韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 21집 제 3호, 2007. 9. 515-525

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21, No. 3, Sep. 2007. 515-525

각의 이등분선 및 삼등분선의 방정식 탐구

이 상 근 (경상대학교)
이 춘 구 (경남과학고등학교)

본 연구는 수학적 대상인 각을 대수적인 방법인 벡터를 이용하여 탐구하는 문헌연구로, 각의 이등분선의 작도 방법, 각의 삼등분선의 종이접기 방법을 분석하고, 이를 바탕으로 중등학교에서 다루는 벡터의 기본 개념들을 이용하여 각의 이등분선 및 삼등분선을 방정식의 형태로 표현하였다. 본 연구로 얻어진 결과는 중등학교 수학에 관련된 교과내용지식의 영역을 넓힐 수 있으며, 벡터를 활용한 문제해결에 관련된 흥미로운 심화학습 자료가 될 것으로 기대된다.

1. 서 론

수학과 교육과정(교육부, 1998, p.29)에 의하면, 수학교육의 목표들 중의 하나는 '수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결'하는 것이다. 유명한 수학자인 데카르트는 수학 문제해결에서 대수적 방법을 체계적으로 활용하였다. 우정호(2000)에 의하면, 데카르트는 문제해결을 위해 모든 문제를 수학문제로 환원시키고, 얻어진 수학문제를 대수문제로 환원하고, 이를 방정식 문제로 귀착시켜 해결하였다. 즉, 수학적 탐구 활동에서 그 대상을 대수적 방법을 이용하여 수식으로 표현하는 것은 성공적인 문제해결에서 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있다. 중등학교 수학교육에서 수학적 대상의 대수적 표현을 위해, 좌표를 이용하는 방법, 벡터를 이용하는 방법, 삼각함수를 이용하는 방법 등이 활용되고 있다.

한편, 각은 평면도형을 구성하는 기본 요소들 중의 하나로, 역사적으로 많은 수학자들의 탐구대상이 되어왔다. 예를 들어, 각의 이등분선 탐구, 각의 삼등분선 탐구, 각의 작도 가능성 탐구 등등이다. 이들 중에서 가장 유명한 문제는 유클리드적 도구인 자와 컴퍼스를 이용하여 주어진 각을 삼등분하는 문제이다. 한인기(2005)에 의하면, 많은 수학자들이 이 문제의 해결을 위해 노력했으며, 그 과정에서 많은 수학적 방법 및 도구들이 발명되었다(예를 들어, 원적곡선 삽입방법, 콘코이드 곡선, 토마호크 등). 그러다가, 19세기에 반첼이 증명한 '유리수 계수를 가지지만 유리근을 갖지 않는 삼차 방정식의 근은 유클리드적 도구를 이용하여 작도할 수 없다'는 정리로부터, 임의의 각은 삼등분 될 수 없다는 것이 증명되었다.

---

* ZDM 분류 : D54
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 각의 이등분선, 각의 삼등분선, 벡터, 방정식

임의의 각의 삼등분에 관련된 최근의 연구 방향으로, 종이접기를 이용한 각의 삼등분선 구하기를 들 수 있다. 신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002)는 유클리드적 도구를 이용해 작도가능한 수들의 집합보다 종이접기를 이용해 표현할 수 있는 수들의 집합이 더 크다는 것을 대수적으로 보이면서, 임의의 각의 삼등분선을 접는 한 방법을 소개하였고, 김향숙 외 6인(2006)의 연구에서도 임의의 각을 종이접기를 이용하여 삼등분하는 방법이 제시되어 있다.

본 연구는 수학적 대상인 각을 대수적인 방법인 벡터를 이용하여 탐구하는 문헌연구로, 각의 이등분선, 각의 삼등분선을 벡터를 이용하여 방정식으로 표현할 것이다. 이를 위해, 본 연구에서는 각의 이등분선의 작도 방법, 각의 삼등분선의 종이접기 방법을 분석하고, 이를 바탕으로 벡터의 몇몇 기본 개념들(중등학교에서 다루는)을 이용하여 각의 이등분선 및 삼등분선을 방정식의 형태로 표현할 것이다. 본 연구를 통해 얻어진 결과는 중등학교 수학에 관련된 교과내용지식의 영역을 넓힐 수 있으며, 벡터를 활용한 문제해결에 관련된 흥미로운 심화학습 자료가 될 것으로 기대된다.

