

# 단순지지 변단면 압축재의 임계하중

## Elastic Critical Loads of Tapered Compression Members with Simply Supported Ends

송창영\*

Song, Chang-young

### 요약

비대칭 및 대칭 변단면 압축재(=  $m$ )의 임계하중을 수치 해석법의 하나인 유한 요소법으로 결정하였다. 해석에서 고려한 변수는 taper parameter(=  $\alpha$ ) 와 단면 성능 변수  $m$ 이다. 구조설계 및 구조의 안전 검토에 임하는 구조 기술자들의 편의를 위하여 유한요소법으로 결정한 임계하중의 계수 변화는 하나의 대수식으로 표시하였다. 대수식에 나타나는 계수들은 회귀분석법으로 결정하였다.

### Abstract

Elastic critical loads of sinusoidally tapered bars with simply supported ends are determined by finite element method. The parameters considered in the analysis are taper parameter ( $= \alpha$ ) and section property parameter ( $= m$ ). The analysis result for the special case of prismatic bar ( $\alpha = 0$ ) shows good agreement with the existing value. The changes of the critical load coefficients are expressed by an algebraic equation. The coefficients appearing in the equations are determined by regression technique. The critical loads coefficients estimated by the proposed equations reveal little errors when they are compared with those determined by finite element method.

키워드 : taper 변수, 유한요소법, 단면 성질 변수, 회귀분석

Keywords : Taper Parameter, Finite Element Method, Section Property Parameter, Regression

## 1. 서론

공항이나 여객 터미널 및 경기장등 대공간 지붕을 지지하는 기둥은 대부분이 변단면 형태를 취하게 된다. 한국의 전통사찰에서도 기둥은 거의 대부분 변단면 형태를 취한다. 이때 기둥의 지지상태는 양단이 단순지지(simple support)로 가정하면 구조의 안전에 큰 지장은 없게 된다.

이와 같이 일반적인 사용에도 불구하고 설계에 필요한 임계하중 산정은 특별한 경우를 제외하고는 정해치(exact or closed form solution) 결정이 쉽지 않다. 이번의 연구에서는 대칭 및 비대칭으로 taper

진 압축재의 임계하중 결정을 유한 요소법으로 결정하기로 한다. 해석 변수는 단면의 성질을 지배하는  $m$ , taper의 정도를 나타내는  $\alpha$ 이다.

## 2. 임계하중 결정의 고전적 방법

아래의 <그림 1(a), (b)>는 이번 연구에서 택한 변단면 압축재이다<sup>4,7,8</sup>.

(a) 비대칭 변단면 압축재

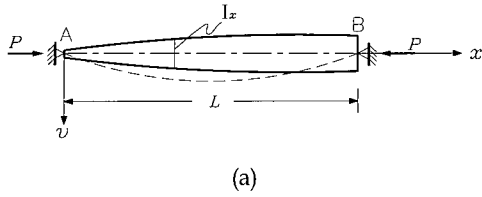
$$I_x = I_0 \left(1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{2L}\right)^m \quad (1)$$

(b) 대칭 변단면 압축재

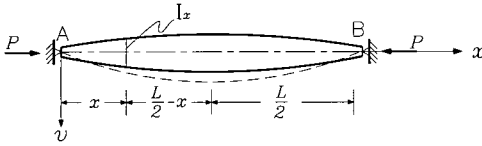
$$I_x = I_0 \left(1 + \alpha \sin \frac{\pi x}{L}\right)^m \quad (2)$$

위의 두 그림에  $\alpha$ 는 taper parameter로 이번 연구

\* 교신저자, 정회원 · (주)한국구조물안전원 대표이사, 공학박사  
Tel : 062-526-6323 Fax : 062-526-6324  
E-mail : song4624@hanmail.net



(a)



(b)

〈그림 1〉 변단면 압축재

에서는  $\alpha=0.0$ (등단면)에서 시작하여 0.1씩 증가시켜 2.0까지로 하였다. 또, 단면 2차 모멘트를 지배하는 sectional parameter  $m$ 은  $m=1, 2, 3$  및 4로 하였는데 각각의 기하학적 의미는 앞으로 생략한다. 좌굴지배 미분 방정식은 아래 식으로 주어진다<sup>2,3)</sup>.

$$EI(x)y'' + Py = 0 \quad (3)$$

단면 변화가 <그림 1>과 같을 때 미분 방정식의 정해는 불가능하므로 따라서 임계하중 결정도 불가능하게 된다. 이때에는 흔히 Rayleigh-Ritz법, Galerkin법, Timoshenko법 등을 이용하여 임계하중의 근사치를 결정 할 수 있다. 마지막으로 유한 차분법(finite difference method)도 유익한 방법이다.

