韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 21집 제 3호, 2007. 9. 499-514

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21, No. 3, Sep. 2007. 499-514

# 수학적 개념에 대한 조작적 접근과 구조적 접근
## - 지수함수와 로그함수를 중심으로 -

김 부 윤 (부산대학교)
김 소 영 (남산고등학교)

현대수학교육에서는, 수학적 개념에 대한 이해를 바탕으로 한 수학적 능력의 개발이 교육과정과 교수 방법의 영역 등에서 강조되고 있다. 또한, 학교 현장에서도, 대부분의 교사들이 수학을 잘 하기 위해서는 수학적 개념이 중요하다는 점을 강조하고 있다. 따라서, 이 논문에서는, 문헌 연구를 통하여 수학적 개념의 발달과정을 개괄하였다. 그런 다음, 수학적 개념을 조작적 접근과 구조적 접근으로 정의한 Sfard의 관점에 근거하여, 세 고등학교 수학교과서의 지수함수와 로그함수 단원의 수학적 개념을 분석하였다. 분석의 결과, 교과서 필자들은 동일한 수학적 개념에 대해서도 다른 접근 방법을 사용하고 있다는 사실과 학생들의 수학적 개념의 발달을 돕기 위하여 두 접근 방법을 모두 사용하고 있다는 사실을 발견할 수 있었다.

## I. 서 론

수학교육의 목적은 수학적으로 사고하는 능력과 태도를 개발하는 데 있다. 여기서, 수학적 사고능력이란 '알고리즘적 수학, 문제해결로서의 수학, 추론으로서의 수학, 개념적 수학'으로 정의된다(NCTM, 1989). 좀 더 구체적으로, 학교수학에 포함되어 있는 여러 가지 수학적인 개념, 원리, 법칙의 의미를 파악하여 수학적인 안목을 갖고 사고한다는 의미이기도 하다. 또한, 최근 몇 십년동안 수학과 같은 복잡한 교과에 관한 심리학과 교육학 연구는 그 교과에서 뛰어난 사람들의 지식과 행위에서 '개념적'이해가 중요한 역할을 한다는 것을 보여주고 있다(NCTM, 2000). 즉, 현대수학에서는 이런 수학적 사고능력 중에서 사고의 단위인 개념을 중심으로 한 '개념적 사고'가 강조되고 있다. 이런 현대수학의 흐름에 발맞추어, 우리나라의 수학과 교육과정에서도 개념적인 요소가 강조되고 있다. 제7차 교육과정의 기본방향은 '21세기의 지식 기반 정보화 사회에 적합한 교육은 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 그 중점을 두어야 한다'는 것이다. 이런 기본 방향에 근거하여, 수학과에서도 수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, '수학의 기본적인 개념', 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 예측하여 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하며, 창의적인 문제해결력을 배양시키는 데 중점을 두고 있다. 아울러, 기본개념과

* ZDM 분류 : E44
* MSC2000 분류 : 97U20
* 주제어 : 수학적 개념

원리 및 법칙의 유도과정에 대한 정확한 이해와 활용은 수리·탐구영역 I의 효과적인 교수학습 방법 중의 한 가지로 강조되고 있기도 하다. 이와 같이, 여러 가지 수학적 개념의 이해를 기본으로 한 다양한 수학적 능력의 신장은 교육과정과 지도 방법의 영역 등에서 공통적으로 강조되고 있다. 뿐만 아니라, 현장에서 학생들을 지도하는 교사들도 '수학을 잘 하려면 수학적인 개념을 잘 알아야 한다' 라고 강조하는 것을 흔히 볼 수 있다.

그러면, 이렇게 이론적으로, 실제적으로 강조되고 있는 '수학적 개념'이라는 말은 무엇을 의미하는가? '수학적 개념'이라는 용어는 교육현장에서 강조되고, 흔히 사용되고 있지만, 교사들이 이에 대한 구체적이고 명확한 이해가 부족한 경우가 많다. 사실, 수학적 개념을 정의하는 방식은 학자들 마다 다르다. 그 중 Sfard(1991)는 수학적 개념을 조작과 구조의 교대과정을 통해 발달되는 것으로서 개념 형성을 조작적인 개념에서 구조적인 개념으로의 연쇄적인 전이로 보았다. 수 개념의 형성 역시 조작과 구조의 한 측면만으로는 얻어지는 것은 아니다. 만약, 수가 사물 자체의 속성이며 그것을 직관함으로써 수 개념이 형성된다는 조작적인 관점에서 출발하면, 수를 가르치기 위해서는 학생들에게 다양한 사물을 여러 가지 방법으로 보여주기만 하면 되고, 학생들은 구체적인 사물이나 그림을 관찰하여 수 개념을 얻을 것이라 생각할 수 있다. 또, 수 개념이 구체적인 사물에 대한 조작과는 독립적으로 형성될 수 있다는 관점에서 출발하면, 수란 정신적인 실재(reality)이므로 그것을 표현하는 기호를 다루는 규칙들을 학습하는 것만으로 자연수 개념을 충분히 학습 할 수 있다고 생각할 수 있다. 그러나 이 두 가지의 극단적 지도방법은 둘 다 문제점이 있을 것이다. 사실, 수 개념이 추상화되는 원천은 구체적인 사물의 조작만으로 설명할 수 없고, 또한 경험과 무관한 인간의 정신활동으로서의 구조만으로 설명할 수 없다. 즉, 수학적 개념을 조작과 구조의 교대과정이라고 본 Sfard(1991)의 주장에 타당성이 있다.

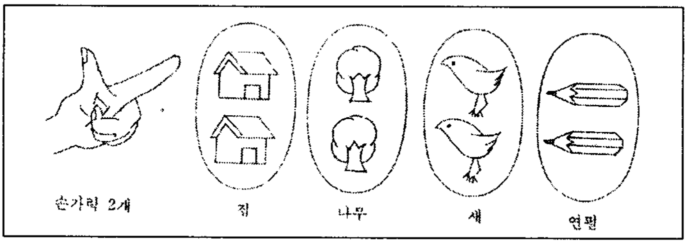
수학적 개념은 조작과 구조의 교대과정을 통해 발달하는 Sfard(1991)의 주장으로 미루어 볼 때, 학교수학에서 수학적 개념을 어떻게 제시하느냐에 따라 학생들의 개념형성에 영향을 미칠 것이다. 따라서 본 논문에서는 수학적 개념 정의 및 발달과정을 알아보고, 수학적 개념에 대한 Sfard(1991)의 주장을 바탕으로 인문계 고등학교 수I, V.지수함수와 로그함수 단원에 제시된 수학적 개념을 두 가지 접근형식으로 분류, 수학적 개념의 접근 형식을 알아보고자 한다.

