韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 21집 제 3호, 2007. 9. 527-540

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21, No. 3, Sep. 2007. 527-540

수학적 관행의 변화에 관한 소고

김 부 윤 (부산대학교)
주 신 영 (부산대학교 대학원)

수학적 지식들이 참으로 인정되기 위해서는 많은 시간과 노력이 필요하다. 수학적 지식들은 추가되거나, 수정되거나, 혹은 거짓인 것으로 밝혀져왔다. 수학적 지식들은 수학적 언어, 명제, 추론, 질문, 메타수학적 관점으로 이루어져있다. 이것들은 수학자들의 연구과 반박에 의해, 반박을 고려한 증명의 수정에 의해, 새로운 개념의 소개에 의해, 새로운 개념에 대한 질문의 추가에 의해, 새로운 질문에 대한 답변을 찾기 위한 노력에 의해, 이전의 연구들을 현재에 적용하려는 시도에 의해 끊임없이 변화되어왔다. 본 연구에서는 Kitcher가 제시한 수학적 지식의 변화를 소개하고, 그 변화의 다양한 예에 대하여 살펴본다.

Ⅰ. 서 론

수학교육의 관심은 언제나 학습자들에게 수학적 지식을 잘 가르치는 것에 있었고, 현재도 그러하다. 수학적 지식을 잘 가르친다는 것은 어떤 내용을 단순하게 전달하는 것도 아니고, 주어진 문제를 해결하는 알고리즘을 암기시키는 것도 아니다. 스켐프(Skemp ; 1919-1995)는 수학적 개념의 이해를 도구적 이해와 관계적 이해로 구분하면서, 도구적 이해는 어떤 것을 진정으로 알지 못한 채 공식을 사용하는 능력이며, 관계적 이해는 무엇을 해야 할 지와 왜 그렇게 되는지를 모두 아는 것이라고 정의하였다(Skemp, R., 1987). 학습자들의 수학적 이해력을 증진시키고, 수학적 사고능력을 개발하기 위해서는 도구적 이해보다 관계적 이해에 초점을 맞춰 가르쳐야 한다는 사실은 자명하다. 그러나 수학적 지식의 형성 과정에 대한 이해 없이 형식적으로 체계화된 수학을 곧바로 받아들이게 되면, 수학적 지식을 관계적으로 이해하기는 어렵다. 학습자들은 도구적으로 이해된 지식만을 가지고도 교과서의 문제들을 대부분 해결할 수 있기 때문에 수학적 지식을 관계적으로 이해할 필요성을 느끼지 못하기도 한다.

실제로 수학 교과는 수학의 정신도야성에 큰 가치를 부여하던 17세기에 <유클리드 원론>을 중등학교 교과서로 채택하였고, 그 결과 수학교육은 설명과 증명의 해설이 주된 내용인 형식적인 교육으로 흘러가게 되었다(우정호, 2000). 르네상스 이후 발견과 개발 정신에 의해 <유클리드 원론>은 철학적 교육학적 측면에서 발견 과정을 숨기고 있다는 점에서 비판을 받기 시작하였고, 이러한 시대정신에 따라 제기된 교육적 대안이 '발생적 접근'이다(우정호, 1998). 데카르트(Descartes ; 1596-1650)에

---

* ZDM 분류 : A35
* MSC2000 분류 : 97-03
* 주제어 : 수학적 지식, 수학적 변화, 수학적 관행

따르면, 그리스 수학자들은 새로운 진리를 발견하는 방법인 '분석적' 방법을 숨기고 원론을 바탕으로 한 '정신을 질식시킬 정도의' 엄밀한 연역적 전개를 보여주어 감탄하도록 만듦으로써 교육적으로 커다란 잘못을 범하였다(우정호, 1998 재인용). 이 발생적 방법은 16세기의 베이컨(Bacon ; 1561-1626), 17-18세기의 아르노(Arnauld ; 1612-1694)와 클레로(Clairaut ; 1713-1765)를 거쳐 발전되어 20세기 초에 클라인(Klein. F. ; 1849-1925)과 푸앵카레(Poincaré ; 1854-1912)에 의해 강력하게 주장되었다. 역사발생적 원리는 수학적 지식이 발생한 이유와 그 지식이 형성되어 온 과정을 무시하고 형식적으로 구조화된 지식을 제공하는 수학교육에 대한 비판으로 학습자들이 수학적 지식의 구성 과정을 수학의 교수-학습에서 재현하게 한다는 것이 그 핵심이다.

1980년대 이후 수학교육계는 '증명과 반박'을 이용한 학습에 관심을 가지고 연구하기 시작했다. 포퍼(Popper ; 1902-1994)는 과학 연구 과정에서 아무리 오랫동안 대표 이론으로 간주되었던 것이라도 그것의 장점이 아니라 문제점을 지속적으로 발견하려 노력해야 하며 문제점이 정말로 발견되었을 때는 주저 없이 기존 이론을 폐기하고 새로운 대안을 찾아야 한다고 주장하면서 어떤 이론이 '과학적'이기 위해서는 경험적 사실에 의해 수정되거나 반박되는 일이 실제로 일어날 수 있어야 한다고 하였다(이상욱· 홍성욱· 장대익·이중원, 2007). 이러한 비판적 오류주의에 따르면, 과학적 지식은 추측과 반박에 의해서 성장하며, 지식은 결코 확실성을 가질 수 없고 단지 잠정적일 뿐이다. 인간은 결코 진리를 알 수는 없으며, 단지 추측할 수 있고, 추측을 개선할 수 있을 뿐이다. 추측을 검사하고 추측에 대한 반박을 고려하여, 추측을 강화하거나 이를 제거할 수 있는 새로운 추측을 창안하여 대체함으로써 지식의 성장이 이루어진다. 포퍼의 비판적 오류주의에 입각하여 라카토스(Lakatos ; 1922-1974)는 '증명과 반박'의 논의를 제시했다. 라카토스에 의하면, 수학은 '추측-증명-반박'의 과정을 통해 추측이 끊임없이 개선되는데, 증명은 추측을 개선하는 과정에서 이론적 개념을 만드는 중요한 발견적 도구이다(우정호, 2001).

