이나 계산의 의미 지도가 부족한 점, 동치소수에 대한 제시 없이 동치소수가 연산의 과정이나 결과처리에 등장하는 점, 구체적인 조작활동을 통하여 개념을 이해하도록 교과서가 구성되어 있지 않다는 점 등이다. 연구자들은 일련의 논의와 실험을 토대로 구체물의 조작활동, 실생활과의 밀접한 문제 상황을 통하여 자연수, 분수, 소수가 공존하는 지도, 선행 관련 지식과 강력한 연결을 꾀하여 소수, 분수, 자연수의 표기체계의 유사점과 차이점을 지도할 것을 강조한다.

3. 십진블록을 활용한 소수 지도에 관한 연구

십진블록은 초등학교 전 학년에 걸쳐 이용되는 교구로 사칙연산의 훌륭한 모델이며(이소연, 2001), 십진블록으로 조작 활동을 하면서 학생들이 연산의 성질과 알고리즘을 스스로 재발명할 수 있다는 측면에서 자연수 연산뿐만 아니라 소수의 개념 및 연산지도에도 효과적으로 활용될 수 있다(김남희, 1999; 정유경, 2004).

소수 학습에서 십진블록을 활용한 연구를 살펴보면 먼저, 소수와 소수의 덧셈과 뺄셈에 대한 학생들의 개념적 이해를 돕는 구체물로 십진블록을 활용한 연구가 있다(Hiebert & Wearne, 1986). 또한 소수를 십진분수와 연결하여 이해하기 위해서는 구체물의 조작 활동을 통하여 분수를 표현하고 주어진 수를 소수와 분수로 동시에 표현하는 지도가 필요한데, 이 과정에서 유용한 구체물이 십진블록임을 강조하는 연구가 있다(Baroody & Coslick , 1998; Drexel, 1997). 또한 보다 구체적으로, 소수 계산에서 오류를 보이는 6학년 학생들을 대상으로 십진블록을 활용하여 소규모의 교수 실험을 진행한 결과 소수 개념의 이해를 돕고 계산 원리를 직접 모델링하는 경험을 통하여 소수 계산에서 나타나는 오류를 줄일 수 있다는 연구가 있다(방정숙, 김재화, 2006).

이와 같은 선행연구들을 검토해 볼 때, 소수 연산 지도에 있어서 십진블록의 활용 가능성을

충분히 반영하고 있다고 볼 수 있다. 하지만, 극소수의 예외적인 연구를 제외하고는 대부분 십진블록 활용 전반에 대한 대략적인 소개이거나, 자연수 연산 지도를 주목표로 하는 경우가 많다. 이에 본 연구는 소수의 나눗셈을 처음 배우는 5학년 학생들에게 처음부터 십진블록을 활용하여 지도해봄으로써, 학생들이 어떻게 개념적으로 이해하는지를 분석하여 소수 연산 지도에 있어서 구체적 조작물을 활용한 경험적 근거를 제공하고자 하였다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법 개관

본 연구에서 적용한 방법론은 질적 사례연구이다. 이 방법론을 사용한 이유는 크게 세 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 본 연구는 초등학교 5학년 학생들에게 십진블록을 활용하여 소수의 나눗셈을 지도한 후, 십진블록의 효과를 결과적으로 검증하는 데 초점을 두는 것이 아니라 학습 과정에서 나타나는 학생들의 개념적 이해에 관심을 두기 때문에 사례연구를 선택하였다. 둘째, 학생들이 연산의 의미와 결과를 어떻게 이해하여 모델링하는지, 그리고 십진블록을 이용한 계산 과정을 알고리즘과 어떻게 연결하여 나타내는지에 대해 자세히 설명하므로 사례연구가 유용하다(Yin, 2002). 셋째, 우리나라에서 소수의 연산 지도에서 십진블록을 활용하여 지도한 연구는 거의 없기 때문에 이와 관련한 기초 정보를 제공할 수 있다는 측면에서 사례연구가 적합하다(Merriam, 1998).

2. 연구 대상

본 연구를 위해 부산광역시에 위치하고 있는 S초등학교의 5학년 2개 학급을 연구대상으로 선정하였다[1]. S초등학교는 주택가에 위치한 학교로 학생들의 학력수준은 부산광역시에서 중위수준이며 가정의 사회·경제적 수준도 대체로 중위에 해당한다. A교사의 학급 학생은 남 15명, 여 14명으로 모두 29명이다. A반은 기본적인 학습 훈련이 잘 이루어져 있었으며 학생들의 학습 태도가 바르고 차분하였다. A교사는 교육 경력이 6년인 여교사로 교육대학교 초등수학교육학과를 졸업하였고 수학 교과 연구회에 참석하고 있으며 수학과에 많은 관심을 가지고 있었다. B교사의 학급 학생은 남 15명, 여 13명으로 모두 28명이다[2]. B반은 A반에 비해 상대적으로 학생들의 학습태도가 조금 산만한 반면 자신의 의견을 발표하는 데는 소극적이었다. 그러나 교사의 노력과 칭찬으로 수업이 진행될수록 많은 학생들이 발표에 보다 적극적으로 참여하는 경향을 보였다. B교사는 교육 경력이 2년인 여교사로 교육대학교 초등수학교육학과를 졸업하였고 최근 수학 교과 연구회에 참석하기 시작하였다.

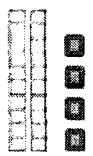
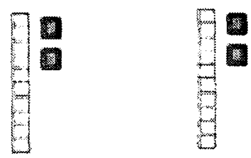
3. 자료수집

초등학교 5-나에서 다루는 소수의 나눗셈 내용을 분석한 후 십진블록을 이용하여 분배와 넓이의 의미를 지도할 수 있도록(예, [그림III-1]과

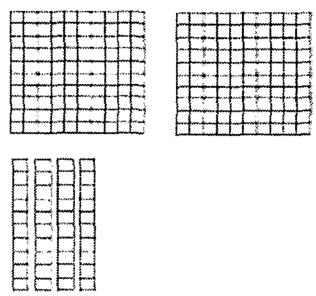
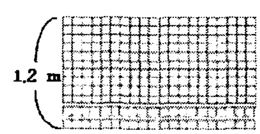
---

1) 2개 학급을 선택한 이유는 비교 목적이 아니라 연구의 신뢰도를 높이기 위한 방안 중의 하나로 동일한 지도 과정을 2개 학급에 적용해 봄으로써 교사, 학생, 또는 학급 분위기의 특징에 관계없이 소수 나눗셈과 관련한 학생들의 개념적 이해 측면에서 공통적으로 드러나는 특성을 찾기 위해서였다. 다만 본 논문에서는 지면의 한계상 수업 에피소드는 A반의 사례를 중심으로 일관되게 기술하였다.
2) 두 반에서 각 1명씩 특수교육대상 학생이 있어 본 연구의 분석대상에서는 제외하였다.

[그림Ⅲ-2]) 교과서를 재구성하고 교수·학습 과정안을 작성하였다[3]. 교과서의 전체적인 틀을 유지하면서 나눗셈의 의미와 몫 어림하기, 몫이 소수 한 자리의 대소수인 (소수)÷(자연수), 몫이 소수 두 자리의 대소수인 (소수)÷(자연수), 몫이 소수인 (소수)÷(자연수), 소수점 아래 0을 내려 계산하는 (소수)÷(자연수), 몫의 소수 첫째 자리에 0이 있는 (소수)÷(자연수), (자연수)÷(자연수)를 소수로 나타내기의 학습 주제를 각각 1차시씩 다루었다. 그런 다음, 8차시에서는 5개의 식을 제시하고 하나를 골라 학생들 스스로 적절한 문장제를 직접 만들어본 후, 해결해 보게 하였다.