## II. 수학적 개념

### 1. 수학적 개념

Tennyson(1977)에 의하면 수학적 개념이란 '특정사물이나 사건이나 상징적인 대상들이 공통적인 속성, 혹은 그 특성을 기초로 하여 독특한 이름이나 기호로서 불릴 수 있도록 한 덩어리로 뭉쳐질 수 있는 총체' 라고 이해하고 있으며 이런 관점에서 수의 개념을 <그림 1>과 같이 설명하기도 한다

(신현성, 2000, 재인용). 다음의 각 집합의 원소들은 서로 일대일 대응을 시킴으로써 결국 손가락 두 개로 상징화할 수 있다. 그러나 손가락 두개는 우리가 2 라고 하는 수학적인 상징으로 나타낼 수 있다. 이 상징을 숫자 2라고 한다.




<그림 1>

따라서 <그림 1>은 일반적으로 나타내는 공통된 속성을 말하고, 이것을 개념이라고 한다. 이와 같이 생각한다면, 삼각형의 개념, 유리수, 무리수의 개념, 합동 및 닮음의 개념, 도함수의 개념, 정적분의 개념, 함수 극한의 개념, 함수의 연속개념, 증명 및 추정의 개념 등 그 구체적인 예를 많이 들 수 있다. 이러한 수학적 개념들은 삼각형, 유리수, 무리수, 합동, 닮음과 같이 낮은 수준의 수학적 용어가 있으나, 정적분, 도함수, 증명과 같이 높은 수준의 수학적인 용어가 있다.

Freudenthal(1978)은 수학적인 개념은 귀납적 이해(comprehension), 즉, 여러 가지 보기의 관찰로부터 귀납적으로 획득되는 것이 아니라, 覺知(apprehension) 즉,'전형적인 보기'로부터 그 구조를 파악하여 획득된다고 주장하고 있다. 여기서 전형적인 보기란 곧바로 그 구조에 대한 깊은 통찰을 제공해 주면서 동형인 다른 상황에 신속하고 정확하게 전이 가능한 예를 말한다.

김응태 · 김연식(1985)는 개념의 심리적 측면, 논리적 측면, 그리고 개념의 추상화와 일반화 측면 등 세 가지 측면에서 살펴보았다(예정아, 1992, 재인용). 첫째, 개념의 심리적 측면에서 보면, 인간은 어떤 감각적 사물에 대한 감각적 인상, 단일적인 대상에 대한 직접적인 경험 등을 통하여 이들의 종합적인 정신소산으로서 집합적인 대상을 얻어, 여기에서 고정된 인상을 갖게 된다. 이것이 초보적인 직관적 개념이다. 이 개념에서 소박한 표현을 주어, 불분명하지만 기호화 또는 언어화함으로써 점차로 명확한 형태를 알아내고 차차로 감각적인 것을 벗어나서 어느 정도로 개념화의 차원을 높게 할 수 있다. 이렇게 해서 그 다음 단계의 필요에 따라 고차의 기호화를 하고 추상화를 한다. 이와 같은 단계의 반복이 고차의 개념을 형성해가는 과정이다. 둘째, 개념의 논리적인 측면에서 살펴보면 다음과 같다. 이를테면 평행사변형의 정의는 보통 '두 쌍의 맞변이 평행인 사변형'이라고 한다. 따라서 이 정의에 적합한 마름모, 정사각형, 직사각형, 일반 평행사변형 등은 모두 평행사변형이다. 이 정의에서 '평행사변형의 맞변은 서로 같다.' '평행사변형의 두 대각선을 서로 다른 쪽을 이등분한다.' 등의 성질을 유도 할 수 있다. 이와 같은 경우 평행사변형이라는 개념을 두 가지로 구분할 수 있다. 즉, 평행사변형 전체를 한 집합으로 볼 때, 그 원에 해당하는 정사각형, 직사각형, 일반 평행사변형등을 평행사변형 개념의 외연(extensive properties) 이라고 하고, 평행사변형의 개념에서 유도되는 성

질들을 평행사변형의 개념의 내포(intensive properties)한다. 한 개념에서 어떤 조건을 가감하면 외연과 내포는 함께 변하고 외연을 확대(축소) 하면 내포는 축소(확대) 된다. 위의 예에서 '평행사변형의 한 각이 직각이다.' 라는 조건을 주면, 즉 내포를 확대하면, 마름모나 일반평행사변형을 그 조건을 만족하지 않기 때문에 외연은 축소된다. 외연과 내포의 관계는 대상에 대한 인식의 정도에 따라 여러 가지 단계가 있으므로 그것을 명확하게 파악하는 것이 개념의 수학적 논리적 인식의 단계가 된다. 셋째는, 개념의 추상화와 일반화이다. 수학교육에서 개념의 추상화와 일반화는 수학적 사고를 발전시키는데 대단히 중요한 역할을 한다. 이는 논리적으로 보면, 개념의 외연을 일단 고정시켜놓고 그 내포를 통일적으로 명확하게 하려는 것이 추상화이고, 그와 반대로 개념의 내포를 일단 고정시켜놓고 외연을 더욱 확대해 나가려는 것이 일반화라고 말할 수 있다. 이를테면, '크기와 위치가 다른 닮은 삼각형'이라는 외연에서 '삼각형이 닮을 때는 대응각이 같고 대응변의 비가 같다'라는 내용을 끌어내는 것은 닮음의 개념의 한 추상화(내포의 명확화)이고 ,다음에 이 명확화 된 내포를 가지고 사각형의 경우로, 나아가서는 $n$각형의 경우로 닮음의 개념을 적용할 수 있으면 이것은 외연의 확대가 되므로 한 일반화가 된다.