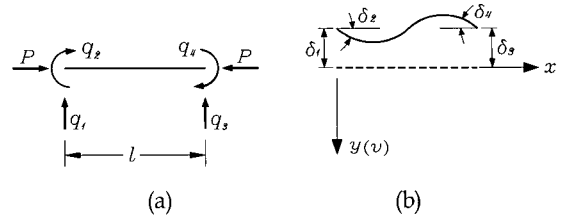
### 3. 유한 요소법

#### 3.1 요소의 변형 함수

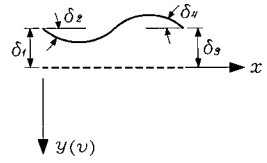
<그림 2>는 각 절점의 자유도가 2인 선형 요소이다. 요소의 휨 강성행렬 결정을 위한 제 1단계는 요소의 변위 함수(displacement function)인데 위의 <그림 2(b)>와 같은 조건에서 처짐함수는 다음과 같은 식으로 표시된다.

$$y = [N_1, N_2, N_3, N_4] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = [M] \{\delta\} \quad (4)$$

위의 식 (4)에서  $N_1, N_2, N_3$  및  $N_4$  는 소위



(a)



(b)

〈그림 2〉 선형요소의 힘과 변형성분

shape function으로 그 내용은 다음과 같다<sup>5)</sup>.

$$\begin{aligned} N_1 &= -1 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_2 &= x\left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ N_3 &= -3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3, & N_4 &= -\frac{x^2}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

식 (4)중의  $\{\delta\}$ 는 절점 변형 vector를 나타낸다.

#### 3.2 정식화

요소의 휨으로 인한 변형에너지가 절점력  $q_i$  및 축방향 압축력  $P$ 로 인한 일과 같다고 놓으면 요소의 강성행렬이 얻어지는데 그 내용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [k] &= \int_0^l \left[ \frac{d^2 N}{dx^2} \right]^T EI_{(x)} \left[ \frac{d^2 N}{dx^2} \right] dx \\ &- P \int_0^l \left[ \frac{dN}{dx} \right]^T \left[ \frac{dN}{dx} \right] dx = [k_b] - P[k_g] \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서의 첫째항 즉

$$[k] = \int_0^l \left[ \frac{d^2 N}{dx^2} \right]^T EI_{(x)} \left[ \frac{d^2 N}{dx^2} \right] dx \quad (7)$$

$[k_b]$ 의 정확한 계산은 다소 복잡하므로 이번 연구에서는 각 요소 중앙에서의 단면 2차 모멘트값  $I_e$ 를 이용하였다. 실제로  $l=L/20, m=2, \alpha=1$  이면 열 번째 요소의 강성행렬 중  $k_{11}$ 의 수치적분치는  $24826.1943 EI_0/l^3$ , 요소 중앙의 단면 2차 모멘트를 이용하면  $24797.4888 EI_0/l^3$  이다. 실제로 이와 같은 대치로 인한 고유치의 오차는 작은 것으로 알려져 있다. 1)

식 (7)에서  $I_{(x)}$ 의 변화를  $I_e = I_{(x=l/2)}$ 로 놓으면 요소의 강성행렬은 아래 식으로 된다.

$$[k_b] = \frac{EI_{(e)}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & \text{symm} \\ -6l & 4l^2 \\ -12l & 6l & 12 \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8.a)$$

$$[k_g] = \left(\frac{1}{30}\right) \cdot \frac{P}{1} \cdot \begin{bmatrix} 36 & \text{symm} \\ -3l & 4l^2 \\ -36 & 3l & 36 \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8.b)$$

### 3.3 임계하중의 산정

일반적으로 부재를 세분할수록 수치해석 결과는 정해치에 보다 접근하는 것으로 알려져 있다. 이번 연구에서는 부재 길이  $L$  을 30등분 ( $l=L/30$ ) 한 다음 각 요소의 식 (8.a) 및 (8.b)을 이용하여 휨 및 강성행렬을 구하였다. 요소의 강성 행렬을 차례로 조합하면 구조물의 강성 행렬이 얻어지는데 그 형태는 아래와 같이 된다.