수학적 지식이 발생해서 진리로 정립되기까지는 많은 시간과 노력을 필요로 한다. 그리고 그 기간 동안 수학적 지식들은 추가되기도 하고, 수정되기도 하며, 심지어 거짓으로 판명되어 삭제되기도 한다. 수학적 언어, 질문, 명제, 추론 등 수학적 지식을 구성하는 요소들은 수학자들의 계속적인 검토와 반박, 그 반박을 고려한 증명의 수정, 새로운 개념의 도입, 새로 도입된 개념에 대한 새로운 질문들의 추가, 새 질문의 해답을 얻기 위한 노력, 기존에 이루어졌던 과정들을 돌아보고 현재에 적용하려는 시도 등으로 끊임없이 변화한다. 이에 본 고에서는 키처(Kitcher ; 1947-)가 그의 저서 'The Nature of Mathematical Knowledge'에서 제시한 수학적 지식의 성장과정을 살펴보고자 한다. 키처는 수학의 역사를 수학적 관행의 변화로 간주하고 수학적 관행의 요소들이 어떻게 변화하는가를 설명하였다. 본 고에서는 키처가 제시한 수학적 관행의 각 요소들과 그 변화를 정리하고, 키처가 제시한 예들을 구체적으로 설명한다. 그리고 키처가 제시한 것 외에 수학사에서 나타나는 각 변화들의 또 다른 예들을 제시한다.

II. 수학적 지식의 변화

과학철학자들은 어떤 이론과 그 이론에 반대되는 견해 사이에서 발생하는 불일치가 중요한 의미를 가지고 있다고 인식하였을 뿐만 아니라, 과학의 발전은 비교적 평온한 기간 동안 그 불일치의 해결을 촉진시키는 가정들을 배경으로 하여 진보한다고 생각하였다. 쿤(Kuhn ; 1922-1966)은 "이론적 원칙들에만 전념하여 단순하게 과학적 변화를 이해할 수 있다."는 사실을 부정하고, 변화의 단위로서 이론의 경험주의적 개념이나 믿음의 총체 대신 패러다임의 개념을 도입하였다. 키처는 이러한 쿤의 관점에서 단순히 변화에 초점을 맞추어 과학적 변화를 이해하려 하는 대신 변화를 언어, 이론적 원칙, 경쟁할 가치가 있다고 여겨지는 실험적이고 이론적인 일의 실례, 인정된 추론 방법, 문제해결 기술, 문제들의 중요성에 대한 평가, 모험심의 본성에 대한 변형과 견해 등의 많은 구성요소들을 가지는 과학적 관행(practice)으로 간주해야 한다고 주장한다. 과학적 변화에 대한 쿤의 중요한 통찰 중의 하나는 과학의 역사를 관행의 연속으로 간주하고 있다는 점인데 키처는 이 통찰을 수학에도 적용하여 수학적 관행의 발전과정에 초점을 맞추어 수학적 변화를 이해하였다.

그는 수학적 관행은 수학적 언어(mathematical languages), 인정된 명제집합(the set of accepted statements), 인정된 추론집합(the set of accepted reasonings), 중요한 것으로 인정된 질문집합(the set of accepted questions), 그리고 증명, 정의, 수학의 범위와 구조에 대한 주장들에 관한 기준들을 포함하는 메타 수학적 관점들의 집합(the set of meta-mathematical views)의 다섯 가지 구성요소들로 구성되었다고 간주하고 이 구성요소들을 변화시키는 합리적 이유를 이해하는 것이 바로 수학적 지식의 성장을 이해하는 것이라고 말한다. 과학적 관행들은 새로운 관찰들에 의하여 변화할 수 있으며, 관행의 다양한 구성요소들 사이의 모순의 결과로 변화할 수도 있다. 새로운 관행으로의 움직임은 오래된 관행의 불균형에서 시작할 수 있다. 과학적 관행과 마찬가지로 수학적 관행의 구성요소들은 완전한 조화를 이루지 못하고 있으며, 수학적 변화는 이 구성요소들의 일치를 위한 노력으로부터 시작된다(Kitcher, 1984).

1. 수학적 언어의 변화

키처가 제시한 수학적 언어의 변화의 유형은 개념적 변화와 새로운 표현의 등장이 있다. 첫 번째 유형인 개념적 변화에 관해 살펴보자. 기존에 선택되었던 본질들의 서술적인 특징들을 부여하는 관련 용어들은 처음에 패러다임을 통해 고정된다. 그러나 기존의 용어들이 합리화되지 않는 조건과 상황들이 발견됨에 따라 용어의 개념은 수정되고 변화한다. 이러한 용어 개념의 수정을 개념적 변화라 한다.

해석학의 역사에서 '함수'라는 용어는 17세기에 처음 사용되었고, 그 개념은 라이프니츠(Leibniz ; 1646-1716)에 의하여 처음으로 확립되었다. 라이프니츠는 곡선 함수들은 곡선의 길이 또는 넓이와

같은 것이며, 곡선 위의 점의 함수들은 그 점에서의 곡선의 접선과 같은 것이라고 생각하였으며, 함수를 「변수 x의 값의 변화에 따라서 다른 변수 y가 정해질 때, y는 x의 함수」라고 정의하였다. 이후 1718년에 베르누이(Bernoulli, J. ; 1667-1748)는 「함수란 변수와 상수로 나타낸 어떤 표현」이라고 하였으며, 1748년에 오일러(Euler ; 1707-1983)는 「변수와 상수에 의해서 만들어지는 해석적인 방정식 또는 식」이라고 함수를 정의하였으며, 그래프가 하나의 연속곡선으로 나타나는 것에 대하여 함수라는 용어를 사용하였다.

그러나 18세기 후반에 진동하는 끈에 대한 편미분방정식의 해에 대한 논의에서 하나의 해석적인 식으로 나타내어지지 않는 함수가 등장하였고, 푸리에(Fourier ; 1768-1830)가 열전도에 관한 연구에서 「임의의 함수는 삼각급수로 전개가능하다.」고 주장하면서, 함수는 하나의 해석적인 표현이 가능한 것이라는 생각에 변화를 가져왔다(우정호, 1998).