2. 각의 이등분선의 방정식

각의 이등분선이 자와 컴퍼스를 이용하여 작도가능하다는 것은 중학교 수학교과서에서 다루어지고 있다. 본 연구에서는 기본적인 벡터 개념들을 바탕으로, 1) 삼각형의 내분점을 이용하는 방법, 2) 단위벡터와 마름모를 이용하는 방법, 3) 이등변삼각형을 이용하는 방법, 4) 벡터의 내적을 이용하는 방법 등을 이용하여 각의 이등분선을 방정식으로 표현할 것이다.

(1) 삼각형의 내분점을 이용하는 방법

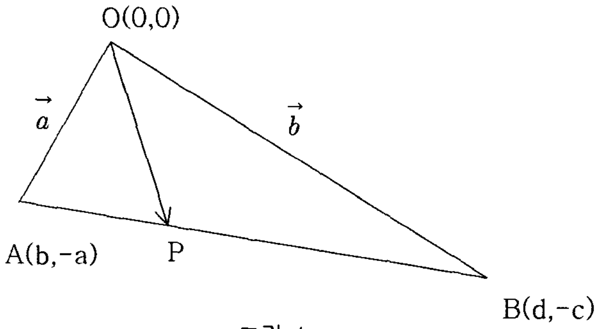
꼭지점 O가 원점$(0,0)$에 위치한 임의의 삼각형OAB를 생각하자. 삼각형OAB에서 <그림 1> 처럼 각AOB의 이등분선을 OP라 하면

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AP} : \overline{PB} \qquad (\overline{OA}\text{는 선분}OA\text{의 길이})$$

가 성립한다. 두 점$A(b,-a)$, $B(d,-c)$라 하면 점A는 $ax+by=0$상에 있고, 점B는 $cx+dy=0$상에 있다. 그리고 그 교점은 $O(0,0)$이다.

선분OP가 각AOB의 이등분선이므로, 점P는 선분AB를 $\overline{OA} : \overline{OB}$로 내분한다. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$로 두면 $|\vec{a}|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{c^2+d^2}$이다. 그러므로 선분AB의 내분점P를 이용하여 $\overrightarrow{OP}$를 구하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{1}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\{|\vec{a}|(d,-c)+|\vec{b}|(b,-a)\} \qquad (t\text{는 실수}) \\ &= \frac{1}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\{|\vec{a}|d+|\vec{b}|b\ ,\ -(|\vec{a}|c+|\vec{b}|a)\}\end{aligned}$$



<그림 1>

이고, $\overrightarrow{OP}$의 x, y성분은

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(c^2+d^2)}}\left(d\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{c^2+d^2}\right) \\ y = -\dfrac{t}{\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(c^2+d^2)}}\left(c\sqrt{a^2+b^2}+a\sqrt{c^2+d^2}\right) \end{cases}$$

이다. 이들 두 식으로부터 $\overrightarrow{OP}$를 포함하는 각의 이등분선의 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(c^2+d^2)}}{\left(b\sqrt{c^2+d^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\right)}x+\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(c^2+d^2)}}{\left(a\sqrt{c^2+d^2}+d\sqrt{a^2+b^2}\right)}y=0$$

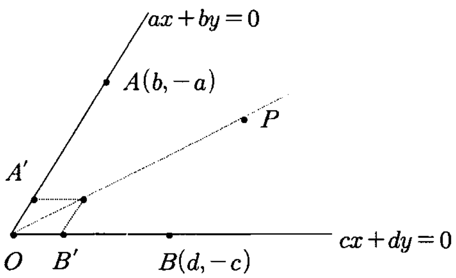
삼각형의 꼭지점O에서 밑변AB의 한 점P에 그은 선분OP가 각AOB의 이등분선일 때, 점P는 선분AB를 $\overline{OA}:\overline{OB}$로 내분한다. 도형의 성질을 밝히고 찾아내는데 벡터는 간편하고 편리한 도구가 된다. 벡터를 성분으로 표현하고 분점 구하기를 적용하면 문제 해결의 간편하고 유용한 도구로 사용 할 수 있다. 이를 이용하여 점O를 시점으로 하는 $\overrightarrow{OP}$의 벡터 방정식을 선분AB의 내분점 P의 성분을 구하여 표현한 것이다.