문제: 물 2.4L를 크기가 같은 비커 2개에 똑같이 나누어 담으려고 합니다. 비커 한 개에 물을 몇 L씩 담으면 됩니까? 1단계: 약속하기 막대블록 1개=1 단위블록 1개=0.1	2단계: 블록으로 2.4L 나타내기 막대블록 2개와 단위블록 4개 	3단계: 물 2.4L를 비커 2개에 똑같이 나누어 담기 비커 1개에 담긴 물의 양=막대블록 1개+단위블록 2개 =1.2L 

[그림Ⅲ-1] 분배의 의미로 십진블록을 활용하여 2.4÷2 지도하기

문제: 직사각형 모양의 꽃밭의 넓이는 2.4㎡입니다. 가로가 2m라면 세로는 몇 m 입니까? 1단계: 약속하기 • 길이 막대블록 긴 변의 길이=1m 단위블록 한 변의 길이=0.1m • 넓이 판블록=1㎡ 막대블록=0.1㎡ 단위블록=0.01㎡	2단계: 블록으로 넓이(2.4㎡) 나타내기 판블록 2개와 막대블록 4개 	3단계: 가로를 2m(막대 긴 변 2개를 이은 길이)로 하여 블록을 직사각형 모양으로 정렬한 후, 세로의 길이 알아보기 

[그림Ⅲ-2] 넓이의 의미로 십진블록을 활용하여 2.4÷2 지도하기

3) 현행 교과서에서는 분배의 의미만 1차시에 실생활 맥락의 문제로 제시되어 있고 나머지 차시에서는 식을 직접 제시한 후 계산방법을 알아보는 데 초점을 두고 있다. 본 연구에서는 알고리즘을 연습하기 전에 학생들이 연산의 의미를 알게 하기 위해 분배의 의미를 중심으로 실생활 맥락을 제시하였다. 또한 학생들이 어떤 연산을 수행해야 하는지 생각해 보고 이를 십진블록으로 모델링하여 계산 원리를 유추할 수 있는 기회를 제공하였다.

연구대상 교실 각각에서 한 번의 예비 녹화 후에, 전체 16개의 수학 수업을 교실 상황에 따라서 전체 수업 과정과 활발하게 토의가 이루어지는 소집단 활동을 중심으로 2개의 카메라를 통하여 녹화하였다. 또한 수업과 관련된 학생들의 소수 진단평가지, 십진블록 도입 활동 학습지, 재구성한 소수의 나눗셈 교과서, 소수의 나눗셈 평가지, 수학일지 등을 모두 수집하였다. 한편, 수업을 마친 후, 수업에서 불분명한 점을 분명히 하고 특별한 상황에 대한 교사의 의도를 알아보기 위해 비구조화된 면담을 실시하였다. 또한 수업에서 나타난 학생들의 반응, 활동에서 학생들의 의도를 알아보아야 할 경우 해당 학생을 대상으로 비구조화된 면담을 실시하였다. 면담한 자료는 녹음하여 분석의 자료로 활용하였다.

4. 자료 분석

교사와 학생의 전체 활동을 녹화한 교실 수업 자료와 소집단 활동을 녹화한 자료를 중심으로 트랜스크립트를 만들어 수업 에피소드를 중심으로 학생들의 개념적 이해 과정을 분석하였다. 두 교실에서 나타나는 공통되고 일관된 특징적인 상황을 바탕으로 십진블록을 활용한 소수의 나눗셈 지도가 학생들의 개념적 이해 과정에 어떤 도움을 주었는지 분석하였다. 구체적으로, 재구성한 교과서에 학생들이 어떻게 반응하였는지 살펴보면서 각 차시마다 학생들이 소수의 나눗셈의 의미를 어떻게 이해하여 십진블록으로 모델링하는지, 십진블록으로 계산한 과정을 알고리즘과 연결하여 어떻게 이해하고 있는지를 분석하였다. 그리고 수학일지에 정리한 학생들의 생각을 살펴보면서 소수의 나눗셈에 대한 결과의 합리성을 판단하고 그 이유를 십진블록으로 어떻게 설명하는지, 계산 과정의 각 단계를 십진블록과 연결하여 이해하는지를 분석하였으며 수업 내용과 관련하여 새롭게 알게 되거나 느낀 점, 이해가 되지 않거나 어려운 내용 등을 파악하였다. 한편, 12문항의 평가 문제를 출제하여 소수의 나눗셈에 대한 학생들의 전반적인 이해 정도를 종합적으로 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 연산의 의미에 대한 이해와 모델링

가. 분배의 의미에 대한 이해와 모델링: 몫이 소수 한 자리이거나 두 자리인 (소수)÷(자연수)

본 연구의 대부분의 차시에서 분배의 의미를 다루었는데, 학생들은 이 의미를 쉽게 파악하고 적절하게 십진블록으로 모델링할 수 있었다. 학생들이 $2.4 \div 2$에 해당하는 문제를 십진블록으로 해결한 후, 교사는 $14.4 \div 12$를 분배의 의미로 해석해보게 하였다. 학생들은 이를 십진블록으로 모델링하는 과정에서 14.4를 판블록 1개, 막대블록 4개, 단위블록 4개로 나타내기도 하였고, 막대블록 14개와 단위블록 4개로 나타내기도 하였다. <에피소드 1>은 $14.4 \div 12$를 분배의 의미로 십진블록을 이용하여 개인별로 모델링한 후 소집단 내에서 서로 설명하는 과정이다.

<에피소드 1: $14.4 \div 12$ 분배 의미 모델링>

찬호: 막대블록을 1로 보고 단위블록을 0.1로 봤어. 그러면은 10이 넘잖아. 판블록을 1개 가져오고 막대블록 4개 가져오고, 단위블록 4개, 그러면은 12개의 컵에 나누어줘야 되잖아. 판블록을 못 쪼개잖아. 막대블록 10개로 바꾸어 준 후에 12개의

컵에 나누어준다 말이야. 이거(막대블록2개)를 못 쪼개잖아. 단위블록 20개로 바꾸잖아. 그러면 이거를 2개씩 나누면 이게(막대블록 1개, 단위블록 2개) 컵 한 개에 담은 양이잖아. 이게(막대블록) 1이고 이게(단위블록) 0.1이제. 0.1이 2개 있으니까 [전체는] 1.2다.

성진: 판블록이 1개, 막대블록 4개, 단위블록이 4개 있으니까 판블록 1개를 나눌 수 없으니까 막대블록 10개로 바꾸고 컵 12개에다가 막대블록 1개씩을 나누어 주고 남은 막대블록 2개를 단위블록 20개와 바꾸고 12개의 컵에 2개씩 놓으면 된다.

14.4÷12는 2.4÷2보다 수가 크고 12로 나누어야 하기 때문에 십진블록으로 모델링하는 과정이 더 복잡하다. 그러나 학생들은 큰 수에 상관없이 십진블록으로 모델링하는 과정을 12개의 컵에 똑같이 나누어준다는 상황과 연결하여 쉽게 이해하고 해결하였다. 판블록 1개를 쪼갤 수 없다는 찬호의 설명에서 알 수 있듯이, 학생들은 십진블록으로 모델링하는 과정에서 판블록 1개를 12로 나눌 수 없다는 것을 자연스럽게 이해하였다. 이는 판블록 1개를 나눌 수 없다고 말한 성진이의 설명에서도 확인할 수 있다. 따라서 학생들은 판블록 1개를 막대블록 10개로 교환하여 나누어 주어야 한다는 것을 스스로 발견하여 설명하였다. 또한 막대블록이 1이고 단위블록이 0.1이며 0.1이 2개 있으니까 전체가 1.2라고 말한 찬호의 설명에서 십진블록은 소수의 자리값을 잘 나타내어 나누어준 양과 남아있는 양을 소수와 연결하여 계산 과정에서 쉽게 파악할 수 있으며, 몫을 정확하게 말할 수 있음을 알 수 있다.