이에 따라 일반적으로 어떤 독립된 변량의 값에 따라 그 값이 정해지는 종속 변량은 모두 함수라는 생각에 이르게 되었고, 디리클레(Dirichlet ; 1805-1859)는 「X, Y를 두 집합이라 하면 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나만 대응할 때, 이러한 대응관계를 X에서 Y로의 함수」라고 정의하였다. 또한 데데킨트(Dedekind ; 1931-1916)는 「두 집합 X, Y가 주어졌을 때, X의 각 원소에 Y의 원소가 꼭 하나씩 대응되는 규칙이 있으면 이러한 대응규칙을 X에서 Y로의 사상(mapping)이라고 하고, 특히 Y가 수로 이루어진 집합이면 이 사상을 함수」라 하였다. 데데킨트의 정의는 함수의 개념을 수뿐만 아니라 일반적인 두 집합 사이의 관계로 확장하였다. 1930년대에 부르바키 학파는 「두 집합 X, Y가 있을 때 X의 모든 원소에 대하여 그 원소와 주어진 관계에 있는 Y의 원소가 꼭 하나 있으면 그 관계는 함수관계」라고 정의함으로써 함수를 순서쌍의 집합 X×Y의 부분집합으로 정의하였다(이건창, 2000).

언어 변화의 두 번째 유형인 기존에 인정된 정리들에 위배되는 새로운 표현의 등장에 관해 살펴보자. 어떤 새로운 개념이나 표현이 등장했을 때 그 표현이 오랜 시간동안 인정되어오던 기존의 정리들과 모순되는 경우가 있다.

그 첫 번째 예로, 1883년에 칸토어(Cantor ; 1845-1918)가 최초로 도입한 초한서수(transfinite ordinal numbers)들에 대한 기호를 고찰해보자. 칸토어는 「ω는 급수 1, 2, 3, … 에 즉시 뒤따라 나오는 맨 처음의 숫자」라고 발표함으로써 기호 'ω'의 지시대상을 고정했다. 수의 세계는 1, 2, 3,…과 같이 아무리 셈해도 유한이지만 이 유한수의 열을 단번에 뛰어 넘으면 'ω(오메가)'라는 무한수가 모습을 드러낸다(김용운·김용국, 1998).

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots \rightarrow \omega$$

칸토어는 새로운 기호 'ω'의 지시대상을 고정하기 위해서 기존 수학 언어의 설명을 사용했다. 그 시대의 많은 수학자들은 칸토어의 전개방식에 당황하였고 심지어 몇몇은 격분하기까지 하였다. 'ω'의 개념은 「어느 것도 전급수(entire series) 1, 2, 3, … 을 뒤따르지 않는다.」는 기존의 '정리'와 「자연수들의 급수는 끝나지 않는다.」라는 그럴듯한 전제에 의존하여 도출된 「급수가 끝나지 않는 한 전급수

를 따르는 어떤 것에 대해 말할 수 없다.」라는 '정리'에 위배되기 때문이었다.

두 번째 예로 복소수 표현의 도입을 살펴보자. 16세기 이탈리아의 수학자 카르다노(Cardano ; 1501-1576)는 음수의 제곱근을 처음 발표하였고, 오일러는 1770년에 출간한 <대수학(algebra)>에서 허수계는 $\sqrt{-1}$ 즉, i에서 출발하여 만들어진다고 하였다(이건창, 2000).

그러나 「제곱하면 -1이 되는 수」라는 표현인 $\sqrt{-1}$은 「제곱해서 -1이 되는 수는 없다.」라는 기존의 결론에 위배되는 표현이었다. 코시(Cauchy ; 1789-1857)는 $a+b\sqrt{-1}$과 같은 식을 수로 다루는 것을 거부하였고, 드 모르간(De Morgan ; 1806-1871)은 "기호 $\sqrt{-a}$는 의미가 없고, 자기모순적이며, 불합리하다."라고 말하였으며, 해밀턴(Hamilton ; 1805-1865)은 1837년의 한 논문에서 "허수의 제곱은 음수이므로, 허수가 나타낸다고 생각되는 양은 무(無)보다 크지도 않고, 무(無)보다 작지도 아니하며, 무(無)와 같지도 않다. 허수와 같은 것을 바탕으로 하여 성립된 과학을 어렵다."라고 말함으로써 복소수에 대하여 반대 입장을 피력하였다(Klein, M., 1980).

2. 인정된 명제집합의 변화

키처는 수학적 지식의 구성요소 중에서 수학자들이 동의한 사실을 그 시대의 수학적 언어로 형식화한 문장들을 인정된 명제들(accepted statements)이라고 말하고 있다. 키처가 제시한 인정된 명제집합의 변화를 크게 세 가지로 나누어보면, 새로운 명제들이 인정되어 명제집합에 추가되는 것, 기존의 명제들이 삭제되는 것, 새로운 표현이나 개념의 도입으로 인해서 기존 명제가 수정되는 것이다. 아래에서 그 각각에 대해서 살펴보기로 한다.

새로운 명제가 추가되는 경우는 새로운 결과가 발견되었을 경우, 새로운 추론이 발견되었을 경우, 기존의 질문에 대한 답이 밝혀졌을 경우, 기존 명제에 대한 동치 명제가 발견되었을 경우를 들 수 있다. 어떤 새로운 결과가 발견되면 그 결과를 나타내는 명제가 인정된 명제집합에 추가되는 것은 자명하다. 그리고 새로운 추론이 발견되면 그 추론을 구성하는 명제들이 추가되며 그 예들은 제3절에서 제시하겠다. 기존에 존재하던 질문에 대한 답이 밝혀지면 그 답을 나타내는 명제가 추가되며, 그 답에 대한 추론을 구성하는 명제들도 추가된다. 질문의 해결로 인한 명제 추가의 예는 제4절에서 살펴본다. 마지막으로, 이해하기 어려운 명제를 쉽게 이해하기 위한 동치 명제가 발견되거나, 증명하기 어려운 명제를 증명하기 위해서 다른 동치 명제를 발견하면 그 동치 명제가 인정된 명제집합에 추가된다(Kitcher, 1984). 「모든 4 이상의 짝수는 두 개의 소수의 합이다.」라는 골드바흐(Goldbach ; 1690-1764)의 추측은 「모든 6 이상의 정수는 세 개의 소수의 합이다.」라는 명제와 동치이고, 유클리드 제5공준을 증명하기 위하여 많은 수학자들은 유클리드 제5공준과 동치인 명제들[1]을 제시하였다.