Skemp(1989)는 수학적 개념은 추상화의 반복에 의해 형성되며 일상적인 개념에 비해 고차원적이라고 하였다(배종수·임창균, 2001, 재인용). 여기에서 추상화라는 것은 어떤 개념의 대상을 비교 종합하고, 그들이 갖는 속성 중에서 우연적인 것을 배제하고 공통적이고 본질적인 것을 추출하는 것으로 생각한다. Skemp는 일상적인 개념과 수학적인 개념을 비교하여 설명하고 있다. 그는 일상적인 개념과 다르게 수학적인 개념은 다른 하위개념들과 상호 관계성이 요구된다고 설명하고 있다. 예를 들면, 일상적인 개념인 독도의 지리를 생각해 보자. 독도의 지리를 알기 위해서 다른 섬의 지리를 알 필요가 없다. 그러나 수학적인 개념에서는 다른 하위개념들과의 상호관계성이 요구된다. 예를 들어, '삼각함수의 미분법'의 개념을 알기 위해서는 삼각함수, 미분법의 기본 체계 등에 대한 개념이 선행되어야 한다는 것이다.

Sfard(1991)은 수학적 개념은 일련의 조작과 구조의 교대 과정을 통해 발달되는 것으로서 개념 형성은 조작적인 개념에서 구조적인 개념으로의 연쇄적인 전이로 보는 견해가 있다.

조영미(1997)는 수학적 개념을 두 가지 측면에서 해석했다. 수학적 개념은 대상의 공통적인 본질적 성질을 의미함과 동시에, 또한 이 성질을 가진 대상의 범위를 의미한다. 이때 전자를 개념의 내포, 후자를 개념의 외연이라고 한다. 개념의 내포라는 것은 개념을 구성하고 있는 속성의 총화를 의미하며, 개념의 외연이란 개념이 적용될 수 있는 전 범위, 즉 개념의 속성을 가지고 있는 개체의 전부를 의미한다. 예를 들면, '소수'라는 개념의 내포[1]는 '1보다 큰 자연수 중에서 1과 자기 자신으로만 나누어지는 수' 또는 '1보다 큰 자연수로 더 이상 소인수분해 되지 않는 수'등의 개념의 공통적인 속성의 총화이며, '2','3','5','7' 등은 소수라는 개념의 외연이다. 또한, 조영미(1997)는 수학적 개

1) 내포적 정의는 전통적인 개념정의 방식이며, 개념의 외연에 의해서 개념을 정의하는 외연적 정의는 현대수학의 개념 정의 패턴을 지배하고 있다(우정호, 2006, p135).

념을 정의하는데 직관과 엄밀함을 강조하는 교재 구성의 차이점을 중심으로도 분류했다. 수학교과서의 저자가 사면체의 개념을 제시하려고 할 때 다음과 같이 두 가지 방식으로 정의할 수 있다. 첫 번째의 경우는 먼저 사면체의 그림을 그려놓거나 그러한 모양을 가지고 있는 물건을 제시한 후 '이러한 모양을 가진 도형을 사면체라고 한다.'라고 정의 하는 방법이다. 두 번째 경우는 '네 개의 꼭지점과 여섯 개의 모서리, 네 개의 면을 가지고 있는 도형을 사면체라고 한다.'라고 정의하는 방법이다. 전자는 외연의 원소를 가리키며 직관적으로 정의를 제시하는 것이며, 후자는 외연에 속하는 모든 원소들의 속성을 추상화 하여 엄밀하게 정의하는 것으로 볼 수 있다.

정은실(2001)은 수학적 개념은 이상적인 실체로 보았다. 여기서 '이상적'이란 용어는 정신적이면서 이상적으로 완전함을 의미한다. 완전한 직선, 원, 평면, 타원, 사면체등은 실세계에 존재하지 않는다. 엄밀히 말해서 수학적 개념은 순수한 정신적 구성물이다. 이것은 수학적 개념은 오로지 정의에 의해서 통제될 수 있다는 사실을 말하고 있다. 또한, 개념이란 일종의 학습제재로서 어떤 관점에서 보면 개념은 가장 기본적인 학습 가능한 대상으로 보았다. 어떤 대상 예를 들면 함수가 무엇인지를 학습한다고 하는 것은 그 대상의 개념을 학습하는 것이다. 마찬가지로 학생들에게 어떤 대상이 무엇인가를 가르칠 때, 우리는 그 대상의 개념을 가르치고 있는 것이다.

고정화(2002)는 Vygotsky의 과학적 개념 발달에 관한 연구를 토대로 수학적 개념을 대표적인 이론적, 과학적 개념으로 이해할 수 있다고 한다. Vygotsky의 개념 발달에 관한 연구는 두 가지 유형의 개념을 구분하는데서 시작된다. 하나는 환경과의 상호작용을 통해 다소 비체계적으로 발생하는 '자발적'개념 또는 '일상적'개념이며, 다른 하나는 일반적으로 형식적인 교육적 상황에서 도입되고 상호관계의 위계적인 체계 내에서 기능하는 '과학적'개념 또는 '이론적'개념이다. 두 유형의 개념을 구분하고 과학적 개념 또는 비자발적 개념을 연구하는 것은 중요하다. 왜냐하면, 일상적 개념과 달리 학교에서 가르치는 과학적 개념은 체계성을 그 특징으로 하며 그 중에는 아동이 직접 보거나 경험할 수 없는 많은 것들이 포함되기 때문이다. 학교교육에 근거하느냐 아동자신의 경험에 의지하느냐에 따라 전혀 다른 내적, 외적 조건하에서 개념이 형성되고 발달할 수 있다. 예를 들면, 해가 동쪽에서 떠서 서쪽으로 지는 것을 경험적으로 지각하는 것은 지구의 자전에 의해 발생하는 과학적인 현상을 인식하는 것과는 본질적으로 다르다. 경험적 일반화를 통해서는 이론적 일반화에 이를 수 없다. 왜냐하면 과학적 지식은 일상적 경험을 단순히 확장한 것이 아니라, 추상화라고 하는 특별한 수단, 특수한 분석, 사물들의 내적 관계와 그것들의 본질적인 일반화, 인지의 대상을 일반화하는 특수한 방식을 요구하기 때문이다. 일상적 개념의 형성은 경험적인 일반화로도 충분하다면, 과학적 개념의 형성에는 이론적 일반화가 요구되는 것이다. 원의 개념을 생각해 보자. 접시나 바퀴등과 같이 다른 기능과 구조를 가진 사물들의 유사성을 추상화 하는 것은 경험적 일반화이다. 이와 같이 유사성을 추상화하는 것은 개인의 특별한 시각에 의존할 수 도 있다. 반면, '한쪽 끝을 고정하고 다른 끝이 움직일 수 있는 실이나 콤파스로 그려지는 도형'은 특별한 구체물과 독립적인 것이며, 오히려 경험을 풍부하게 하는 그런 것이다. 이러한 성격이야 말로 수학적 개념을 과학적, 이론적이라고 주장하는 이유이다.