한편, “리본 9.36m를 4명의 친구에게 똑같이 나누어 주었습니다. 한 친구가 가지고 있는 리본의 길이는 몇 m입니까?”라는 문제처럼 피제수와 몫이 모두 소수 두 자리 수인 경우를 제시하자 학생들은 처음에 앞의 활동에서처럼 막대블록을 1로 본다고 말하였다. 하지만, 이를 모델링하는 과정에서 판블록을 1로 보아야 한다고 수정할 수 있었다. 이에 대한 근거로 막대블록을 1로 보면 단위블록이 0.1이 되는데 9.36은 0.01의 수까지 있기 때문에 0.01의 수를 나타낼 블록이 존재하지 않기 때문이라고 설명하였다. 학생들은 이처럼 문제에서 제시한 숫자에 따라 기준을 유동적으로 사용할 수 있으며 그렇게 사용해야 하는 이유도 잘 이해하고 있음을 알 수 있었다. 이와 같은 연구 결과를 고려해볼 때, 십진블록을 자연수의 연산 지도에서만 주로 활용하는 기존 연구 경향을 벗어나서 소수 연산 지도에서도 보다 적극적으로 활용해 볼 수 있겠다.

나. 분배의 의미에 대한 이해와 모델링: 소수점 아래 0이 필요하거나 몫에 0이 있는 (소수)÷(자연수)

소수의 나눗셈 중에는 소수점 아래 0을 내려 계산하거나 몫에 0이 있는 보다 복잡한 문제들이 있다. 예를 들어, 13.5÷6의 경우는 앞에서 다룬 내용들과 달리 그 자체로 나누어떨어지지 않기 때문에 마지막으로 남은 블록을 아래블록으로 교환해야 한다. 즉 십진블록으로 모델링할 때 나누어떨어지지 않을 경우 아래블록으로 교환해야하는 상황까지 고려하여 기준을 정해야 한다. 이제까지 나누어떨어지는 소수의 나눗셈만을 모델링해본 학생들은 기준을 정해보라고 하자 예상했던 대로 막대블록을 1로 보았다. 이때 교사는 기준을 잘못 정했다고 말하는 대신에, 학생들이 생각한 대로 막대블록을 1로 보고 계산해보도록 하였다. 학생들은 막대블록을 2개씩 6번 놓고 남은 막대블록 1개를 단위블록 10개로 교환하여 다시 2개씩 놓았다. 단위블록 3개가 남자, 혹시 실수를 한 것은 아닌

지 모델링한 과정을 다시 한 번 점검하였다. 자신이 모델링한 과정에 이상이 없음을 확인한 학생들은 남은 단위블록 3개를 어떻게 해야 할지 고민하였다. <에피소드 2>는 교사가 이 상황을 어떻게 이끌어나가는지, 그리고 학생들은 어떻게 기준을 다시 정하는지를 알 수 있다.

<에피소드 2: 단위블록 3개가 남는 경우의 모델링>

T: 뭔가 이상한 점이 있습니다! 효진이?

효진: 단위블록 3개가 남습니다.

T: 이제까지는 나누었을 때 나누어떨어졌잖아. 남는 단위블록이 있었어?

학생들: 없었습니다.

T: 오늘 단위블록이 3개 남네. 그런데 나누어떨어지게 만들어야 되거든[4]. 단위블록이 3개 남는 거 없이 나누어떨어지게 만들려면 어떻게 해야 될까? 만약에 단위블록 아래 뭔가 조금 더 작은 아래 블록이 있으면 (학생들 바로 손을 듦) 단위블록 3개를 아래 블록 몇 개로 바꿀 수 있어?

학생들: 30개

T: 그러면 나누기 6 해야 되지?

학생들: 네

T: 그러면 나누어떨어지나?

학생들: 나누어떨어집니다.

[이에 교사는 모둠별로 토의할 시간을 주었고, 다음은 한 모둠에서 학생들이 논의한 내용임.]

고영: 일단은 지금 막대블록이 1이잖아. 그런데 단위블록을 하면 나머지가 3개 남는데 그걸 10등분할 수 없잖아. 판블록을 1로 보고, 막대블록을 0.1로 보고 단위블록을 0.01로 보면 나머지가 안 남을 것 같다.

찬호: 기준을 올리면 될 것 같다.

위의 에피소드에 드러난 것처럼 학생들은 교사의 힌트를 토대로 단위블록 아래 더 작은 블록이 없으므로, 역으로 기준을 올려 판블록을 1로 봐야한다고 생각할 수 있었다. 소집단 활동 후 전체 논의시간에 교사가 한 학생에게 어떻게 주어진 문제를 해결하였는지 물어보자, "13.5는 정육면체블록 1개, 판블록 3개, 막대블록 5개로 나타내었다. 정육면체 블록 1개는 6으로 나눌 수 없으니까 판블록 10개로 교환하여 전체 13개 판블록을 가지고 일단 2개씩 나누어주었다. 판블록 1개가 남는데, 이를 막대블록 10개로 교환하여 원래 있던 막대블록 5개와 합하여 15개를 가지고 다시 2개씩 나누어주었다. 막대블록 3개가 남으므로 단위블록 30개로 교환하여 단위블록을 5개씩 나누어주어 답은 2.25가 된다."고 설명하였다.

위의 경우처럼 나누어떨어지지 않을 경우를 고려해야 하는 문제를 해결한 다음에는 학생들이 주어진 문제를 십진블록으로 모델링할 때 기준을 신중하게 선택하는 경향이 있었다. 예를 들어, "4.1m짜리 철사를 똑같이 2도막으로 잘랐습니다. 철사 한 도막의 길이는 몇 m입니까?"라는 문제를 읽고, 나누어떨어지지 않을 경우를 대비해서 막대블록이 아닌 판블록을 1로 정한 다음 십진블록으로 모델링하였다. 기준을 신중하게 정하는 경향은 4÷9와 같은 (자연수)÷(자연수)의 상황에서도 잘 적용되었다. 학생들은 어림으로 몫의 자릿수를 예상한 후, 나누어떨어지지 않는 경우를 대비하여 처음부터 기준을 다시 정할 위험이 적은 판블록을 1로 정한 다음 모델링하였다. 또한 이 과정에서 나누어떨어지지 않아 판블록 1개를 막대블록 10개로, 다시 막대블록 2개를 단위블록 20개로 교환하여 모델링하였는데, 이를 복잡하게 생각하거나 어려움을 겪는 학생들이 없었으며 분배의 의미로 십진블록을 이용하여 모델링하는 것

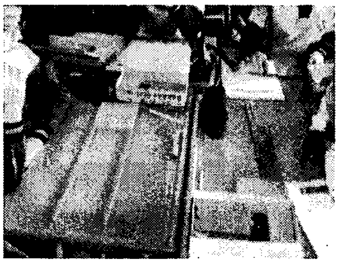
4) 교사와 면담을 통해 남는 단위블록을 어떻게 해야 할지 물어보는 대신에, 왜 "나누어떨어지게 만들어야 된다"고 말했는지 질문하자, 학생들이 이제껏 배운 나눗셈에서는 나누어떨어지지 않을 경우 몫과 함께 나머지를 따로 적는다고 배웠기 때문에 단위블록 3개를 나머지 0.3으로 표현할 가능성이 높기 때문에, 나머지로 나타내지 않고 다른 방법으로 해결해야 한다는 것을 알게 하기 위해서였다고 설명하였다.

에 익숙해져 있음을 알 수 있었다.