(2) 단위벡터와 마름모를 이용하는 방법

O를 원점, 직선 $ax+by=0$, $cx+dy=0$에 각각 속하는 두 점 $A(b,-a)$, $B(d,-c)$을 생각하여, 직선 OA상의 단위벡터를$\overrightarrow{e_a}$, 직선 OB상의 단위 벡터를 $\overrightarrow{e_b}$라 두고 각각의 끝 점을 A', B'이라 하자(<그림 2>).

단위벡터 $\overrightarrow{e_a}$, $\overrightarrow{e_b}$는 다음과 같이 구해진다.

$$\overrightarrow{e_a}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,-a),\ \ \overrightarrow{e_b}=\frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}}(d,-c)$$



<그림 2>

한편, $\vec{e_a}+\vec{e_b}=\frac{1}{|\vec{a}||\vec{b}|}(|\vec{b}|b+|\vec{a}|d,\ -|\vec{b}|a-|\vec{a}|c)$는 직선 OA', 직선 OB'을 변으로 가지는 마름모의 대각선에 놓인 벡터가 되며, 이것은 각의 이등분선 OP에 속하게 된다. 따라서 각의 이등분선에 놓인 벡터 $\vec{p}$는,

$$\vec{p}=\frac{t}{|\vec{a}||\vec{b}|}(|\vec{b}|b+|\vec{a}|d,\ -(|\vec{b}|a+|\vec{a}|c) \quad (t\text{는 실수})$$

이때, $\vec{p}$의 x, y성분은

$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}\left(b\sqrt{c^2+d^2}+d\sqrt{a^2+b^2}\right) \\ y=-\dfrac{t}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}\left(a\sqrt{c^2+d^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\right) \end{cases}$$

이들 두 식으로 부터, 각의 이등분선의 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

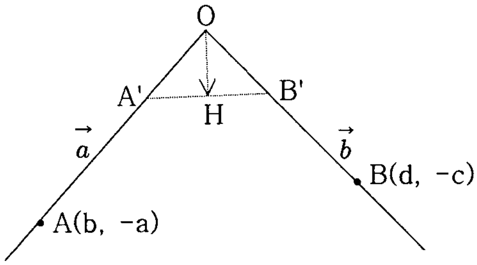
$$\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{\left(b\sqrt{c^2+d^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\right)}x+\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{\left(a\sqrt{c^2+d^2}+d\sqrt{a^2+b^2}\right)}y=0$$

이 방법은 (1)처럼 벡터를 활용하는 측면에서는 같으나, 마름모의 성질을 활용하였다는 점이다. 마름모의 대각선은 그 각을 이등분한다. 이것은 각 변의 길이가 1인 단위벡터로 표현하고, 벡터의 합을 이용하여 이등분선의 방정식을 구한 것이다.

(3) 이등변삼각형을 이용하는 방법

삼각형 AOB에서 옆 변의 길이가 1인 이등변삼각형 $A'OB'$을 생각하자(<그림 3>). 꼭지점 O에서 변 $A'B'$에 수선 OH를 내리면, 이등변삼각형의 성질에 의해 직선 OH는 중선이며 각의 이등분선이 된다. 이제, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$를 이용하여 $\overrightarrow{OH}$를 나타내자. 이를 위해, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 방향의 단위벡터 $\vec{e_a}$, $\vec{e_b}$를 생각하자. $\vec{e_a}=\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,\ -a)$, $\vec{e_b}=\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}}(d,\ -c)$이므

로, $\overrightarrow{OH}$를 구하기 위해 선분$A'B'$의 중점H의 위치벡터를 구하면 된다.