1) 주어진 선 위에 있지 않은 주어진 점을 통과하면서 그 주어진 선에 평행한 단 하나의 선을 그을 수 있다(플레이페어), 한 평면에는 모든 곳에서 서로 같은 거리를 유지하는 한 쌍의 직선이 존재한다(포시도니우스와 게미누스), 합동은 아니지만 닮은꼴인 한 쌍의 삼각형이 존재한다(월리스, 사케리, 카르노, 라플라스), 사변형에

키처는 기존 명제가 거짓임이 밝혀짐으로써 그 명제가 삭제되는 경우의 예로서 19세기에 '증명'된 '연속함수의 미분가능성'을 들고 있다(Kitcher, 1984). 이를 구체적으로 살펴보면, 1806년 암페르(Ampère ; 1775-1836)는 모든 함수는 그것이 연속인 점에서 도함수를 가지고 있다고 '증명'하였고, 베르트랑(Bertrand ; 1822-1900) 역시 1875년에 연속함수의 미분가능성을 '증명'하였다(Klein, M., 1984). 그러나 1830년경에 이 증명은 잘못되었다는 것이 밝혀졌고, 1872년 바이어슈트라스(Weierstrass ; 1815-1897)가 모든 실수값 x에서 미분가능이 아닌 연속함수의 예를 발표함으로써 「연속함수는 미분가능하다.」라는 명제는 인정된 명제집합에서 삭제되었다.

인정된 명제집합의 변화 중 세 번째 유형은 새로운 표현이나 언어가 도입됨으로 인해 기존의 명제가 수정되는 것이다(Kitcher, 1984). 16세기에 카르다노가 음수의 제곱근 즉, $\sqrt{-1}$을 처음 발표한 이후, 오일러도 그의 저서 <대수학(algebra)>에서 허수에 관하여 언급하였다. 그러나 19세기의 수학자 코시가 복소수 형태의 식을 수로 다루는 것을 거부한 것을 비롯하여, 드 모르간도 복소수의 존재에 대해 반대하였으며, 불(Boole ; 1815-1864) 역시 $\sqrt{-1}$은 해석이 불가능한 기호라고 말함(이건창, 2000)으로써, 「제곱하여 -1이 되는 수는 없다.」라는 명제를 인정하였지만, 현대 수학자들은 이 명제를 부정하고 있다. 그러나 이 명제를 완전히 삭제하지는 않고, 기존 내용 중 '수'를 '실수'로 수정하여 「제곱해서 -1이 되는 실수는 없다.」라는 명제를 참으로 인정하고 있다.

3. 인정된 추론집합의 변화

이제 수학적 변화의 세 번째 구성요소인 인정된 추론집합(the set of accepted reasonings)에 대하여 생각해 보자. 키처는 인정된 추론이란 '수학자들이 인정한 명제를 뒷받침하기 위하여 스스로 발전시켜온 일련의 명제들'이며, 인정된 추론집합의 원소에는 엄밀하게 체계화된 '증명'과 '비엄밀한 추론(unrigorous reasoning)'들이 있다고 하였다.

인정된 추론들 중 뛰어난 추론은 증명으로 인정된다. 이런 증명은 처음 원리들로 인정된 명제들로부터 시작하고, 올바른 결론의 기준들이 인정됨에 따라 발전한다. 처음 원리들과 올바른 추정의 기준은 배경이 되는 수학적 관점에 의해 설정된다. 그런데 이 과정에서 증명은 새로운 지식을 생성시키는 방법을 나타내는 역할을 하기도 한다. 즉 한 명제에서 시작하여 어떠한 결론에 도달하는 단계들을 보여줌으로써 기존의 지식으로부터 새로운 지식을 얻는 방법을 제시하는 것이다. 그리고 여러 명제들이 증명을 통하여 체계적으로 표현되고 명제들 사이의 관계가 조직적으로 정리됨으로써, 그 명제들을 포함하는 수학적 내용에 대한 이해와 확신을 돕는다. 몇몇 원리들의 집합에서 각 원리들에

서 한 쌍의 대변이 서로 같고 제3의 변에 대한 이웃각들이 각각 직각이면, 다른 두 각도 또한 직각이다(사케리), 사변형에서 세 각이 직각이면, 넷째 각도 또한 직각이다(람베르트와 클레로), 세 내각의 합이 두 직각과 같은 삼각형이 적어도 하나 존재한다(르장드르), 60° 보다 작은 각의 내부에 있는 임의의 점을 통과해서 그 각의 양변 모두와 교차하는 직선을 언제나 그릴 수 있다(르장드르), 같은 직선 위에 있지 않은 임의의 세 점을 통과하는 원이 존재한다(르장드르와 볼리아이), 삼각형의 넓이에 대한 상한이 존재하지 않는다(가우스).

대한 지식은 그 원리들로부터 이끌어낸 정리들의 선행 지식에 기초하고 있으며, 이 정리들의 증명은 새로운 지식을 생성하지는 못하지만 우리의 이해를 도와준다. 반면, 어떤 집합을 구성하는 원리들로부터 이끌어낸 정리들은 이해를 증진시킬 뿐 아니라 그 정리에 이르는 좋은 방법들을 제공한다 (Kitcher, 1984).

인정된 추론집합에는 형식적이고 연역적인 증명 외에도 단순한 설명, 귀납적 추론, 유추적 추론, 사고실험 등의 '비엄밀한 추론'들도 있다. 그러나 비엄밀한 추론들도 증명처럼 어떤 명제를 지지하는 역할을 하며 그 구조적 특징도 증명과 유사하다.