이상의 선행 연구를 살펴보면 김응태 · 김연식과 조영미에서 공통점을 발견할 수 있다. 즉, 김응태 · 김연식이 논리적 측면에서 살펴본 내용이 조영미가 구분한 내포와 외연의 의미와 일맥상통하며, 심리적 측면의 내용이 조영미가 구분한 직관과 엄밀함을 강조하는 교재구성의 차이점을 중심으로 분류한 내용과 비슷하다. 또한, 고정화가 자발적 개념(일상적 개념) 또는 과학적 개념(이론적 개념)으로 구분한 것처럼 Skemp역시 일상적 개념과 수학적 개념을 비교하여 설명하는 부분이 비슷하다. 그러나 학자들 사이에 모두 공통점이 있는 것은 아니다. 선행연구 내용을 정리하면 수학적 개념이란 <표 1>과 같다.

<표 1>

| | |
|---|---|
| Tennyson | 특정사물이나 사건이나 상징적인 대상들이 공통적인 속성, 혹은 그 특성을 기초로 하여 독특한 이름이나 기호로서 불릴 수 있도록 한 덩어리로 뭉쳐질 수 있는 총체 |
| Freudenthal | 귀납적 이해(comprehension),즉, 여러 가지 보기의 관찰로부터 귀납적으로 획득되는 것이 아니라, 覺知(apprehension) 즉,'전형적인 보기'로부터 그 구조를 파악하여 획득되는 것 |
| 김응태 · 김연식 | 심리적 측면 ,논리적 측면, 추상화와 일반화 측면의 세가지 측면에서 살펴 봄 |
| Skemp | 추상화의 반복에 의해 형성되며 일상적인 개념에 비해 고차원적 것 |
| Sfard | 일련의 조작과 구조의 교대 과정을 통해 발달되는 것 |
| 조 영 미 | 대상의 공통적인 본질적 성질을 의미함과 동시에, 또한 이 성질을 가진 대상의 범위 |
| 정 은 실 | 이상적인 실체, 가장 기본적인 학습 가능한 대상 |
| 고 정 화 | 대표적인 이론적, 과학적 개념 |

따라서, 선행연구들을 종합해 본 결과, 수학적 개념은 대상의 공통적, 본질적 성질을 추출한 후 더 높은 추상화와 구조화 과정을 통해 수학적 언어로 표현되어진 것이라 볼 수 있다. 이를 학교 수학에 적용하면, 여러 가지 용어, 정의나 정리의 형태로 제시된 것이라 할 수 있다.

## 2. 수학적 개념의 발달과정

수학적 개념은 어느 한 순간에 수학자의 통찰에 의해 완벽한 형태로 만들어진 것이 아니라 수많은 실패와 실수를 겪고 역사적인 과정을 통해 서서히 개념으로 진화되었다. 여기서는 수학적 개념의 발달과정을 Bachelard(1970), Brousseau(1997)와 Sfard(1991)의 관점을 소개하고자 한다.

Bachelard(1970)의 인식론적 모델을 중심으로 수학적 개념의 형성되는 과정을 살펴보면, 모든 개념은 발생적으로 소박한 현실주의, 명백한 경험주의, 고전적 합리주의, 상대적 합리주의, 변증법적 합리주의의 5단계로 이루어진다. 소박한 현실주의는 전(前)과학적 사고로써 구체적 사물을 통해서만 사고

하는 단계이다. 이는 역사적으로 초기에 나타나는 사고방법으로, 일반적으로 지각 우위적인 사고가 지배적이고 개념은 대상을 다룸으로써 이루어진다. 이처럼 형성된 개념은 현실적 필요성과 유용성에 의해 성립된 것으로 이해를 목적으로 하지 않는다. 명백한 경험주의는 수학적 개념이 단순한 도구의 사용과 결합되어 있는 단계이므로 경험하는 것이 곧 사고하는 것이고 사고하는 것이 경험하는 것이다. 사고 방법이 단일하고 유용하기 때문에 관련된 개념에 대한 신념은 증가하고, 변화를 거부한다. 고전적 합리주의에서는 경험적 사고에 의해 생겨난 여러 가지 개념들은 서로 연결되면서, 귀납적 추론에 의해서 하나의 개념으로 종합된다. 구체적 사물이 사고의 대상이 아니라 사물사이의 관계가 사고의 대상이 된다. 상대적 합리주의 단계에서는 특정 공간에서 합리주의적 사고로 형성된 개념이 다양한 공간에 적용된다. 이때 동일하게 적용되는 규칙과 그렇지 않은 규칙이 존재한다. 동일한 규칙은 기초개념으로 받아들이고, 그렇지 않은 규칙은 각각의 문맥을 보다 객관적으로 이해할 수 있는 특징이 된다. 변증법적 합리주의 단계에서는 현실과의 관계를 깊이 고려하지 않고도 대수적인 조작을 통해서 사고할 수 있게 된다. 현실에서 가능해 보이지 않는 상황을 가정하고도 모순 없는 결과를 얻음으로써 개념이 발전한다.