<그림 3>

$$\overrightarrow{OH}=\vec{h}=\frac{\overrightarrow{e_a}+\overrightarrow{e_b}}{2}=\frac{1}{2|\vec{a}||\vec{b}|}(|\vec{b}|b+|\vec{a}|d,\ -(|\vec{b}|a+|\vec{a}|c))$$

이다. 각AOB의 이등분선을 벡터를 이용하여 나타내면,

$$\vec{p}=\frac{t}{2|\vec{a}||\vec{b}|}(|\vec{b}|b+|\vec{a}|d,\ -(|\vec{b}|a+|\vec{a}|c))\quad (t\text{는 실수})$$

따라서 각의 이등분선을 나타내는 다음 방정식은

$$\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{2\left(b\sqrt{c^2+d^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\right)}x+\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{2\left(a\sqrt{c^2+d^2}+d\sqrt{a^2+b^2}\right)}y=0$$

이 방법은 이등변삼각형의 성질과 벡터의 성질을 활용한 각의 이등분선의 방정식을 구한 것이다. 길이가 임의인 두 선분의 길이를 갖는 삼각형을 길이가 1인 한 쌍의 변을 갖는 이등변 삼각형으로 바꾸고 이등변 삼각형의 밑변의 중점에 대한 위치벡터를 구하는 방법으로 이등분선의 벡터방정식을 구하였으며 매개변수 방정식을 표현하여 이등분선의 방정식을 구하였다.

(4) 벡터의 내적을 이용하는 방법

두 직선이 이루는 각AOB을 이등분하는 선분OP를 생각하자(<그림 2>). 이제 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OP}$의 내적과 $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{OP}$의 내적을 생각하자. 그러면,$\theta=\frac{1}{2}\angle AOB$에 대해

$$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta,\quad \vec{b}\cdot\vec{p}=|\vec{b}||\vec{p}|\cos\theta$$

을 얻을 수 있으며, 이들 식을 연립하면 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{p}}{|\vec{a}||\vec{p}|}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{p}}{|\vec{b}||\vec{p}|}$이 된다. 이 등식에 벡터의 성분 $A(b,-a)$, $B(d,-c)$, $P(x,y)$를 대입하면, 다음을 얻을 수 있다.

$|\vec{b}|\{(b,-a)\cdot(x,y)\}=|\vec{a}|\{(d,-c)\cdot(x,y)\}$, $(|\vec{b}|b-|\vec{a}|d)x+(|\vec{a}|c+|\vec{b}|a)y=0$

따라서 각의 이등분선의 방정식은

$$\left(b\sqrt{c^2+d^2}-d\sqrt{a^2+b^2}\right)x+\left(c\sqrt{a^2+b^2}-a\sqrt{c^2+d^2}\right)y=0$$

또는

$$\left(\frac{b^2c^2-d^2a^2}{b\sqrt{c^2+d^2}+d\sqrt{a^2+b^2}}\right)x+\left(\frac{b^2c^2-d^2a^2}{c\sqrt{a^2+b^2}+a\sqrt{c^2+d^2}}\right)y=0\ .$$

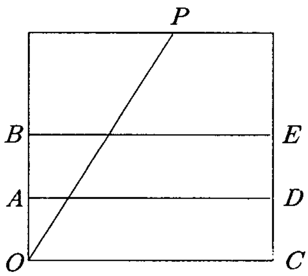
이 방법은 앞의 방법과는 달리 벡터의 내적에서 찾은 것이다. 각AOB를 이등분선의 벡터 $\overrightarrow{OP}$를 설정하면 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OA}$의 내적과 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OB}$의 내적을 이용하여 이등분선의 방정식을 계산 한 것이다.

3. 각의 삼등분선의 방정식

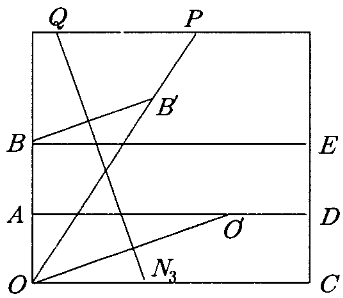
(1) 종이접기를 이용한 각의 삼등분선 구하기

최근 신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002), 김향숙 외 6인(2006)은 종이접기 가능한 수들의 대수적 구조를 연구하여, 각의 삼등분선을 종이접기로 구할 수 있음을 보였다. 이들 연구에 제시된 각의 삼등분선 접기의 방법은 다음과 같다.