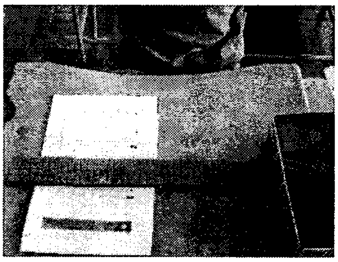
다. 넓이의 의미에 대한 이해와 모델링

교과서의 소수의 곱셈에서는 넓이의 의미를 다루나 소수의 나눗셈에서는 다루지 않고 있다. 이에 본 연구에서는 1차시의 내용을 넓이의 의미로 다루도록 교과서를 재구성하여 학생들의 이해 정도와 모델링하는 과정을 관찰하였다. 넓이의 의미 자체는 학생들이 쉽게 이해하였으나, 이를 십진블록으로 모델링하기 위해서는 길이기준과 넓이기준을 동시에 생각해야 하는 어려움이 있다(Baroody & Coslick, 1998). 하지만, 학생들은 십진블록 도입활동과 소수의 곱셈에서 넓이의 의미로 모델링한 경험[5)]을 토대로 소수의 나눗셈에서도 두 개의 기준을 사용하는 것 자체에 대해서는 크게 어려워하지 않았다. 이와 같은 결과는 소수의 학생들을 대상으로 한 선행 연구를 확장한다고 볼 수 있다(방정숙, 김재화, 2006).

하지만, 이전 차시에서 배운 분배의 의미와는 다르기 때문에, 이를 모델링하는 것은 학생들에게 상당한 도전이 되었다. 예를 들어, "직사각형 모양의 꽃밭의 넓이는 1.6㎡입니다. 이 꽃밭의 가로가 4m라면 세로는 몇 m입니까?"라는 문제에 대해서 학생들은 주어진 조건과 구하고자 하는 것이 무엇인지 확인한 다음 먼저 넓이로 문제를 해결해야 한다고 말하였다. 학생들은 일단 1.6을 판블록 1개, 막대블록 6개로 나타내었으며, 그것을 가지고 가로가 4인 직사각형을 만들어보려고 시도하였다. 어떤 학생들은 처음에 일단 막대블록 4개를 가로로 길게 놓고 그 다음 줄에 남은 막대블록 2개를 놓았다. 이 옆에 판블록을 놓다가 이를 막대블록 10개로 교환하지 않고서는 가로가 4인 직사각형을 만들 수 없음을 발견하였다. 또다른 학생들은 처음에 [그림Ⅳ-1]처럼 판블록 옆에 막대블록을 3개씩 2줄로 놓아보다가 직사각형을 만들 수 없음을 깨닫고 판블록 1개를 막대블록 10개로 교환하여 [그림Ⅳ-2]처럼 가로가 4인 직사각형을 만들어 세로의 길이가 0.4가 된다는 것을 알았다.



[그림Ⅳ-1] 1.6÷4 넓이 모델 완성 전



[그림Ⅳ-2] 1.6÷4 넓이 모델

소집단 활동 후의 전체 논의 시간에 교사는 학생들에게 왜 판블록을 막대블록으로 교환하였는지 학생들에게 물어보았다. 이에 학생들은 "판블록 1개와 막대블록 6개로는 가로 4를 나타낼 수 없기 때문에", "4개씩 나누려고 하는데 판블록을 부술 수가 없기 때문에" 등으로 설명

5) 십진블록 도입활동에서 판블록, 막대블록, 단위블록 각각에 대해서 한 변의 길이와 각 블록의 넓이를 생각해보게 하였다. 소수의 곱셈에서는 예를 들어, 0.5x0.3을 넓이의 의미로 모델링하는 경우, 가로가 0.5이므로 한 변의 길이가 0.1인 단위블록을 이용하여 가로로 5개, 세로로 3개씩 놓아 직사각형을 만들었다. 그런 다음, 단위블록 1개의 넓이가 0.01임을 이용하여 직사각형의 넓이를 구하였다.

하였다. 즉, 학생들은 1.6÷4를 넓이의 의미로 모델링하는 과정에서 판블록 1개는 4로 나누어지지 않는다는 것을 자연스럽게 알게 되었다. 이는 몫이 소수인 소수의 나눗셈에서 나누어지지 않아 판블록을 막대블록으로 교환하였기 때문에 몫의 일의 자리에 0을 쓰는 계산 원리에 대한 개념적 이해의 밑바탕이 된다.

2. 십진블록을 이용한 계산 과정과 알고리즘과의 연결

각 차시에서 주어진 문제를 십진블록을 가지고 모델링한 후에 교사는 이를 나눗셈 알고리즘으로 계산하는 각 단계와 연결하여 생각해보도록 하였다. 십진블록을 이용한 비형식적인 분배전략과 알고리즘이 자연스럽게 연결되기 때문에 학생들은 십진블록을 이용한 활동을 바탕으로 소수의 나눗셈 알고리즘을 스스로 발견할 수 있었으며 알고리즘의 각 단계가 왜 그렇게 되는지 설명할 수 있었다. 예를 들어, 2.4÷2를 계산하는 과정에서 몫에 소수점을 1과 2사이에 찍어야 하는 이유에 대해서 학생들은 막대블록을 1, 단위블록을 0.1로 볼 때 몫에 있는 2는 단위블록 2개로 0.2를 나타내므로 2앞에 소수점을 찍어야 한다고 설명할 수 있었다.

또한 1.6÷4의 경우는 앞에서 기술한 바와 같이 넓이의 의미로 상황을 제시하여 십진블록으로 나타내보게 하고 이를 나눗셈 알고리즘과 연결하여 생각해보도록 하였는데, 학생들은 별다른 어려움 없이 활동과 알고리즘을 연결하여 설명할 수 있었다. 예를 들어, 십진블록 활동에서 1.6은 판블록 1개, 막대블록 6개로 나타내며 판블록 1개로 가로가 4인 직사각형을 만들 수 없었다는 점을 상기시키며 교사가 이를 나눗셈식에서 어떻게 나타내어야 하는지 질문하자 학생들은 "1 위의 몫에 0을 적어야 한다", "판블록 1개는 4로 나누어지지 않으므로 몫의 일의 자리에 0을 먼저 써주어야 한다" 등으로 설명하였다. 또한 판블록 1개를 막대블록 10개로 교환하여 막대블록은 모두 16개가 되며, 가로가 4가 되게 막대블록을 가로로 길게 놓으면 세로로 4줄이 만들어지는데, 막대블록의 세로의 길이는 0.1이므로, 몫이 0.4가 된다고 설명할 수 있었다. 이를 통해 자연수의 나눗셈을 배울 때부터 분배의 의미에 익숙한 학생들이 나눗셈 알고리즘을 넓이의 의미와 관련지어 생각하는데 어려움이 없음을 알 수 있었다.

한편, 십진블록을 이용한 계산 과정과 알고리즘과의 연결은 소수점 아래 0을 내려 계산하거나 몫의 자리에 0이 필요한 (소수)÷(자연수) 또는 (자연수)÷(자연수)의 경우처럼 보다 복잡한 소수의 나눗셈 활동에서도 일관되게 드러났다. 예를 들어, <에피소드 3>은 13.5÷6을 계산하는 과정에서 0을 내려 계산하는 부분을 학생들이 십진블록 활동과 어떻게 연결하고 있는지 알 수 있는 경우이다.

<에피소드 3: 13.5÷6 십진블록을 이용한 계산 과정과 알고리즘 연결>

T: 원래 막대블록이 5개 있었지요. 그 5가 여기에 내려와서 막대블록이 총 몇 개다?