귀납적 추측으로 참임을 확신하였던, 유명한 페르마(Fermat ; 1601?-1665)의 마지막 정리 「n이 3 이상의 정수일 때, 방정식 $x^n+y^n=z^n$를 만족하는 자연수 x, y, z는 없다」를 생각해보자. 페르마는 n이 4 이하인 경우는 증명하였으나 임의의 n에 대한 증명은 남기지 않았다. 그러나 페르마 이후의 수학자들이 컴퓨터를 이용하여 n이 150000인 경우까지 확인함으로써 이 정리가 참일 것이라고 귀납적으로 추측하였고, 1994년 프린스턴대학의 와일즈(Wiles ; 1953-)가 300여 년 만에 이 정리를 최종적으로 증명하였다.

또한, 사람들은 「1차 다항식은 1개 이하의 근을 가지고, 2차 다항식은 2개 이하의 근을 가지며, 3차 다항식은 3개 이하의 근을 가진다.」는 사실을 깨달은 후, 더 높은 차수의 다항식도 그 다항식의 차수 이하의 개수의 근을 가진다는 것을 경험적으로 알게 되자 「모든 n차 복소 다항식은 중근을 포함하여 n개의 근을 가진다.」라는 사실을 유추하여 참으로 받아들이고 있었다. 이것은 대수학의 기본정리가 증명되기 오래 전부터 인정되었던 사실이다.

그러나 비엄밀한 추론들에서 많은 오류와 모순이 발견되기도 한다. 정수론의 초기에 정수론에 대한 수많은 일반화들이 유한개의 표본을 관찰한 것을 기초로 하여 인정되어 왔다. 그런 가운데 페르마는 「$2^{2^n}+1$꼴의 수는 소수이다.」라고 추측하였으나 후에 이 추측은 잘못되었다는 것이 밝혀졌다 (Kitcher, 1984). 키처는 또 다른 예로 무한소의 방법을 사용하는 추론을 들고 있는데 이를 구체적으로 살펴보자. 초기 미적분학을 연구하던 수학자들에게 있어 도함수는 직관적으로는 분명하지만, 설명하기가 어려운 개념이었다. 뉴턴(Newton ; 1642-1727), 페르마 등 17~18세기의 수학자들은 함수 $f(x)=x^2$의 $x=1$에서의 도함수를 구할 때 1에 가까운 수를 $1+h$로 두고

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\frac{2h+h^2}{h}$$

이라 하여 분자와 분모를 h로 나누어 구하는 도함수는 $2+h$이라고 하였다. 그리고 $1+h$는 1에 매우 가까운 양이므로 h는 무한히 작은 양이 되어 무시할 수 있다고 주장하고 구하는 도함수는 2라고 하였다. 이 추론의 문제점은 h가 0이 아니라는 가정으로 시작하여 분자와 분모를 0으로 나누는 연산을 시행한 뒤에 결론을 끌어내기 위해 h를 0으로 간주한 것이다. 더군다나 h를 0으로 두면 구하는 식은 $\frac{0}{0}$이 되어 의미가 없다(Klein, M., 1984). 이 추론에 대한 비판은 끊임없이 계속되었으나 이 방

식을 대신할 대안이 없었다. 그러나 이러한 실패들은 그 추론을 엄밀하고 체계적으로 정리하게 하는 원동력이 되었다. 이처럼 수학자들은 잘못된 추론에서 기본적인 아이디어를 얻어 새로운 추론을 만들어내기도 한다.

인정된 추론들 중에는 '문제풀이'가 있다. 문제풀이란 가치 있는 질문에 대한 답을 얻게 하는 추론을 의미한다. 그런데 증명의 역할은 하지만 문제풀이의 역할은 하지 못하는 추론들이 있다. 예를 들어, $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n \cdot (n+1)$는 수학적 귀납법을 통하여 증명할 수 있지만, 수학적 귀납법을 이용하여 $\sum_{r=1}^{n} r$의 값이 얼마인지 찾아낼 수는 없다. 반면, 어떤 경우에는 추론이 문제풀이인 동시에 증명일 수도 있고, 문제풀이나 증명 중 하나만 만족할 수도 있다. 혹은 문제풀이도 증명도 아닌 추론도 있다(Kitcher, 1984).

키처는 인정된 추론집합에서 발생할 수 있는 변화를 새로운 추론의 추가, 기존 추론의 배제, 인정된 추론 안에서의 내부적 이동으로 분류하였다.

새로운 추론의 추가에는 세 가지 유형이 있다. 첫째, 어떤 명제가 처음으로 인정됨으로써 그 명제를 뒷받침하는 추론을 인정하게 되는 경우이다. 둘째, 이미 인정되었으나 증명되지 않은 명제에 대한 추론의 추가이다. 이것의 예로서는 앞서 언급한 페르마의 마지막 정리에 대한 와일즈의 증명이 있다. 셋째, 이미 증명된 정리들에 대한 새로운 증명방식의 채택이다(Kitcher, 1984). 이것의 예로는 실수집합이 비가산집합임을 보이기 위한 칸토어의 증명을 들 수 있다. 칸토어가 증명하고자 한 명제는 「자연수 전체집합에서 실수 구간 (0, 1] 로의 전단사 사상이 존재할 수 없다는 것, 즉 1 이하인 양의 실수 모두를 하나씩 번호를 매겨 한 줄로 늘어놓을 수 없다.」는 것이었는데 칸토어는 1891년에 대각선 논법으로 이 명제를 증명하였고, 이 증명방법은 지금까지 탁월한 증명방법으로 인정되고 있다. 그러나 칸토어는 이 정리를 이미 1874년 구간축소법을 이용하여 증명하였다. 하지만 대각선 논법을 이용한 증명이 구간축소법을 이용한 증명보다 간단하고 직관적이어서 이제 구간축소법을 이용한 증명은 거의 사용되지 않는다.

유사하게, 추론의 삭제에도 세 가지 유형이 있다. 키처가 제시한 유형과 그 예들을 살펴보자. 첫째, 인정되었던 '정리'가 거짓이라는 것이 '증명'됨으로써 그 정리가 삭제되는 유형이 있는데, 역시 앞서 제시한 '모든 연속함수는 미분가능하다.'라는 '정리'의 삭제가 그 예이다. 둘째, 어떤 추론이 잘못되었음이 밝혀짐으로써 삭제되는 경우이다. 4색문제(four-color conjecture)는 증명이 자꾸 기각되자 그것이 오히려 수학자들로 하여금 계속해서 증명하도록 만들었다. 셋째, 어떤 증명방식이 다른 증명들을 배제하고 선택되는 경우이다. 연속체들의 비가부번성을 증명하기 위해 대각선 논법을 사용하면서부터는 그 전의 칸토어의 초기 증명들은 사용하지 않게 되었다.