$$([K_b] - P[K_g])\{\Delta\} = \{Q\}, \quad \{Q\} = \{0\} \quad (9)$$

식 (9)는 전형적인 고유치 문제 행렬의 차원이 클 때에는 computer를 이용한 반복법(iterative method)이 편리하다. 그러나 식 (9)에 반복법을 적용하면 최대 고유치가 먼저 구하여 지므로 우리가 원하는 최소 고유치 즉, 임계하중 결정을 위하여 식 (9)를 다음과

같이 변형시킨다.

$$\det\left([K_b]^{-1}[K_g] - \frac{1}{D}[I]\right) = 0 \quad (10)$$

위의 식 (10)에서  $[I]$  는 단위행렬이다.

아래 <그림 3>은 요소의 분할수 증가에 따른 임계하중 계수  $C$ 의 수렴 현상을 보여주고 있다.

그림에서 알 수 있듯이 요소의 분할 수가  $N=20$  이면 충분한 수렴치 일 것 이라는 판단이 나온다. 그러나 보다 정밀한 결과를 얻기 위하여 부재를 30 등분 ( $l=L/30$ )하여 식 (8) 및 (9)의 과정을 되풀이 하여 산정한 임계하중 계수  $C$  를 다음의 <표 1>로 주어졌다.

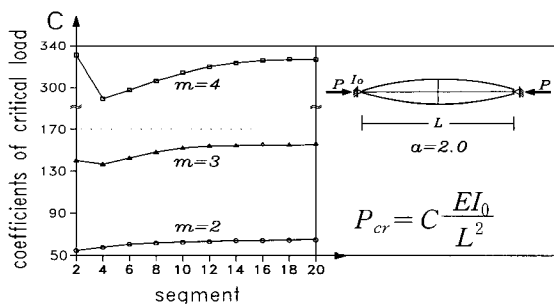
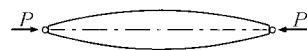
### 4. 회귀분석

구조기술자가 앞의 그림과 같은 변단면 압축재의 구조검토나 설계에 임하게 되면 적절한 설계자료 찾기가 쉽지 않다. 또한 <표 1>의 자료는 Matlab이나 특정 software를 참고 할 때에만 필요한 정보의 입수가 가능하다.

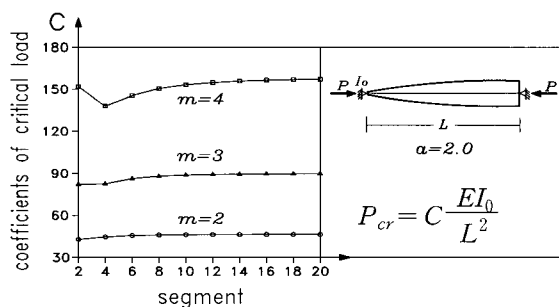
이런 단점을 해소하기 위하여 이번 연구에서는 두 가지 회귀식을 제안하였다.

<표 1> 요소 수에 따른 임계하중 계수

(a) 대칭 변단면 압축재



(a) 대칭으로 taper진 변단면 압축재



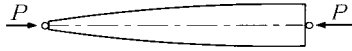
(b) 비대칭으로 taper진 변단면 압축재

<그림 3> 요소수의 증가와 수렴도

$\alpha$	m = 1		m = 2		m = 4	
	$l = \frac{L}{30}$	$l = \frac{L}{20}$	$l = \frac{L}{30}$	$l = \frac{L}{20}$	$l = \frac{L}{30}$	$l = \frac{L}{20}$
0.0	9.8664	9.8693	9.8664	9.8693	9.8664	9.8693
0.1	10.6888	10.7022	11.6008	11.6079	13.6755	13.6348
0.2	11.5468	11.5297	13.4638	13.4586	18.2588	18.2482
0.3	12.3610	12.3534	15.4413	15.4344	23.8962	23.8603
0.4	13.1613	13.1686	17.4599	17.5174	30.6166	30.5056
0.5	14.0409	13.9776	19.6889	19.7034	38.3375	38.2950
1.5	22.0612	21.9938	47.7411	47.6505	194.8053	193.6790
1.6	22.7882	22.8002	51.0732	50.9614	219.8823	218.4140
1.7	23.6366	23.5752	54.5922	54.4866	246.3759	244.5312
1.8	24.3919	24.3750	58.2690	58.0626	276.5217	272.5061
1.9	25.1414	25.1671	61.9321	61.7016	305.0633	302.1071
2.0	25.9828	25.9503	65.7907	65.4916	336.4359	332.8216