학생들: 15개

T: 그러면 여기(15) 있는 1이 일이 내려오는 거가? 야(15) 일오가? 우찬이

우찬: 판블록 1개가 남아서 막대블록 10개로 교환되어서 내려오는 것입니다.

T: 그러면 얘는 일오가 아니고 막대블록 몇 개?

학생들: 15개

T: 그럼 막대블록 15개. 6통에다 나누어줘야 된다. 몇 개씩? 남기

남기: 2개씩 나누어줍니다.

T: [이와 같은 방법으로 막대블록을 나누어 준 과정을 식에 나타내어 2밑에 3을 쓴다.] 그 다음에 어떻게 했습니까? 예진

예진: 막대블록 3개를 단위블록 30개로 교환하

였습니다.

T: 응, 단위블록 30개를 교환했지요. 그러면 여기다가 30 적어줘야 되지? (0을 적는 시늉하며) 적어주려고 하면은 위에서 뭔가 내려와야 하는데 아무것도 없네. 어떻게 하지? 승수

승수: 0을 적어줍니다.

T: 어디에다가? 뭐 옆에다가?

승수: 5옆에

T: 5옆에 왜 0을 적어줄 수 있나? 왜 0을 적어줘도 됩니까? 그 이유. 소희

소희: 5는 막대블록이기 때문에 단위블록으로 바꾸어 주면은 십단위로 바뀌기 때문입니다.

T: 또 다른 생각. 찬준이

찬준: 3.5 뒤에는 수많은 0이 생략되어 있기 때문입니다.

T: 그래서 13.5나 13.50이나 같다, 다르다?

학생들: 같다.

위의 에피소드에 드러난 것처럼 학생들은 나눗셈 과정에서 나타나는 15는 막대블록 15개를 의미하며 1이 내려올 때 그냥 내려오는 것이 아니라 판블록 1개가 막대블록 10개로 교환하여 내려온다는 것과 연결할 수 있었다. 또한 나누어떨어지지 않을 경우 피제수의 소수 끝자리 아래에 0을 붙여 내려서 계산할 수 있는 이유에 대해서 질문하자, 13.5의 '5'는 막대블록 5개로 단위블록으로 교환하면 50개가 되며 이것은 13.50으로 나타낼 수 있다는 것으로 설명할 수 있었다. 즉, 13.5와 13.50은 동치소수로 13.5 옆에 0을 붙여주거나 생략할 수 있으며 필요할 경우 생략한 0을 다시 붙여 계산할 수 있음을 십진블록과 연결하여 이해하였다. 이와 같은 이해는 9÷4의 경우처럼 나누어떨어지지 않아 소수점 아래 0을 두 번 내려 계산하는 경우에서도 일관되게 드러났다. 즉, 계산하는 과정에서 피제수에 0을 붙여 9.00이 되는 상황과 관련하여 학생들은 처음 9는 판블록 9개, 9.0은 막대블록 90개, 9.00은 단위블록 900개로 볼 수 있으며, 이 수들은 모두 같다고 설명하였다.

3. 연산의 결과에 대한 이해와 모델링

가. 몫이 대소수인 (소수)÷(자연수)의 결과에 대한 이해와 모델링

학생들이 연산의 결과를 제대로 이해하는지 알아보기 위해서 예를 들어, 3.6÷3을 12로 계산한 경우를 소개하고 십진블록을 이용하여 이 계산 결과가 맞는지 판단해 보게 하였다. 십진블록을 직접 이용하여 소수의 나눗셈을 할 수는 있으나 이를 글로 설명하는 데 어려움을 겪은 일부 학생들을 제외하고 대부분의 학생들이 십진블록과 연결하여 설명할 수 있었다. 즉, 막대블록 3개와 단위블록 6개를 3으로 나누면 막대블록 1개와 단위블록 2개가 되므로 3.6÷3의 몫은 1.2이며 소수점을 찍지 않아 틀렸다고 설명하였다. 이와 같이 학생들은 계산 결과의 타당성을 검토하는 데 있어서 십진블록을 이용하여 계산한 결과와 비교함으로써 3.6÷3의 몫이 1.2가 되는 이유를 개념적으로 설명할 수 있었다.

나. 몫이 소수인 (소수)÷(자연수)의 결과에 대한 이해와 모델링

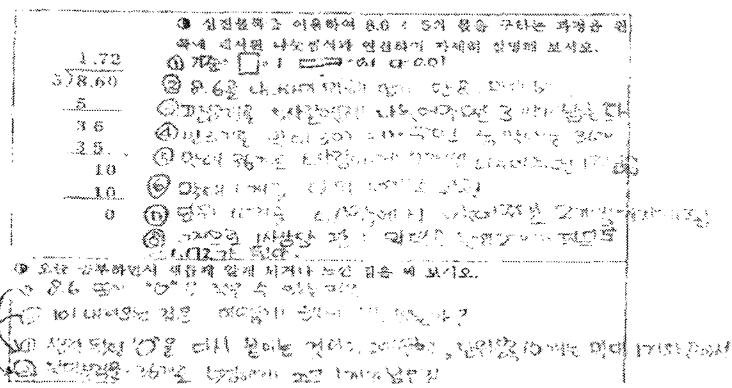
학생들에게 넓이의 의미로 소수 나눗셈을 지도한 후, 이에 대한 결과도 개념적으로 이해하고 있는지 알아보기 위해서 2.1÷7의 계산 결과를 십진블록 활동으로 검증해 보게 하였다. 학생들은 "판블록 2개는 7로 나눌 수 없으므로 몫이 0.3이 된다'고 설명하기도 하고, 십진블록으로 직접 해 보면서 세로의 길이가 0.3임을 설명하기도 하였다. 소수의 나눗셈에서 답의 합리성에 대한 검토는 몫의 소수점 위치가 올바른지 살펴봄으로써 판단할 수 있다. 본 연구의 학생들은 소수의 나눗셈의 연산 결과를 십진블록의 분배 모델이나 넓이 모델과 연결하여 답이 합리적인지 그렇지 않은지를 검토하였다.

다. 소수점 아래 0을 내려 계산하는 (소수)÷(자연수)의 결과에 대한 이해와 모델링

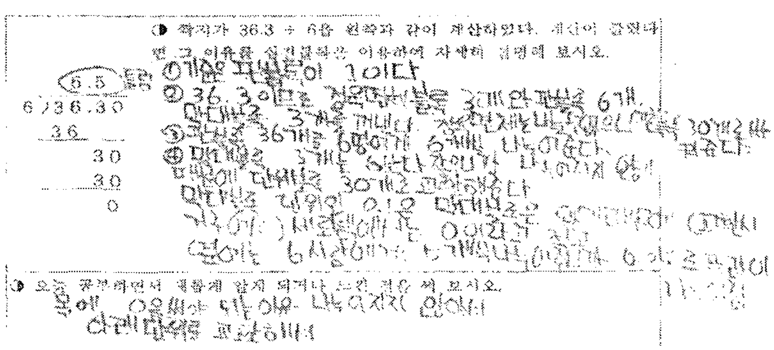
소수점 아래 0을 내려 계산하는 보다 복잡한 소수의 나눗셈의 결과도 학생들이 잘 이해하고 있는지 알아보기 위해서 예를 들어, 십진블록을 이용하여 8.6÷5의 몫을 구하는 과정을 설명해 보게 하였다. 학생들은 [그림Ⅳ-3]처럼 십진블록으로 모델링한 결과 판블록 1개, 막대 7개, 단위 2개가 나왔으며 각 블록의 자릿값이 분명하여 몫의 소수점 위치가 맞는지 쉽게 판단할 수 있었다. 또한 8.6옆에 0을 적을 수 있는 이유를 "0이 수도 없이 많기 때문에", "생략되었던 0을 다시 붙이는 것이기 때문에", "막대블록 6개는 단위블록 60개와 같기 때문"이라고 설명하였다. 또한 계산과정에서 나타나는 '1'은 막대블록 36개를 5명에게 주고 1개가 남아 단위블록 10개로 바꿔서 내려오는 것이라고 설명하여 계산과정의 각 단계를 십진블록과 연결하여 이해하고 있음을 알 수 있다.