Brousseau(1997)는 수학적 개념을 원시 수학적 개념, 범 수학적 개념, 수학적 개념으로 발전해 왔다고 주장한다. 원시 수학적 개념은 그 개념을 문제의 해결에 암묵적으로 사용하고는 있지만 의식하고 있지는 못하는 수준의 상태이다. 따라서 연구의 주제나 도구로서는 인식될 수 없는 다소 불완전하고 폭넓은 수준의 것이다. 이런 원시 수학적 개념은, 현재는 확립된 개념으로써 명료한 것이지만 그 당시에는 몇몇 수학자들의 명확하지 않았던 관점이나 선입견 또는 문제의 선택에 있어 나타난 일관성 있는 문제들이다. 하지만 명료하지 않다고 해서 이런 관점들이 수학자들의 임의적인 생각이라고 할 수는 없으며 이것들은 어떤 수학적 필요에 의해 수학자 자신들이 선택한 결과라고 볼 수 있다. 이를 증명해 줄 확실한 용어가 존재하지 않더라도 뒷받침 해줄 만한 징후나 흔적이 있다면 원시 수학적 개념 단계로서의 가치가 있다고 할 수 있다. 역사 속에서 예를 들면, Galileo는 운동을 중심 문제로 한 역학 연구를 하면서 두 변화하는 양 사이의 관계를 탐구하는 가운데 함수 개념에 도달하였다. 또 비례라는 단어를 사용하여 그와 같은 아이디어를 개념화하고자 하였다. 비록 함수 개념이 명확하게 존재하지 않고 암묵적이지만 매우 명확하게 발전한 것을 분명히 볼 수 있다. 그 다음 단계는 범 수학적 개념 상태로서 그 개념의 특성이나 성질이 연구되고 있지만 완전히 조직화되거나 이론화되지는 않은 상태이다. 이때의 수학은 아직 조직화되지는 않았어도 친숙한 이름을 가진 대상이 된다. 아직 이 과정에서는 다소 불완전한 개념이나 지식들을 좀 더 명확하게 하기 위해 의사소통을 최대한 적절히 하기위해 사용되는 수단으로서 일종의 용어나 언어가 사용되기도 한다. 예를 들면, Euler나 Cauchy 등의 함수개념으로서, Euler나 Cauchy 등은 양 사이의 관계나 대수식으로 함수 개념이 정의되는 것으로 생각하였다. 마지막 단계는 어떠한 개념이 수학적 이론의 통제 하에 놓이게 됨으로써 하나의 완전한 구조를 가지게 되는 수학적 개념 상태이다. 이 단계는 그 개념이 삽입되는 구조와 그 구조를 만족하는 성질들에 의해 정확하게 정의될 수 있기 때문에 모호함이나 오류로부터

보호된 상태로 유지되면 그 개념을 연구의 대상으로 삼는다. 예를 들면 함수의 수학적 개념은 20세기에 들어와 대응으로 정의되면서 명확한 수학적 지식의 지위를 부여받았다.

Sfard(1991)는 수학적 개념은 일련의 조작과 구조의 교대 과정을 통해 발달되는 것으로서 개념 형성은 조작적인 개념에서 구조적인 개념으로의 연쇄적인 전이로 보았다. Sfard(1991)는 수학적 개념이 조작적인 개념에서 구조적인 개념으로 발전하는 데는 다음과 같은 세 가지 단계를 거치는 것으로 보고 있다. 첫 번째는 내면화의 단계로서 여기서는 이미 잘 알고 있는 수학적 대상에 대한 몇 가지 조작이 수행된다. 두 번째는 압축단계로서 이미 행한 조작과 과정이 좀 더 다루기 쉬운 단위로 압축된다. 압축 단계는 새로운 실재가 절차만으로 혹은 조작만으로 여겨질 때 까지 계속된다. 세 번째가 실재화의 단계로서 이제까지 다루어 오던 무엇인가를 친숙하게 바라보는 갑작스런 능력이 발동되는 단계이다. 이 단계에서는 새로운 실재는 완전히 성숙된 하나의 수학적 대상으로 새롭게 인식되는 것이다. 내면화와 압축의 단계를 점진적이면서 길게 계속되는 양적인 변화라고 할 수 있고 실재화 단계는 도약이 이루어지는 질적인 변화로 보여 진다. 실재화의 단계에서 어떤 과정이 정적인 구조인 하나의 대상으로 결정되면서 새로운 개념은 새로운 조작대상이 되면서 위의 세 가지 단계가 다시 반복되고 기존의 개념이 더 상위 수준의 개념으로 발달되어 간다.

### 3. 수학적 개념에 대한 두 가지 접근

Sfard(1991)는 수학적 개념을 조작으로 보는 관점과 구조로 보는 관점으로 나누고 있다. 조작적 접근은 개념을 과정으로 보는 것을 말하여, 그것은 실질적인 실재라기보다는 일련의 행동에 따라 존재하는 잠재적인 실제로 보는 것을 말한다. 반면에 구조적 접근은 수학적 실재를 대상으로 보는 것을 말하여, 그것을 시공 어디엔가 존재하는 정적인 구조로 파악하고 실제적인 것처럼 다룰 수 있음을 의미하며 한 번에 그것을 인식할 수 있고 그것을 세부적으로 나누어 보지 않고 전체로서 조작할 수 있음을 의미한다. 다시 말하면, 조작적 접근에서는 수학적 실재를 어떤 과정의 결과 또는 그 과정 자체로 인식되나, 구조적 접근은 수학적 실재가 하나의 정적인 구조로 인식된다. 조작적 접근은 언어적 표현에 의해서 뒷받침 되나 구조적 접근은 시각적 이미지에 의해 뒷받침된다.

<표 2>는 Sfard가 제시한 조작적 접근과 구조적 접근으로 같은 개념이 두 가지 접근방법으로 정의되어진 것을 볼 수 있다.

<표 2>

| | 조작적 접근 | 구조적 접근 |
|---|---|---|
| 함수 | 과정 또는 하나의 체계에서 또 다른 체계로 가는 잘 정의 된 방법(Skemp, 1971) | 순서쌍의 집합(Bourbaki, 1934) |
| 대칭 | 기하학적인 도형의 변환(Transformation) | 기하학적인 도형의 성질 |
| 자연수 | 다른 자연수에 하나를 더함으로써 얻어지는 어떤 수 (세기의 결과) | 집합의 성질 또는 같은 유한인 cadinality를 가진 집합 |
| 원 | 한 고정점을 중심으로 컴퍼스를 회전시켜 얻어지는 곡선 | 주어진 점으로부터 같은 거리에 있는 모든 점들의 자취 |

이 두 접근은 존재론적인 차이가 많지만, 이 두 접근은 실재로 서로 보완적이다. 즉, 학습과 문제 풀이과정의 경우 같은 표기의 조작적 접근과 구조적 접근을 서로 오가며 구성 된다.