단계 1. 직사각형의 종이를 준비하여 $\overline{OA}=\overline{AB}$, $OC//AD//BE$가 되도록 접고, 접는선 OP로 임의의 예각POC를 만든다(<그림 4>).



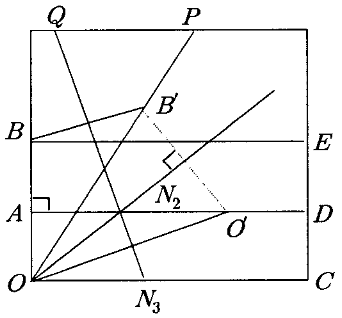
<그림 4>



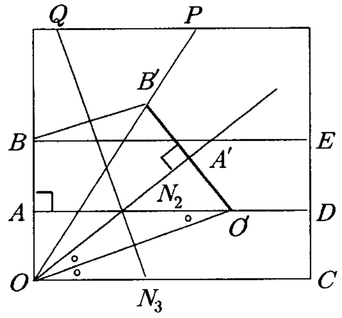
<그림 5>

단계 2. 점B는 선분OP상에, 점O는 선분AD상에 있도록 접는다. 선분 OP상에 점B와 겹치는 점을 B', 선분 AD상에 점O와 겹치는 점을 O'라 하자(<그림 5>).

단계 3. 접은선을 선분 QN_3이라 두고 선분 AD와 선분 QN_3의 교점 N_2라 두자. 그리고 N_2와 O를 지나게 접는다(<그림 6>).



<그림 6>



<그림 7>

이제, 단계 1, 2, 3에서 수행한 종이접기가 각$B'OC$를 삼등분함을 보이자. 선분$B'O'$과 선분 ON_2의 교점을 A'(<그림 7>)이라 할 때, 선분OA'이 선분$B'O'$을 수직 이등분함을 보일 것이다. 그러면, 각$B'OA'$와 각$A'OO'$이 같다는 것이 증명된다. 점O, 점A, 점B는 선분QN_3에 대해 점 O', 점A', 점B'과 대칭이므로, $\overline{OA}=\overline{AB}$로부터 $\overline{O'A'}=\overline{A'B'}$이 얻어진다.

한편, 점A와 점A'은 직선QN_3에 대해 대칭이므로 각$B'A'N_2=\frac{\pi}{2}$(라디안)이다. 즉 선분OA'은 선분$B'O'$의 수직이등분선이다. 그러므로 각$B'ON_2=$각N_2OO'이다. 한편 삼각형ON_2O'은 이등변삼각형이므로 각$N_2OO'=$각$N_2O'O$이고 각 $N_2O'O$와 각$O'ON_3$는 엇각이므로 서로 같다. 따라서 각$B'ON_2=$각$N_2OO'=$각$O'ON_3$이다. 따라서 각$B'OC$가 선분ON_2와 선분OO'에 의해 삼등분된다.

(2) 각의 삼등분선의 방정식

벡터를 이용하여 각의 삼등분선인 선분OO'와 선분OA'의 방정식을 구하기 위해, <그림 7>에 적당한 벡터 및 벡터성분을 도입하자. 우선, 점O를 원점, 선분OC를 x축, 선분OB를 y축으로 잡고, 임의로 그은 직선OP의 방정식을 $ax+by=0$이라 하자.

점A와 점B는 y축에 놓여 있으므로, 좌표를 $A(0,m)$, $B(0,2m)$이라 하자. 그러면 점O'와 점 A'의 좌표는 각각 $O'(x_1,m)$, $A'(x_2,y_2)$라 놓을 수 있고, 직선OP상에 있고 점B와 겹치는 점 B'의 좌표는 $B'(b,-a)$라 놓을 수 있다.