<표 1> 요소 수에 따른 임계하중 계수

(b) 비대칭 변단면 압축재



α	m = 1		m = 2		m = 4	
	$l = \frac{L}{30}$	$l = \frac{L}{20}$	$l = \frac{L}{30}$	$l = \frac{L}{20}$	$l = \frac{L}{30}$	$l = \frac{L}{20}$
0.0	9.8664	9.8693	9.8664	9.8693	9.8664	9.8693
0.1	10.5385	10.5389	11.2458	11.2334	12.7604	12.7663
0.2	11.1995	11.1840	12.6344	12.6577	16.0989	16.1134
0.3	11.8225	11.8341	14.1620	14.1459	19.8733	19.9055
0.4	12.4945	12.4730	15.6913	15.6760	24.1970	24.1479
0.5	13.1168	13.1208	17.2998	17.2604	28.9356	28.8742
1.5	19.2322	19.2601	35.8169	35.7387	102.8716	102.4208
1.6	19.9009	19.8587	37.8653	37.8592	112.5608	112.4648
1.7	20.4776	20.4650	40.0131	40.0030	123.3679	122.9639
1.8	21.0470	21.0602	42.1252	42.2168	134.3076	134.0065
1.9	21.6619	21.6445	44.5085	44.3655	146.3784	145.2971
2.0	22.1856	22.2393	46.6633	46.6824	157.7648	157.2013

4.1 제안식

단면성질 매개 변수 즉  $m$ 의 각각에 대하여 임계하중 계수  $C$ 의 변화를 아래의 식으로 가정하였다.

$$C(\alpha) = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2$$

$$P_{cr} = C(\alpha) \frac{EI_0}{L^2} \tag{11}$$

식 (11)에 나오는 상수는 회귀분석 기법으로 결정하였으며 그 결과는 <표 2>와 같다.

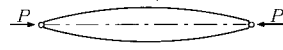
<표 2> 제안식 1에 의한 회귀상수

	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
$A_0$	9.8811	9.8078	10.4619	12.0869
$A_1$	8.2638	17.2265	20.7161	13.7510
$A_2$	-0.1180	5.3179	25.6736	71.9285
$\gamma$	1.0	1.0	1.0	1.0

	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
$A_0$	9.8888	9.8232	9.8107	9.9620
$A_1$	6.5208	13.7461	20.4633	25.7936
$A_2$	-0.1765	2.3493	9.7747	23.9197
$\gamma$	1.0	1.0	1.0	1.0

유한요소해석 결과와 식 (11)에 의한 결과를 비교한 일부가 다음의 <표 3> 및 <표 4>이다.

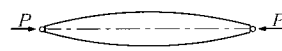
<표 3> 제안식 1에 의한 좌굴하중 계수 (대칭 변단면)



$$P_{cr} = C \cdot \frac{EI_0}{L^2}$$

α	m = 1		m = 2		m = 4	
	$C_{fem}$	$C_{est}$	$C_{fem}$	$C_{est}$	$C_{fem}$	$C_{est}$
0.0	9.8693	10.6229	9.8693	11.0257	9.8693	16.1812
0.1	10.7022	11.2256	11.6079	12.4362	13.6348	16.9304
0.2	11.5297	11.8493	13.4586	13.9914	18.2482	19.2734
0.3	12.3534	12.4941	15.4344	15.6915	23.8603	23.2103
0.4	13.1686	13.1600	17.5174	17.5364	30.5056	28.7411
0.5	13.9776	13.8469	19.7034	19.5261	38.2950	35.8656
1.5	21.9938	21.8748	47.6505	47.3884	193.6790	194.7723
1.6	22.8002	22.7934	50.9614	50.9712	218.4140	219.4291
1.7	23.5752	23.7331	54.4866	54.6987	244.5312	245.6797
1.8	24.3750	24.6939	58.0626	58.5711	272.5061	273.5242
1.9	25.1671	25.6757	61.7016	62.5883	302.1071	302.9624
2.0	25.9503	26.6786	65.4916	66.7503	332.8216	333.9946