다른 예로, 사차함수의 세 가지 표현을 살펴보자. $y=3x^4$를 표현함에 있어서 그래프, 대수적인 식, 컴퓨터프로그램이 있다. 컴퓨터프로그램은 구조라기보다는 통합된 실체가 아닌 조작적인 접근이다. 반면, 그래프 표현은 함수의 무한히 많은 성분들이 부드러운 선으로 연결된 것으로, 통합된 전체로써 이해할 수 있다. 따라서 그래프는 구조적 접근이다. 대수적인 식은 두 가지로 해석될 수 있다. 그것은 컴퓨터 조작의 간결한 표현으로 보면 조작적 접근으로, 두 양사이의 정적인 관계로 보면 구조적 접근이다.

## III. 분석의 실제

세 교과서A, B, C(조태근 외, 최봉대 외, 최상기 외)를 선정해 각 출판사에 발간한 수I 교과서에서 단원 V.지수함수와 로그함수를 분석하였다. 물론 이들 교과서 전 영역에 걸쳐 제시된 수학적 개념을 분류하는 것도 의의가 있지만, Sfard가 예로 제시한 함수의 세 가지 표현이 수I 단원 중 지수함수와 로그함수 영역에 제시되어 있어 이 단원을 분석하였다. 물론 컴퓨터프로그램은 교과서에 제시되어 있는 것은 아니지만 대응표가 컴퓨터프로그램처럼 하나하나의 과정을 처리하는 것으로 본 논문에서는 판단하였다. 교과서는 물론 제 7차 교육과정에 근거하여 출판된 것이다. 본 논문에서는, 각 교과서에서 고딕 처리를 하거나 하나의 표에 넣어 정리한 내용을 수학적 개념으로 보고 예를 들면 <표 3>과 같다.

<표 3> 수학적 개념의 예

| | |
|---|---|
| 수학적 개념 예1. A교과서. p179. | 일반적으로 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수<br>$y=a^x \ (a>0, a\neq 1)$<br>을 생각하여 이 함수를 $a$를 밑으로 하는 **지수함수**라고 한다. |
| 수학적 개념 예2. B교과서. p193. | **지수함수 $y=a^x \ (a>0, a\neq 1)$의 성질**<br>❶ 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.<br>❷ $a>1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.<br>$0<a<1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.<br>❸ 그래프는 두 점 (0, 1)과 (1, $a$)를 지나고 $x$축을 점근선으로 한다.<br>❹ $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 $y$축에 대하여 서로 대칭이다. |

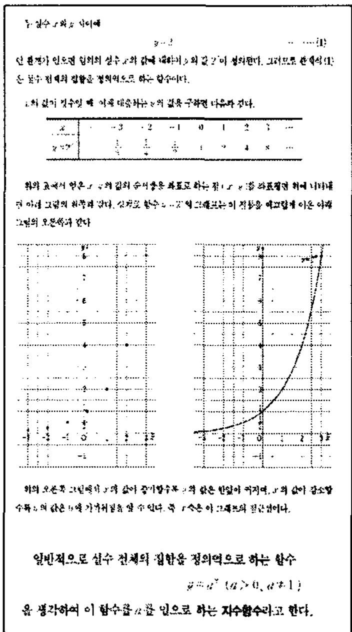
이에 따라, V.지수함수와 로그함수에 나타난 수학적 개념을 조사해본 결과는 <표 4>와 같다.

<표 4> 수학적 개념

| 단원 | 중단원 | 소단원 | 수학적 개념 |
|---|---|---|---|
| V.지수함수와 로그함수 | 1. 지수함수 | 1. 지수함수와 그 그래프 | 지수함수<br>지수함수 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$의 성질 |
| | | 2. 지수방정식과 지수부등식 | 지수방정식<br>지수방정식의 성질<br>지수부등식<br>지수부등식의 성질 |
| | 2. 로그함수 | 1. 로그함수와 그 그래프 | 로그함수<br>로그함수$y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$의 성질 |
| | | 2. 로그방정식과 로그부등식 | 로그방정식<br>로그방정식의 성질<br>로그부등식<br>로그부등식의 성질 |

<표 4>에 따라 임의로 몇 개의 개념을 선정, 분석결과는 다음과 같다.

<표 5> 지수함수의 정의



두 실수 $x$와 $y$ 사이에

$$y=2^x \quad \cdots\cdots (1)$$

인 관계가 있으면 임의의 실수 $x$의 값에 대하여 $y$의 값 $2^x$이 정의된다. 그러므로 관계식 (1)은 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수이다.

$x$의 값이 정수일 때 이에 대응하는 $y$의 값을 구하면 다음과 같다.

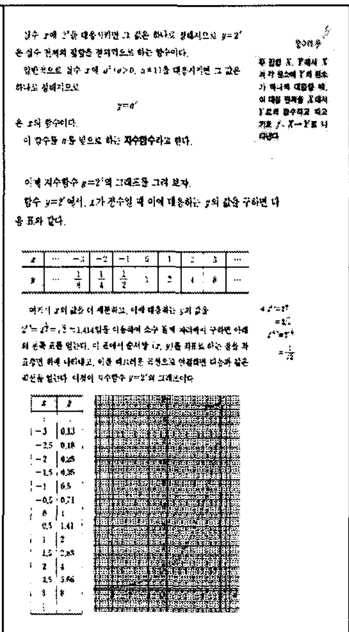
| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=2^x$ | $\cdots$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ | $8$ | $\cdots$ |

일반적으로 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$y=a^x \ (a>0, a\neq1)$$

을 생각하여 이 함수를 $a$를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

A교과서 p.178.