(가) 선분 OO'의 방정식

선분 OO'은 선분 BB'과 평행하므로, 선분 BB'의 방정식을 이용하여 선분 OO'의 방정식을 구할 수 있다. $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OB}=(b,\ -a-2m)$이므로, $\overrightarrow{OO'}$의 벡터 방정식은 적당한 실수 t에 대해서

$$\overrightarrow{OO'}=t(b,\ -a-2m)=(tb,\ -t(a+2m))\ (\text{단, } t\text{는 실수})$$

이다. 따라서 선분 OO'의 방정식은

$$(a+2m)x+by=0.$$

(나) 선분 OA'의 방정식

점 A'은 선분 $B'O'$의 중점이므로, 점 O'의 좌표를 안다면 선분 OA'의 방정식을 얻을 수 있다. 점 O'은 선분 OO'와 선분 AD의 교점이므로, 선분 OO'의 방정식 $(a+2m)x+by=0$와 선분 AD의 방정식 $y=m$을 연립하여 구할 수 있다. 실제로, 이들을 연립하면, 점 O'의 좌표는 $\left(\dfrac{-bm}{2m+a},\ m\right)$이고, 점 B'와 점 O'의 중점 A'의 좌표는 $\left(\dfrac{bm+ab}{4m+2a},\ \dfrac{m-a}{2}\right)$이다. 따라서

$$\overrightarrow{OA'}=t\left(\frac{bm+ab}{4m+2a},\ \frac{m-a}{2}\right)=\left(t\frac{bm+ab}{4m+2a},\ t\frac{m-a}{2}\right)$$

이고, 이로부터 선분 OA'의 방정식은

$$\frac{2(2m+a)}{ab+bm}x-\frac{2}{m-a}y=0.$$

(3) 점 B와 B'의 좌표들의 관계

종이접기에서의 접은선 QN_3에 대해 대칭인 두 점 $B(0,2m)$, $B'(b,-a)$이 등식

$$4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)=0$$

을 만족시킨다는 것을 증명하자. 선분 QN_3에 대해 두 점 B, B'이 대칭이라는 것은, 선분 QN_3에 대해 점 $O(0,0)$와 점 $O'\left(\dfrac{-bm}{2m+a},\ m\right)$도 대칭임을 의미한다. 따라서 점 B'과 점 B가 선분 QN_3에 대하여 대칭일 때 점 O와 점 O'이 선분 QN_3에 대해 대칭이 되도록 하는 관계식을 구하자. 이를 위해, 선분 OO'의 중점이 선분 QN_3에 속하도록 a, b, m 관계를 구하자. 위치벡터 $\overrightarrow{OB'}$와 $\overrightarrow{OB}$의 차 $\overrightarrow{BB'}$는 $(b,\ -a-2m)$이고, 선분 BB'의 중점은 $\left(\dfrac{b}{2},\ \dfrac{-a+2m}{2}\right)$이 된다. 한편 선분 N_3Q는 선분 BB'를 수직 이등분 하므로, $\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{N_3Q}=0$ 이고, 이로부터 $\overrightarrow{N_3Q}$의 방향벡터 $\vec{d}=(2m+a,\ b)$와 선분 N_3Q의 방정식을 구할 수 있다. 따라서 $\vec{d}=(2m+a,\ b)$와 평행하고

$\left(\frac{b}{2}, \frac{-a+2m}{2}\right)$을 지나는 $\overrightarrow{N_3Q}$의 벡터방정식은

$\overrightarrow{N_3Q}=t(2m+a,\ b)+\left(\frac{b}{2}, \frac{-a+2m}{2}\right)=\left((2m+a)t+\frac{b}{2},\ bt+\frac{-a+2m}{2}\right)$ (단, t는 실수).

이제, 선분N_3Q와 선분OO'의 교점을 구하여 선분OO'의 중점$M\left(\frac{-bm}{2(2m+a)}, \frac{m}{2}\right)$과 일치하도록 a, b, m의 관계를 정하자. $\overrightarrow{OO'}$와 $\overrightarrow{N_3Q}$의 매개변수 방정식은 각각

$$\begin{cases} x=bk \\ y=-(2m+a)k \end{cases}, \quad \begin{cases} x=\frac{b}{2}+(2m+a)t \\ y=\frac{2m-a}{2}+bt \end{cases}$$

이다. 매개변수 방정식을 연립하여 풀면

$$\begin{cases} \frac{b^2}{2}+(2m+a)bt=b^2k \\ \frac{(2m-a)(2m+a)}{2}+b(2m+a)t=-(2m+a)^2k \end{cases}$$