<표 4> 제안식 1에 의한 좌굴하중 계수 (비대칭 변단면)



$$P_{cr} = C \cdot \frac{EI_0}{L^2}$$

α	m = 1		m = 2		m = 4	
	$C_{fem}$	$C_{est}$	$C_{fem}$	$C_{est}$	$C_{fem}$	$C_{est}$
0.0	9.8693	10.5667	9.8693	10.8310	9.8693	12.0362
0.1	10.5389	11.0137	11.2334	11.9268	12.7663	14.2325
0.2	11.1840	11.4785	12.6577	13.1013	16.1134	16.9727
0.3	11.8341	11.9612	14.1459	14.3547	19.9055	20.2568
0.4	12.4730	12.4618	15.6760	15.6869	24.1479	24.0848
0.5	13.1208	12.9830	17.2604	17.0979	28.8742	28.4566
1.5	19.2601	19.1480	35.7387	35.5427	102.4208	102.0896
1.6	19.8587	19.8631	37.8592	37.8206	112.4648	112.4443
1.7	20.4650	20.5961	40.0030	40.1774	122.9639	123.3429
1.8	21.0602	21.3469	42.2168	42.6129	134.0065	134.7854
1.9	21.6445	22.1156	44.3655	45.1273	145.2971	146.7718
2.0	22.2393	22.9022	46.6824	47.7205	157.2013	159.3021

4.2 제안식 2

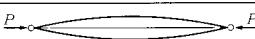
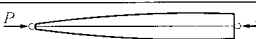
앞의 제안식 1에서는 각각의  $m$ 에 대하여 회귀상수를 단면 성질 매개변수 전체에 대한 식도 가능하다. 이를 위하여 임계하중 계수  $C$ 를 다음과 같은 대수식으로 표시한다.

$$C(a, m) = (A_0 + A_1 m + A_2 m^2) + (B_0 + B_1 m + B_2 m^2) + (C_0 + C_1 m + C_2 m^2) a^2$$

$$P_{cr} = C(a, m) \cdot \frac{EI_0}{L^2} \quad (12)$$

앞의 제안 식 (1)에서처럼 식 중의  $A_0, A_1, \dots$  등은 회귀분석 기법으로 결정하였는데 결과는 <표 5>와 같다.

<표 5> 제안식 1에 의한 회귀상수

		
$A_0$	11.5904	10.0895
$A_1$	-2.3131	-0.2505
$A_2$	0.6606	0.0542
$B_0$	-13.1274	-1.8699
$B_1$	26.0353	8.8225
$B_2$	-5.0689	-0.4738
$C_0$	19.6933	3.5616
$C_1$	-30.0564	-6.5527
$C_2$	10.9106	2.9048
$r$	1.0	1.0

## 5. 결 론

정현상으로 taper진 단순지지 변단면 압축재의 임계 하중을 유한 요소법으로 결정하였다. 예측한 대로 임계하중은 taper parameter  $a$  및 sectional property parameter  $m$ 이 증가함수이다.

임계하중 계수의 변화를 대수식으로 표시하였다. 대수식에 나타나는 계수값 들은 회귀 분석 기법으로 결정하였다. 유한 요소법으로 결정한 임계하중계수들을 제안 식으로 산정한 계수들과 비교하면 그 차이는 거의 없다. 따라서 변단면 압축재의 설계나 구조검토에 임하는 기술자들은 제안 식을 이용하여 보다 빨리 업무를 진행할 수 있다.

## 참고문헌

1. Nathan M. Newmark, Emilio Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.
2. Stephen P. Timoshenko and James M. Gere,

- "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Co., 1963
3. 이수근, "Eigenvalue Problems of the Tapered Bars with Partially Fixed Ends", 서울대학교 대학원 박사학위청구논문, 1979
4. Daniel J. Gorman, "Free Vibration Analysis of Beams and Shafts", John Wiley & Sons, Inc., 1975
5. Himat Solanki and Gajanan M. Sabnis, Buckling Load of Tapered Columns, pp436~442, Structures Congress, 1989
6. Moshe Eisenberger and Yoram Reich, Buckling of Variable Cross Section Columns, pp443~451, Structures Congress, 1989
7. Frank E. Weisgerber and Khalid Salahuddin, Elastic Stability of Non-Prismatic Columns, pp410~417, Structures Congress, 1989
8. 이수근, "構造物의 安定理論", 전남대학교 출판부, 1995
9. Alexander Chajes, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, Inc., 1974