실수 $x$에 $2^x$을 대응시키면 그 값은 하나로 정해지므로 $y=2^x$은 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수이다.

일반적으로 실수 $x$에 $a^x$ ($a>0$, $a\neq1$)을 대응시키면 그 값은 하나로 정해지므로

$$y=a^x$$

은 $x$의 함수이다.

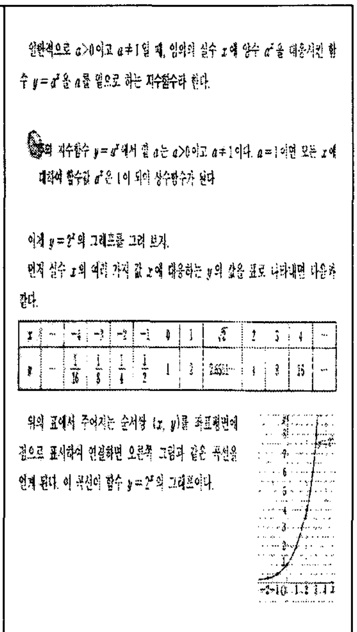
이 함수를 $a$를 밑으로 하는 **지수함수**라고 한다.

이제 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 그려 보자.

함수 $y=2^x$에서, $x$가 정수일 때 이에 대응하는 $y$의 값을 구하면 다음 표와 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\cdots$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ | $8$ | $\cdots$ |

B교과서 p.192.



일반적으로 $a>0$이고 $a\neq1$일 때, 임의의 실수 $x$에 양수 $a^x$을 대응시킨 함수 $y=a^x$을 $a$를 밑으로 하는 지수함수라 한다.

지수함수 $y=a^x$에서 밑 $a$는 $a>0$이고 $a\neq1$이다. $a=1$이면 모든 $x$에 대하여 함수값 $a^x$은 1이 되어 상수함수가 된다.

이제 $y=2^x$의 그래프를 그려 보자.

먼저 실수 $x$의 여러 가지 값 $x$에 대응하는 $y$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

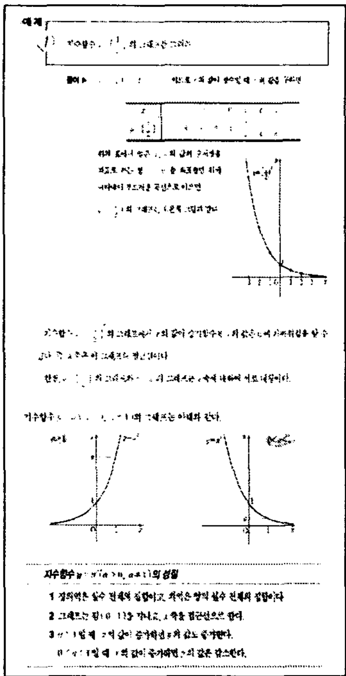
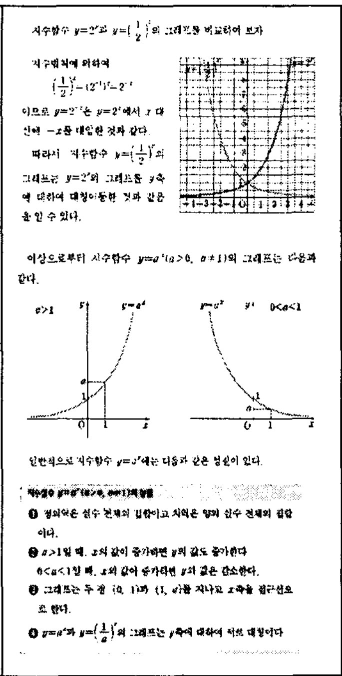
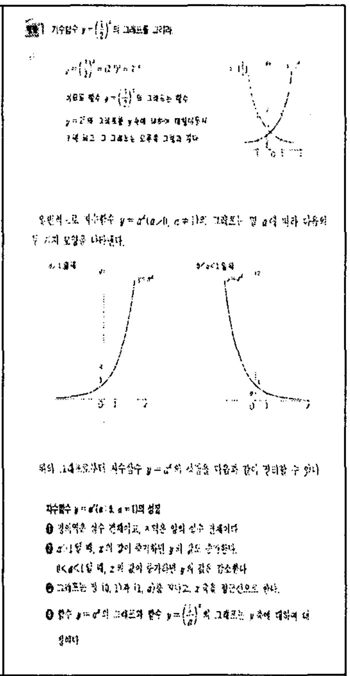
| $x$ | $\cdots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\cdots$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $2.6651\cdots$ | $4$ | $8$ | $16$ | $\cdots$ |

위의 표에서 주어지는 순서쌍 $(x, y)$를 좌표평면에 점으로 표시하여 연결하면 오른쪽 그림과 같은 곡선을 얻게 된다. 이 곡선이 함수 $y=2^x$의 그래프이다.

C교과서 p.176.

<표 5>를 살펴보면 A, B, C 세 교과서 모두 지수함수 개념을 제시할 때 구조적 접근과 조작적 접근을 동시에 사용하고 있다. 그래프는 구조적 접근으로써, 전체적인 모양을 한 번에 알아볼 수 있게 해주고, 완성된 그래프의 모양은 지수함수의 그래프를 정적인 관계로 표현하고 있다. 지수함수의 대수적 $y=a^x$ 표현은 $x$와 $y$사이의 정적인 관계로 볼 수 있으므로 역시 함수의 구조적 표현으로 볼 수 있다. 반면, 대응표는 좌표평면에 대응되는 점을 컴퓨터 프로그램이 하나하나 대응되는 점을 과정으로 계산해서 보여주는 역할을 함으로써 조작적 접근을 사용하고 있다. 즉, 지수함수 개념을 소개할 때, 세 교과서 모두 조작적 접근과 구조적 접근을 동시에 사용하고 있다. 약간의 차이가 있다면 A교과서는 조작적 접근을 먼저 하고나서 결론으로 구조적으로 지수함수의 정의를 소개하고 있고, 반면 B, C교과서는 구조적 접근을 먼저 제시하고 나서 실제적으로 지수함수를 그려보게 함으로써 조작적 접근을 제시하고 있다.