이다, 윗 식에서 아래 식을 변끼리 빼면

$$\frac{b^2-(2m-a)(2m+a)}{2}=\left(b^2+(2m+a)^2\right)k$$

이므로

$$k=\frac{b^2-4m^2+a^2}{2\left(b^2+(2m+a)^2\right)}$$

이다. 따라서 선분N_3Q와 선분OO'의 교점은

$$\left(\frac{b(b^2-4m^2+a^2)}{2\left(b^2+(2m+a)^2\right)}, -\frac{(2m+a)(b^2-4m^2+a^2)}{2\left(b^2+(2m+a)^2\right)}\right)$$

이다. 한편, 선분N_3Q와 선분OO'의 교점은 선분OO'의 중점M과 같은 점 이므로,

$$\left(\frac{b(b^2-4m^2+a^2)}{2\left(b^2+(2m+a)^2\right)}, -\frac{(2m+a)(b^2-4m^2+a^2)}{2\left(b^2+(2m+a)^2\right)}\right)=\left(\frac{-bm}{2(2m+a)}, \frac{m}{2}\right)$$

윗 식의 y좌표를 비교하면, $-\frac{(2m+a)(b^2-4m^2+a^2)}{2\left(b^2+(2m+a)^2\right)}=\frac{m}{2}$이다. 이 식을 정리하면,

$$4m^3-3(a^2+b^2)m-a(a^2+b^2)=0.$$

4. 결 론

본 연구는 수학적 대상인 각을 대수적인 방법인 벡터를 이용하여 탐구하는 문헌연구로, 각의 이등

분선, 각의 삼등분선을 벡터를 이용하여 방정식으로 표현하였다. 이를 위해, 각의 이등분선의 작도 방법, 각의 삼등분선의 종이접기 방법을 분석하고, 이를 바탕으로 중등학교에서 다루는 벡터의 기본 개념들을 이용하여 각의 이등분선 및 삼등분선을 방정식의 형태로 표현하였다.

각의 이등분선은 1) 삼각형의 내분점을 이용하는 방법, 2) 단위벡터와 마름모를 이용하는 방법, 3) 이등변삼각형을 이용하는 방법, 4) 벡터의 내적을 이용하는 방법을 이용하여 방정식

$$\left(\frac{b^2c^2-d^2a^2}{b\sqrt{c^2+d^2}+d\sqrt{a^2+b^2}}\right)x+\left(\frac{b^2c^2-d^2a^2}{c\sqrt{a^2+b^2}+a\sqrt{c^2+d^2}}\right)y=0$$

으로 표현하였다.

한편, 각의 삼등분선의 종이접기와 관련하여, 각의 삼등분선을 접는 과정을 세 단계로 추출하였으며, 이러한 종이접기의 타당성을 명료한 수학적 언어로 평이하게 기술하였다. 이때 종이접기를 통해 얻어진 각의 삼등분선들의 방정식을

$$(a+2m)x+by=0,\ \frac{2(2m+a)}{ab+bm}x-\frac{2}{m-a}y=0$$

와 같이 대수적으로 표현하였다.

본 연구로 얻어진 결과는 중등학교 수학에 관련된 교과내용지식의 영역을 넓힐 수 있으며, 벡터를 활용한 문제해결에 관련된 흥미로운 심화학습 자료가 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

김향숙 외 6명 (2006). 종이접기를 활용한 도형의 이해. 서울 : 경문사.

신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002). 종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용, 수학교육논문집 **13(2)**, pp.457-475.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대출판부.

한인기 (2005). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

A Study on Equations of Bisector and Trisectors of Angle

Lee, Sang Keun

Dept. of Math. Edu, and Education Research Institute, Gyeongsang National University, 660-701, Korea

E-mail : sklee@gsnu.ac.kr

Lee, Chun Goo

Gyeongnam Science high school, 668-851, Korea

E-mail : chunn92@hanmail.net

In this study, we study on equations of bisector and trisectors of angle. We analyze various studies related with bisector and trisectors of angle. As a result we have known that trisectors of angle is able to received by paper folding method. Using some concepts of vector we have described equations of bisector and trisectors of angle.

* ZDM Classification : D54

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50

* Key Words : bisector, trisector, vector, equation