라. 몫의 소수 첫째 자리에 0이 있는 (소수)÷(자연수)의 결과에 대한 이해와 모델링

몫에 0이 있는 나눗셈 문제의 몫을 틀리게 제시하고 몫의 결과를 판단하여 그 이유를 십진블록으로 설명해보게 함으로써 학생들이 나눗셈을 개념적으로 이해하였는지 알아보았다. 대부분의 학생들은 [그림Ⅳ-4]과 같이 계산 결과를 판단하고 그 이유를 십진블록과 연결하여



[그림Ⅳ-3] 8.6÷5 계산 결과 검증



[그림Ⅳ-4] 36.3÷6 계산 결과 검증

구체적으로 제시하였다.

먼저 36.3÷6을 계산하는 과정에서 몫이 틀렸다고 표시하였다. 몫이 틀린 이유를 십진블록과 나눗셈 계산 과정의 각 단계를 연결하여 자세하게 설명하였다. 그 중 ④번을 보면 막대블록 3개는 6보다 작아 나누어지지 않으므로 단위블록 30개로 교환해주어서 6명에게 나누어준 막대블록이 없기 때문에 몫에 0을 써야 한다고 설명하였다. 그러므로 몫은 6.05인데, 몫에 0을 쓰지 않고 6.5라고 적어 틀렸다는 것을 논리적으로 설명하였다. 이처럼 학생들은 계산 과정의 각 단계를 십진블록으로 모델링한 과정과 비교하고 검증하는 활동을 통해 몫에서 0을 빠뜨려 계산 결과가 틀렸다는 것을 잘 판단하였으며 나누어지지 않아 아래블록으로 바꾸었기 때문에 몫에 0을 써야 한다는 것을 개념적으로 이해하고 있었다.

마. (자연수)÷(자연수)의 결과에 대한 이해와 모델링

(자연수)÷(자연수)는 (소수)÷(자연수)와 달리 피제수에 소수점이 없기 때문에 소수의 자리값에 대한 이해가 부족한 학생들은 몫에서 소수점을 어디에 찍어야 할지 몰라 어려움을 겪을 수 있다. 이를 알아보기 위해 예를 들어, 3÷4의 몫이 0.75인 이유를 설명해 보게 하자, 학생들은 판블록을 4등분으로 나눌 수 없다고 설명하면서, 판블록 3개를 막대블록으로 교환하고 남은 막대블록 2개를 다시 단위블록 20개로 교환하여 한 사람에게 막대블록 7개, 단위블록 5개를 나누어주었으므로 몫이 1보다 작은 소수인 0.75가 되었음을 이해하였다. 3÷4의 몫이 1보다 작은 소수로 나타나는 이유를 십진블록과 연결하여 개념적으로 이해하고 있음을 알 수 있다.

4. 소수의 나눗셈에 대한 학생들의 전반적인 이해 평가

가. 문제를 만들고 해결하기

7차시까지는 제시된 실생활 문제를 토대로 소수의 나눗셈을 분배와 넓이의 의미로 해석할 수 있음을 배웠고 십진블록으로 모델링하여 문제를 해결하게 한 반면에, 8차시는 5개의 식(즉, 0.6÷2, 3.6÷4, 12.3÷5, 6.1÷2, 3÷4) 중 하나를 선택하여 적절한 문장제를 만들고 해답을 적은 후 짝과 바꾸어 문제를 해결해보도록 하였다.

이는 학생들이 소수의 나눗셈의 의미, 알고리즘, 몫을 어떻게 이해하였는지 확인하기 위한 것이었다. <표Ⅳ-1>은 학생들이 어떤 식을 선택하고 어떤 의미로 문제를 만들었는지 요약한 것이다.

두 반 모두 넓이보다 분배의 의미로 문제를

<표Ⅳ-1> 소수의 나눗셈 문제 만들기

반	의미 \ 식	0.6÷2	3.6÷4	12.3÷5	6.1÷2	3÷4	합계
A반	분배	2명	8명	1명	5명	1명	17명
	넓이	1명	8명	1명	1명	·	11명
	합계	3명	16명	2명	6명	1명	28명
B반	분배	5명	4명	4명	2명	1명	16명
	넓이	1명	6명	1명	2명	1명	11명
	합계	6명	10명	5명	4명	2명	27명

더 많이 만들었다. 현행 교과서 분석을 토대로 본 연구 대부분의 차시에서 분배의 의미로 문제를 제시하였고, 넓이의 의미는 십진블록으로 모델링하는 데 제한이 있다는 점[6]을 고려해볼 때, 이와 같은 결과는 당연하다고 볼 수 있다. 한편, 두 반 모두 3.6÷4를 가장 많이 선택하였으며 3÷4를 가장 적게 선택하였다.

0.6÷2는 대부분 분배의 의미로 문제를 잘 만들었다. 테이프 0.6m를 2명에게 똑같이 나누어 주었을 때의 길이, 한지 0.6m를 2명에게 똑같이 나누어주었을 때의 길이 등으로 문제를 만들었고, 나눗셈 알고리즘으로 계산하는 과정과 십진블록으로 해결한 과정 모두 정확하게 표현하였다. 예외적으로 한 학생은 '0.6kg의 케익을 2kg 먹는다면 몇 kg씩 먹을 수 있는가?'로 문제를 만들었고, 식으로는 계산할 수 있었으나 십진블록으로는 해결하지 못하였다.

3.6÷4는 A반에서는 같은 수의 학생이 분배와 넓이의 의미로 문제를 만들었으며 B반에서는 넓이의 의미로 문제를 더 많이 만들었다. 분배의 의미로는 끈 3.6m를 4명에게 똑같이 나누어준 길이, 나무도막 3.6m를 4명에게 똑같이 나누어준 길이, 고무줄 3.6m를 4명에게 똑같이 나누어준 길이 등으로 문제를 만들었으며 넓이의 의미로는 칠판 넓이, 꽃밭 넓이, 직사각형의 넓이 등으로 문제를 만들었다. 단지 두 학생이 mm, mL에 대한 감각이 부족하여 끈 3.6mm를 4명의 친구에게 나누어주었을 때 한 친구에게 준 끈의 길이, 사이다 3.6mL를 4개의 컵에 똑같이 나누어 담을 때 한 컵에 담은 사이다의 양을 묻는 문제를 만들었다. 해답에서는 계산 방법만을 제시한 경우가 소수 있었으며 분배나 넓이의 의미로 십진블록으로 해결한 과정을 정확하게 나타냈다.

12.3÷5, 6.1÷2, 3÷4의 경우 대부분의 학생들이 분배의 의미로 문장제를 만들고 나눗셈식과 십진블록으로 정확하게 해결 과정을 나타냈다. 넓이의 의미로 적절하게 문장제를 만든 학생들의 경우, 나눗셈식으로는 정확하게 계산한 반면 십진블록으로 설명하는 과정에서는 분배의 의미로 설명한 학생이 몇 명 있었고, 넓이의 의미로 설명을 하다가 지우고 다시 분배의 의미로 표현한 학생도 한 명 있었다. 이는 넓이의 의미를 제대로 이해하지 못해서가 아니라 특정 나눗셈의 경우 십진블록으로 모델링하는 것이 불가능하기 때문인 것으로 유추된다(각주 9참조).