마지막으로, 인정된 추론 안에서의 내부적 이동이란 어떤 추론에 대하여 이 추론이 증명인가, 문제풀이인가, 혹은 둘 다 아닌가 하는 견해를 바꿈으로써 생기는 변화이다. 하지만 수학자들은 이미 인

정된 추론과 증명을 쉽게 바꾸려 하지 않고 기존의 인정된 비엄밀한 추론들을 엄밀하게 재구조화하려고 노력하기 때문에, 이 변화는 자주 발생하지 않는다(Kitcher, 1984).

4. 인정된 질문집합의 변화

수학적 지식에서 인정된 질문들(accepted questions)이란 수학적 언어로 형식화되어 있으며, 대답할 가치가 있으나 아직 해결되지 못한 질문들을 의미한다. 질문이 가질 수 있는 가치에는 두 가지가 있는데 하나는 본질적 가치(intrinsic worth)이고, 다른 하나는 도구적 가치(instrumental worth)이다. 본질적 가치는 그 질문을 해결하는 것이 기존에 논의되었던 본질을 재조명하거나 새로운 본질을 이끌어냄으로써 수학적 이해를 증가시킬 때 생기는 가치이다. "모든 연속함수는 미분가능하다는 명제의 증명이 옳지 않다."는 사실이 밝혀지면서 "모든 점에서 연속이면서 모든 점에서 미분불가능인 실수치 함수들이 존재하는가?"라는 질문은 함수의 연속성과 미분가능성의 관계를 이해시키기 위해 꼭 필요한 것이었다. 또 무한의 개념이 새롭게 등장하면서 무한집합의 본질을 탐구하는 과정에서 "무한집합의 크기를 비교하는 것이 가능한가?"와 같은 질문이 발생하였다. 이 두 가지 질문들은 본질적 가치를 가지고 있다고 할 수 있다. 반면, 도구적 가치는 한 질문에 대한 답이 다른 질문들을 해결할 수 있도록 도와줄 때 발생한다. 무한급수의 수렴판정법은 코시와 아벨(Abel ; 1802-1829)에게 있어 도구적 가치가 있었다. 왜냐하면 무한급수의 값을 구하기 전에 그 급수의 수렴성이 먼저 판정되어야 그 값의 존재 여부를 갈음할 수 있기 때문이었다(Kitcher, 1984).

인정된 질문집합의 변화는 크게 질문의 제기와 질문의 삭제로 구분할 수 있다. 먼저 새로운 질문들이 제기되는 경우를 살펴보자. 먼저, 수학적 언어가 변화하면 기존에 존재하던 본질들에 관한 질문들이 변화한 언어에까지 유추하여 확장된다. 복소수의 표현이 소개되자 복소수의 '로그'를 찾는 질문들이 제기되었고, 타원함수가 발표되고 타원함수와 원함수 사이의 유사성이 드러나자 자연스럽게 원함수의 '삼각비'와 같이 타원함수의 '삼각비'에 대한 질문들이 제기되었다(Kitcher, 1984). 여기에 새로운 예를 추가하자면, 무한의 개념이 도입되면서 유한집합의 크기를 비교하듯이 무한집합의 크기 비교에 대한 질문도 제기되었음을 들 수 있다. 두 번째로 인정된 명제집합이 변화하면 이전에 논의된 본질을 특징짓고자 하는 질문들이 제기된다. 아벨이 5차방정식의 대수적 일반해법(代數的 一般解法)은 구할 수 없다는 것을 발견하고 가우스(Gauss ; 1777-1855)가 해를 구할 수 있는 고차방정식도 존재한다는 것을 발견한 이후, 갈루아(Galois ; 1811-1832)는 "어떤 조건 아래에서 방정식의 일반해를 구할 수 있을까?"라는 매우 효과적인 질문을 제기했다(Kitcher, 1984). 또, 수 체계가 자연수에서 정수, 유리수, 실수로 확장되어감에 따라 "수 체계의 끝은 어디인가?"라는 질문이 제기되었고 복소수가 최종적인 형태라는 것이 증명되었다.

질문의 삭제는 질문의 제기보다 훨씬 더 많은 변화를 동반하는데, 이 변화들을 세 가지 유형으로 분류하여 그 예를 찾아보고자 한다. 질문이 삭제되는 첫 번째 유형은 그 질문을 해결했을 경우이다.

"3차방정식의 일반해는 존재하는가?"라는 질문은 카르다노가 치환을 이용해 3차방정식을 2차방정식으로 변환하여 해를 구할 수 있음을 발견하면서 인정된 질문집합에서 삭제되었다. 질문 삭제의 두 번째 유형은 질문에 대한 답이 거짓임을 증명했을 경우이다. 쾨니히스베르크(Königsberg)의 다리 문제에서 "각각의 다리를 한 번씩만 건너서 출발한 자리로 되돌아오는 방법은 무엇인가?"라는 질문은 오일러가 그러한 방법은 없다는 것을 증명함으로써 삭제되었다. 질문 삭제의 마지막 유형은 질문에 포함된 언어를 수정함으로써 질문이 삭제되는 경우이다. 키처는 이 경우의 예로 해밀턴이 "사원수의 로그는 무엇인가?"와 같은 질문을 함으로써 다른 수들에서 나타나는 성질을 사원수에서도 찾으려고 했음을 들면서, 수적 체계에 대한 현대적 접근이 이루어지고 사원수 개념의 모순이 밝혀지면서 '수'와 '사원수'에 대한 언어의 수정이 이루어졌고, 이에 따라 해밀턴의 질문들은 삭제되었음을 설명한다 (Kitcher, 1984).

질문의 삭제는 수학적 지식의 다른 구성요소에도 많은 영향을 미친다. 질문을 해결하거나 그 질문의 답이 거짓임을 증명하거나 언어를 수정하는 것은 제기된 질문과의 관계에 의거하여 참인 명제를 만들어낸다. 따라서 질문이 삭제될 때에는 그 질문이 삭제되는 이유를 지지하는 명제들이 만들어지고, 그 명제를 지지하는 추론들도 만들어진다. 따라서 어떤 질문이 삭제되면 인정된 명제집합과 인정된 추론집합은 확장된다. 앞서 언급했던 5차방정식의 대수적 일반해법의 존재성에 대한 질문을 다시 살펴보면, 5차방정식의 대수적 일반해법은 구할 수 없다는 것이 증명되면서 "5차방정식의 대수적 일반해법은 무엇인가?"라는 질문은 삭제되었다. 대신 "5차 방정식의 대수적 일반해법은 구할 수 없다." 라는 명제가 인정된 명제집합에 추가되었고, 그 명제를 지지하는 아벨과 갈루아의 추론이 인정된 추론집합에 추가되었다.

한편, 어떤 질문은 해결되었다고 인정되어 인정된 질문집합에서 삭제되었다가 그 해결방법이 틀렸음이 밝혀지면서 다시 인정된 질문집합에 추가되기도 한다. 1879년 켐프(Kempe)가 4색문제에 대한 추측이 참임을 '증명'하면서 "지도의 지역을 구분하는 데에 네 가지 색이면 충분한가?"라는 질문은 인정된 질문집합에서 삭제되었다. 하지만 그로부터 11년 후 히우드(Heewood)가 켐프의 '증명'에 결함이 있음을 발견하자 4색문제에 대한 질문은 다시 인정된 질문집합에 추가되었다.

5. 메타 수학적 관점의 변화

모든 수학자들로부터 존중받아온 일반적인 고찰에 의해 수학적 변화가 이루어진다. 수학자들은 참인 수학적 명제들을 발전시키고, 그들이 얻은 수학적 결과들을 조직화하며, 수학적인 이해를 도울 수 있는 증명을 제공하는 등의 노력을 한다. 그러나 이런 보편적인 목표들은 사회적 이해관계에 따라 변할 수 있는 메타 수학적인 관점에 의해 조정된다. 메타 수학적 관점(meta-mathematical views)은 최종 목표들을 성취하는 방법에 대한 수학 사회의 반성적 이해를 의미하며, 과거 수학적 연구들을 성공적으로 이끌었던 방법들을 되돌아보아 성공의 비결을 찾아내고, 그것을 미래 수학을 위한 패턴

으로 활용하면서 메타 수학적 관점이 생겨난다. 이러한 메타 수학적 관점들은 다음을 포함해야 한다.

(a) 증명을 위한 규준들(standards for proof)
(b) 수학의 범위(the scope of mathematics)
(c) 수학 교과의 순서(the order of mathematical disciplines)
(d) 특정한 형태의 연구에 대한 상대적 가치(the relative value of particular types of inquiry) (Kitcher, 1984)

<표 1>은 뉴턴, 볼차노(Bolzano ; 1781-1848)를 거쳐 현대 수학자들에 이르기까지 메타 수학적 관점이 어떻게 변화해 왔는지를 정리한 것이다.

<표 1> 메타수학적 관점의 변화

뉴턴	(a) 연역적 증명 (b) 산술, 기하, 운동학 포함 (c) 운동학과 기하학은 기본적인 수학 교과 (d) 대수적 연구는 기하학적·산술적·운동학적으로 해석할 수 있는 정도가 적합하다.
볼차노	(a) 직관에 의존한 증명은 옳지 않다. (b) 수학은 양의 과학 (c) 대수학은 기본적 교과이고, 대수학에서 산술과 해석학이 유래하며, 해석학에서 기하학이 유래한다. (d) 기하학적 해석이 부족한 일반적인 대수적 연구들도 합리적이며, 수학의 진보를 위해 매우 중요하다.
현대 수학자	(a) 증명들은 원리 내에서 형식화되어야 한다. (b) 수학은 집합론의 규준 내에서 표현 가능 (c) 집합론은 기본 교과이고 집합론이 산술과 해석학보다 앞서고, 해석학이 기하학보다 앞선다. (d) 특정한 경우에 대한 연구보다 일반적인 경우에 대한 연구가 유용하다.

뉴턴, 볼차노와 현대 수학자들은 증명의 본질과 역할, 즉 증명은 새로운 지식을 만들고 수학적 이해를 증진시킨다는 것에 대해서는 공통된 관점을 취한다. 그러나 성취된 목표들을 이해하는 방식에는 차이점이 있다. 뉴턴에게 있어 유클리드의 원론에 있는 것과 같은 연역적인 추론은 새로운 지식으로 가는 길을 보여주며 이해를 증진시키는 방식을 보여준다. 이에 비해 볼차노는 직관적인 특별한 경우부터 시작하지 않고, 추상적이고 일반적인 것에서 구체적이고 특별한 것으로 나아감에 따라 수학적 이해가 성취된다고 본다. 또한 현대 수학자들은, 추정은 초보단계로 분해하는 방식으로 제시되어야 한다고 주장하면서 볼차노의 논의를 더욱 발전시킨다. 볼차노의 입장에서 볼 때 직관적인 증거

를 우선시하는 뉴턴의 증명 개념은 부적절하다. 현대 수학자들은 유클리드의 추론은 본질적인 수학적 전제들이 추가되어야 하는 결함을 가진다고 비판한다. 되돌아보면 "우리의 수학적 이해를 확장시킬 수 있는 증명은 어떤 것인가"에 대한 뉴턴의 견해들은 불완전하였다. 그러나 그 견해들은 뉴턴 당시의 수학에서는 완벽하게 합리적이고 이해하기 쉬운 것이었다(Kitcher, 1984).