이처럼 대부분의 학생들은 소수의 나눗셈의 의미를 이해하여 주어진 식 중에서 하나를 선택하여 분배와 넓이의 의미로 쉽게 문제를 만들었다. 또한 자신이 만든 문제를 해결하는 과정에서 십진블록으로 모델링하는 과정과 알고리즘의 각 단계를 잘 연결하여 이해하고 있음을 알 수 있었다.

나. 소수의 나눗셈 평가

십진블록을 이용하여 소수의 나눗셈을 배운 후 평가를 실시하였다. 문항 수는 총 12문항으로, 각 차시별 주제에 해당하는 나눗셈식 10문제와 문장제 2문제를 제시하여 풀도록 하였다. 정답을 맞춘 문항수와 학생 수, 퍼센트는 <표 Ⅳ-2>에 제시한다.

---

6) 넓이의 의미에서 몫은 세로 또는 가로의 길이를 나타내는 데, 예를 들어, 6.1÷2와 같이 몫이 소수 두 자리 수가 되는 경우, 길이기준에서 0.01에 해당하는 블록이 없으므로 십진블록만 가지고 정확하게 직사각형을 만들 수가 없다. 즉, 판블록의 넓이는 1(가로와 세로 각각 1), 막대블록의 넓이는 0.1(가로 1, 세로 0.1)로 보고, 판블록 6개와 막대블록 1개로 6.1을 나타낸다. 가로를 2로 만들기 위해서 판블록 2개씩 3줄로 놓는다. 그 다음 막대블록 1개를 가지고 가로 2를 만들려면, 개념적으로는 막대블록을 둘로 나눠(가로 1, 세로 0.05) 배열할 수 있으나(이 경우 세로는 전체 3.05가 된다), 그런 블록이 없으므로 직접 모델링이 불가능하다.

<표Ⅳ-2> 소수의 나눗셈 평가 결과

반	맞춘 문항수	11~12	10	9	8	7	합계
A반	학생 수(%)*	14명 (50%)	7명 (25%)	4명 (14.3%)	3명 (10.7%)	0명 (0%)	28명 (100%)
B반	학생 수(%)	15명 (55.6%)	4명 (14.8%)	5명 (18.5%)	2명 (7.4%)	1명 (3.7%)	27명 (100%)

* %는 $\frac{\text{학생수}}{N}$ 이며, 소수 둘째 자리에서 반올림함

문제의 90%이상(11~12문제)을 맞춘 학생 수가 A반은 14명, B반은 15명으로 두 반 모두 반 전체 학생수의 50%를 넘었다. 또한 문제의 80%이상(10문제 이상)을 맞춘 학생 수는 A반은 21명으로 75%, B반은 19명으로 70.4%이다. 물론 문제의 60%를 맞춘 학생들도 소수 있으며, 60%이하를 맞춘 학생도 B반에 1명이 있다. 그러나 이 학생들은 학습부진아들로 3, 4학년에서 배운 분수와 소수에 대한 개념적 이해가 부족하여 소수의 나눗셈을 이해하는데 어려움이 있었다. 십진블록이 소수와 소수 연산을 학습하기 위한 훌륭한 구체물일지라도 제한된 시간에 이전 학년에서 배운 내용을 모두 이해하고 소수의 나눗셈을 이해하는 것은 무리일 수 있다. 그러므로 이들을 제외한 학생들을 살펴보면 소수의 나눗셈을 어려움없이 해결하였음을 알 수 있다.

Ⅴ. 논 의

본 연구의 목적은 초등학교 5학년 학생들에게 십진블록을 활용하여 소수의 나눗셈을 지도하는 과정에서 학생들의 개념적 이해 과정을 면밀히 분석함으로써 십진블록을 활용한 소수의 나눗셈 지도 과정에 대한 시사점을 제공하는데 있다. 본 연구를 통해 얻을 수 있는 시사점을 논의해 보면 다음과 같다.

첫째, 학생들이 연산의 다양한 의미를 개념적으로 이해할 수 있는 기회를 제공하는 것이 중요하다. 연산의 의미를 제대로 이해한 경우에만 학생들은 겉보기에 매우 달라 보이는 문제 상황에 대해서도 동일한 연산을 적용할 수 있고, 연산의 결과가 어떻게 나올 것인지를 예측할 수 있다(NCTM, 2000). 실제 소수의 나눗셈의 계산 원리를 이해하기 위해서는 무엇보다 해당 연산의 의미에 대한 이해가 바탕이 되어야 한다. 본 연구에서는 학년 수준을 고려하여 소수의 나눗셈을 분배와 넓이의 의미로 실생활 맥락에서 문제를 제시하였으며 십진블록으로 그 의미를 모델링하여 계산하도록 하였다. 분배의 의미는 자연수의 나눗셈에서 이미 다루었기 때문에 학생들에게 친숙하여 십진블록으로 쉽게 모델링하였으며 처음 접하는 넓이의 의미에서도 어려움이 없었다. 문제 만들기와 나눗셈 평가 결과에서 보듯이 학생들은 연산의 두 가지 의미를 제대로 이해하고 이에 적합한 해결방법을 설명할 수 있었다.

둘째, 십진블록은 소수의 나눗셈을 의미 있게 지도하는 데 유용한 구체물이다. 고학년 연산 지도의 경우 알고리즘이나 계산 방법 자체에만 초점을 두는 경우가 많다. 실제 현행 5-나 교과서의 경우, 1차시만 생활에서 알아보기로 소수의 나눗셈을 지도하고 나머지 차시는 직접 식을 제시하고 계산 방법을 익히는 데 집중되어 있다. 본 연구에서는 매 차시 주어진 문제

에 대해서 십진블록으로 모델링해 보게 함으로써 학생들이 나눗셈 알고리즘을 스스로 발견할 기회를 제공하고 또 알고리즘의 각 단계를 십진블록 활동과 연결해 보게 함으로써 이해를 강조하였다. 수학일지나 평가지를 보면 학생들은 흥미를 가지고 본 활동에 임하였으며, 나눗셈 알고리즘을 무조건 암기한 것이 아니라 구체적 활동과 연계하여 설명할 수 있음을 알 수 있다. 실제, 십진블록은 소수의 자릿값을 잘 나타내어 연산 결과의 합리성을 쉽게 판단할 수 있으며 왜 그러한 답이 나왔는지에 대한 타당한 근거를 제시해주어 연산의 결과를 이해하는 데 도움이 됨은 물론 연산의 의미, 알고리즘, 연산의 결과를 서로 연결하여 이해하는데 도움이 되었다.

한편, 본 연구를 진행함에 있어서 가장 우려된 점 중의 하나는 학생들이 십진블록의 기준을 주어진 상황에 따라 융통성 있게 활용할 수 있는지의 여부였다(방정숙, 김재화, 2006). 자연수의 연산 지도에 있어서 단위블록은 1, 막대블록은 10, 판블록은 100과 같이 항상 일정하게 사용한 것에 반하여 소수의 나눗셈에서는 주어진 문제 상황에 따라 막대블록을 1로 볼 수도 있고, 판블록을 1로 정해야 할 때도 있기 때문이었다. 하지만, 학생들은 몇 번의 시행착오 끝에 주어진 소수의 나눗셈 결과를 예측하여 무엇을 기준으로 해야 할지 논리적으로 정할 수 있었다. 또한 넓이의 의미를 모델링할 때는 길이 기준과 넓이 기준을 동시에 생각해야 하는 어려움이 있지만(Baroody & Coslick, 1998), 이 역시 적절한 도입 활동을 통해 별다른 어려움 없이 학생들이 적용하고 있음을 알 수 있었다.

다만, 이와 같은 연구 결과를 해석하고 적용하는 데 있어서 주의할 점이 있다. 본 연구는 알고리즘 위주로 가르치기 쉬운 소수의 나눗셈에 대해서 십진블록을 활용하여 학생들에게 유의미한 수업을 할 수 있다는 경험적 근거를 제공한다는 점에서 의의가 있다. 하지만, 십진블록을 활용한 소수의 나눗셈 지도가 모든 나눗셈 지도에 적합하다는 것을 시사하지는 않는다. 예를 들어, 십진블록으로 모델링했을 때 너무 많은 블록이 필요한 경우도 있을 수 있고, 특정 나눗셈의 경우 넓이의 의미로 모델링하는 것이 불가능할 수도 있다. 따라서 수의 범위를 고려하여 각 차시에서 다루는 연산의 의미를 이해하고 해당 계산 원리를 알아볼 수 있는 문제를 제시함으로써 십진블록으로 모델링하는 장점을 충분히 살릴 필요가 있다.

셋째, 의미 있는 연산 지도를 위해서는 학생들의 사고를 촉진하고 이끌 수 있는 교사의 안내가 중요하다. 본 연구에서 십진블록의 효과적인 활용 저변에 깔려 있는 것은 매 차시마다 십진블록 활동과 나눗셈 알고리즘과의 연결을 의도적으로 강조하는 교사의 역할이다. 최근, 학생들의 이해를 증진시키기 위한 한 방안으로 수학적 연결을 강조하고 있다(Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001; NCTM, 2000). 학생들이 가지고 있는 수학적 지식을 서로 연결할 수 있을 때, 학생들의 이해는 더 깊어지고 더 오래 지속되기 때문이다. 실제 구체물을 이용한 활동을 알고리즘과 의도적으로 연결하지 않는 경우 학생들의 머릿속에는 비형식적 전략과 알고리즘이 연결되지 않은 채로 존재할 수도 있다(Resnick & Ford, 1981). 본 연구에서는 교사가 일관되게 십진블록을 이용하여 계산한 과정을 알고리즘의 각 단계와 연결하여 설명해 보게 함으로써, 학생들이 수학적 연결을 경험할 수 있는 기회를 가졌다.

마지막으로, 학생들이 연산의 결과에 대해 어떻게 생각하고 있는지를 파악하고 확고하게 이해하도록 하는 지도가 중요하다. 학생들은

종종 지필 계산을 잘하는 경우에도 연산 감각이 부족하여 구한 답이 타당한지를 판단하지 못하거나 그 답이 무엇을 의미하는지, 왜 그러한 답이 나왔는지를 설명하지 못하는 경우가 많다. 본 연구에서는 십진블록을 활용한 소수의 나눗셈 지도에서 학생들이 연산의 결과를 어떻게 이해하여 모델링하는지를 교사의 발문과 수학일지를 통해 검토해보았다. 자신의 생각을 표현하는 능력이 부족한 소수의 학생들은 수학일지에 제대로 표현하지 못하거나 알고리즘으로 설명하기도 하였다. 하지만 전반적으로 대부분의 학생들은 십진블록으로 모델링하면서 이해한 소수의 나눗셈의 의미와 함께, 연산의 결과를 이해하여 설명하였다. 또한 알고리즘의 각 단계와 계산 원리도 십진블록으로 모델링하는 과정과 연결하여 정확하게 이해하고 있음을 확인할 수 있었다. 이런 측면에서 연산 지도를 할 때 답을 구하는 것이 끝이 아니라, 계산 결과의 적합성 여부를 거꾸로 생각해보는 기회를 제공하는 것 역시 중요하다고 볼 수 있다.

참고문헌

교육부(1998). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과**. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2002). **수학 5-나 교사용 지도서**. 서울: 대한교과서 주식회사.

김남희(1999). 수학의 기본 구조 지도와 딘즈블록. **학교수학, 1**(1), 305-324.

김용태(2002). 조작활동을 통한 분수와 소수 개념의 연결 지도에 관한 연구. **초등교육연구, 17**(3), 1-26.

김용태, 임해경, 안병곤, 신봉숙(2001). 소수 개념 지도에 관한 연구. **수학교육학연구, 11**(1), 223-238.

방정숙, 김재화(2006). 초등학교 6학년 학생들의 소수 계산 오류와 선행지식간의 연결 관계 분석 및 지도방안탐색. **수학교육, 45**(3), 275-293.

변희현(2005). **소수 개념의 교수학적 분석**. 서울대학교 박사학위논문.

선춘화, 전평국(2005). 초등학교 6학년 학생의 수감각 실태조사. **수학교육, 44**(4), 587-602.

윤희태(2002). **초등학생들의 기초 계산 오류에 대한 분석적 연구**. 인천교육대학교 대학원 석사학위 논문.

이경아(1996). **유리수 계산에서 나타나는 오류의 현상적 분석**. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문.

이소연(2001). 십진블록을 이용한 초등학교 연산지도 방법 탐색. **학교수학교육학회논문집, 1**, 111-123.

정유경(2004). **초등학교 수학 수업에서 연산 알고리즘 발명을 위한 십진블록의 활용 방안 연구**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 권성룡 · 김남균 · 김수환 · 김용대 · 남승인 · 류성림 외 6인 공역(2005). 수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게? 서울: 경문사.

Drexel, R. E. (1997). *Connecting common fraction and decimal fraction concepts: A common fraction perspective.* Unpublished doctoral dissertation. University of Wisconsin-Madison.

Hershkowitz, R.; Schwarz, B. B. & Dreyfus,

T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2). 195-222.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fraction. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. S. Hattrup (Eds.), *Analyses of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 283-322). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades.* Vol. 2., pp. 41-52. Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts. The acquisition of decimal knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedual knowledge: The case of mathematics* (pp. 199-223). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Markovits, Z, & Pang, J. (2006). Number sense: Comparative study with students from Israel and Korea and implications for teaching. In N. Popov, C. Wolhulter, C. Heller, & M. Kysilka (Eds.), *Proceedings of the 4th Conference on Comparative Education and Teacher Training*, Vol. 4., pp. 214-220. Sofia, Bulgaria.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education.* New York: John Wiley & Sons. 강윤수 · 고상숙 · 권오남 · 류희찬 · 박만구 · 방정숙 외 3인 공역(2005). 정성연구방법론과 사례연구. 서울: 교우사.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The Author. 류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙 공역(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Resnick, L. B, & Ford, W. W. (1981). *The psychology of mathematics for instruction.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 구광조 · 오병승 · 전평국 공역 (2000). 수학 학습 심리학. 서울: 교우사.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithemetics errors: The case of decimal fractions, *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27.

Yin, R. K. (2002). *Case study research: Design and methods.* Thousand Oaks, CA: SAGE.

An Analysis on the Process of Conceptual Understanding of Fifth Grade Elementary School Students about the Division of Decimal with Base-Ten Blocks

Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)
Kim, Soo Jeong (Busan Shin-Cheon Elementary School)

The purpose of this study was to propose instructional methods using base-ten blocks in teaching the division of decimal for 5th grade students by analyzing the process of their conceptual comprehension. The students in this study were found to understand the two main meanings of the division of decimal, distribution and area, by modeling them with base-ten blocks. They were able to identify the algorithm through the use of base-ten blocks and to understand the principle of calculations by connecting the manipulative activities to each stage of algorithm. The students were also able to determine using base-ten blocks whether the results of division of decimal might be reasonable. This study suggests that the appropriate use of base-ten blocks promotes the conceptual understanding of the division of decimal.

* **Key words** : division of decimal(소수의 나눗셈), base-ten blocks(십진블록), conceptual understanding(개념적 이해), the meaning of operation(연산의 의미), modeling(모델링)

논문 접수: 2007. 6. 30
심사 완료: 2007. 8. 14