수학적 관점의 변화는 다른 구성요소의 큰 변화들과 관련되어 있다. 증명을 위한 규준이나 수학의 범위에 대한 관점이 의미 있게 수정될 때, 수학의 언어와 인정된 추론의 집합은 대폭적으로 수정된다. 해석기하학의 발전에서 데카르트가 '좌표'라는 수학적 언어를 첨가함으로써 인정된 추론집합은 확장되었다. 좌표를 이용하여 그동안 해결되지 않았던 많은 문제들을 해결하고 증명할 수 있었기 때문이다. 그리고 이전 수학자들이 대수학을 '조잡한 예술'로 취급하였던 것이나 기하학의 영역을 넘어선 곡선들을 배척하는 등의 메타 수학적 관점들은 완전히 기각되었다. 유사한 방식으로, 라이프니츠는 이전 수학자들이 제한적인 메타 수학적 아이디어들로 인정한 것들을 질책하면서 수학의 언어와 방법을 확장하였다. 한 세기 후에, 해석학의 언어와 증명기술에 대한 볼차노의 교정은 정교한 메타 수학적 관점의 설명과 연관되어 있다. 마지막으로, 19세기 후반에 칸토어는 무한의 개념의 도입과 동시에 수학의 언어, 질문, 추론집합을 변화시켰을 뿐만 아니라, 이로 인해 메타 수학적 관점까지 수정함으로써 수학의 혁명을 일으켰다(Kitcher, 1984).

이 장에서 살펴 본 수학적 관행의 구성요소들의 변화를 정리하면 <표 2>와 같다.

<표 2> 수학적 관행의 구성요소들의 변화

수학적 관행의 구성요소	변화	
수학적 언어	개념적 변화	
	새로운 표현의 등장	
인정된 명제집합	새 명제의 추가	새 결과의 발견
		새 추론의 발견
		기존 질문에 대한 답의 발견
		기존 명제에 대한 동치명제 발견
	기존 명제의 삭제	
	기존 명제의 수정	
인정된 추론집합	새 추론의 추가	
	기존 추론의 배제	
	인정된 추론 안에서의 내부적 이동	
인정된 질문집합	질문의 제기	기존 질문을 유추하여 확장
		명제집합의 변화에 따른 질문의 제기
	질문의 삭제	질문의 해결
		질문의 답이 거짓임을 증명
		질문에 포함된 언어를 수정
메타수학적 관점	다른 구성요소들의 변화에 영향을 줌	

Ⅲ. 요약 및 결론

수학은 관찰로 얻어진 지식이 단순하게 축적된 산물이 아니다. 실용적 문제의 해결을 위해 수학의 연구가 시작되었고, 현재도 수학이 도구적 학문으로 쓰일 때가 있지만, 수학적 지식은 관찰만으로 성장하는 것이 아니며 새로운 관찰이 발견되더라도 기존 지식에 대한 끊임없는 비판과 반박으로 수학의 많은 부분들이 수정되거나 삭제되고 혹은 새로운 지식이 추가되는 변화의 과정을 거쳐 왔다. 또한 기존에 제기된 질문을 해결하고자 노력하는 과정 중에 새로운 질문이 발생하고, 이전의 수학적 지식을 일반화, 엄밀화, 체계화하면서 수학적 구조가 더욱 튼튼해진다. 이러한 변화의 과정은 수학자들이 여러 문제들에 대하여 비판적으로 사고하였으며 합리성, 타당성을 추구했다는 것을 보여준다. 따라서 수학적 지식이 꾸준하게 변화해 왔다는 것을 인식하고 그 변화의 메커니즘을 이해하면, 이전 수학자들의 비판적 사고과정, 합리화의 과정을 살펴볼 수 있다.

수학적 지식이 발생해서 진리로 정립되기까지는 많은 시간과 노력을 필요로 한다. 그리고 그 기간 동안 수학적 지식들은 추가되기도 하고, 수정되기도 하며, 심지어 거짓으로 판명되어 삭제되기도 한다. 수학적 언어, 질문, 명제, 추론 등 수학적 지식을 구성하는 요소들은 수학자들의 계속적인 검토와 반박, 그 반박을 고려한 증명의 수정, 새로운 개념의 도입, 새로 도입된 개념에 대한 새로운 질문들의 추가, 새 질문의 해답을 얻기 위한 노력, 기존에 이루어졌던 과정들을 돌아보고 현재에 적용하려는 시도 등으로 끊임없이 변화한다. 이러한 관점에서 볼 때, 수학수업에서는 학습자들이 수학의 발견과정을 경험하고 수학자들처럼 수학적 지식을 비판적으로 검토, 논의할 수 있는 기회가 제공되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

김용운 · 김용국 (1998). <u>제3의 과학혁명-프랙탈과 카오스의 세계</u>, 서울 : 우성.

우정호 (1998). <u>학교수학의 교육적 기초</u>, 서울 : 서울대학교 출판부.

우정호 (2000). <u>수학 학습-지도 원리와 방법</u>, 서울 : 서울대학교 출판부

우정호 (2001). <u>수학적 발견의 논리</u>, 역자해제, 서울 : 도서출판 아르케.

이건창 (2000). <u>수리철학</u>, 서울 : 경문사.

이상욱 · 홍성욱 · 장대익 · 이중원 (2007). <u>과학으로 생각한다</u>, 서울 : 동아시아.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*, New York : Oxford University Press, Inc.

Klein, M. (1980). *Mathematics-The Loss of Certainty*, New York : Oxford University Press, Inc.. 박세희 역(1984). 수학의 확실성, 서울 : 민음사.

Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates, Inc.. 황우형 역(2000). 수학 학습 심리학, 서울 : 사이언스북스.

A Study on the Change of Mathematical Practice

Kim, Bu-yoon
Dept. of Mathematics Education, Pusan National University, 609-735, Korea
E-mail : kimby@pusan.ac.kr

Joo, Shin Young
Mora Middle School, 617-818, Korea
joy1004@hanmail.net

It takes much of times and efforts for mathematical knowledge to be regarded as truth. Mathematical knowledge has been added, and modified, and even proved to be false. Mathematical knowledge consists of mathematical languages, statements, reasonings, questions, metamathematical views. These elements have been changed constantly by investigations and refutations of mathematicians, by modification of proofs considering the refutations, by introduction of new concepts, by additions of questions about new concepts, by efforts to get answers to new questions, by attempts to apply previous studies to the present, constantly. This study introduces the change of mathematical knowledge instituted by Kitcher, and presents examples of the change.

* ZDM Classification : A35
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97-03
* Key Words : mathematical knowledge, mathematical change, mathematical practice