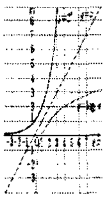
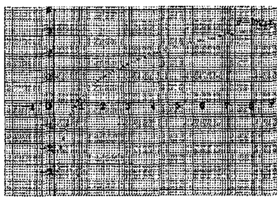
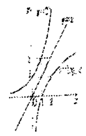
<표 6> 지수함수의 성질

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| A교과서 p.179. | B교과서 p.193. | C교과서 p.178. |

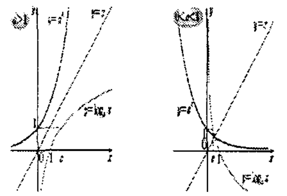
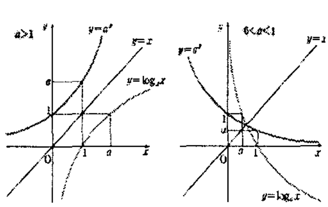
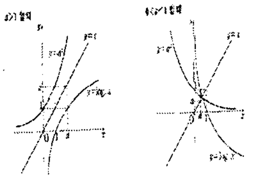
<표 6>을 살펴보면 지수함수의 성질을 설명함에 있어 A교과서의 경우는 앞 페이지와 연결 하여 $y=(\frac{1}{2})^x$의 그래프를 그려보게 하여 조작적 접근을 시도하게 한 후 실제로 비교해 보고 지수함수의 성질을 파악할 수 있도록 하였다. B, C교과서의 경우는 조작적 접근법으로 그려보는 것이 아니라 $(\frac{1}{2})^x=(2^{-1})^x=2^{-x}$라는 대수적인 구조를 이용하여 $y=2^x$ 과 $y=(\frac{1}{2})^x$는 서로 $y$축 대칭이라는 것을 한 번에 파악할 수 있는 구조적 접근방식을 이용하고 있다.

<표 7>을 살펴보면 A, C교과서는 로그함수개념을 도입할 때, 10-나에서 배운 역함수의 개념을 가지고 와서 로그함수의 그래프를 한 번에 파악할 수 있게 하여 구조적 접근방식을 취하고 있고, B교과서는 로그함수$y=\log_a x$라는 대수적인 표현으로 제시하여 정적인 관계로 표현했다. 그리고 난 후 로그함수의 그래프를 $x$에 대응하는 $y$값(대응표)를 작성, 그래프를 그려보게 함으로써 조작적 접근방식을 취하고 있다. 여기서 <표 5>, <표 6>, <표 7>을 살펴보면 각 교과서의 개념 접근방식의 일관성이 보여 진다. 대체로 A교과서는 조작적 접근에서 구조적 접근으로, B교과서는 구조적 접근에서 조 작적 접근으로, C교과서는 구조적 접근경향을 보인다.

<표 7> 로그함수의 정의

| | | |
|---|---|---|
| 지수함수 $y=2^x$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일 대응이다. 따라서 지수함수 $y=2^x$의 역함수가 존재한다.<br>지수함수 $y=2^x$에서 로그의 정의에 의하여<br>$x=\log_2 y$<br>이고, 이 등식에서 $x$와 $y$를 바꾸면, $y=2^x$의 역함수<br>$y=\log_2 x$<br>를 얻는다. 역함수 $y=\log_2 x$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로, 함수 $y=\log_2 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.<br><br>일반적으로 $a\neq1$인 양수 $a$에 대하여 지수함수 $y=a^x$의 역함수<br>$y=\log_a x$<br>가 존재하며, 이 함수를 $a$를 밑으로 하는 **로그함수**라고 한다.<br>**로그함수와 지수함수**<br>$a>0$, $a\neq1$일 때<br>**1** $y=\log_a x \iff x=a^y$<br>**2** 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이다. | 양수 $x$에 $\log_2 x$를 대응시키면 그 값은 하나로 정해지므로 $y=\log_2 x$는 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수이다.<br>일반적으로 양수 $x$에 $\log_a x(a>0,\ a\neq1)$를 대응시키면 그 값은 하나로 정해지므로<br>$y=\log_a x$<br>는 $x$의 함수이다. 이 함수를 $a$를 밑으로 하는 **로그함수**라고 한다.<br>이제 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 그려 보자.<br>함수 $y=\log_2 x$에서 양수 $x$의 각 값에 대응하는 $y$의 값을 구하면 다음 표와 같다.<br><br>$x$: $\cdots$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, $\cdots$<br>$y$: $\cdots$, $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1, 2, 3, $\cdots$<br><br>이 표에서 순서쌍 $(x, y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내고, 이들 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음과 같은 곡선을 얻는다.<br>이것이 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프이다.<br> | 지수함수 $y=a^x(a>0,\ a\neq1)$은 정의역이 실수 전체의 집합이고, 치역이 양의 실수 전체의 집합인 일대일 대응 함수이다. 그러므로 지수함수 $y=a^x$의 역함수가 존재한다.<br>또한, 로그의 정의에서<br>$y=a^x \iff x=\log_a y\ (a>0,\ a\neq1)$<br>이므로 위의 식에서 $x$와 $y$를 바꾸면, 지수함수 $y=a^x$의 역함수는<br>$y=\log_a x$<br>가 된다. 이 함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$를 $a$를 밑으로 하는 로그함수라 한다.<br>로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수로 정의되므로, 밑의 조건은 지수함수일 때와 같다. 즉, 로그함수의 밑 $a$는 $a>0$, $a\neq1$이다.<br>함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 그려 보자.<br>$y=\log_2 x$는 지수함수 $y=2^x$의 역함수이므로 $y=2^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 $y=\log_2 x$의 그래프를 얻을 수 있다.<br> |
| A교과서 p.188. | B교과서 p.202. | C교과서 p.187. |

<표 8> 로그함수의 성질

| | | |
|---|---|---|
| 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프와 지수함수 $y=a^x$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 그리면 아래와 같다.<br><br>로그함수의 그래프로부터 다음과 같은 성질을 알 수 있다.<br>**로그함수 $y=\log_a x$의 성질**<br>**1** 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.<br>**2** 그래프는 점 $(1, 0)$을 지나고, $y$축을 점근선으로 한다.<br>**3** $a>1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.<br>$0<a<1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다. | 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.<br>따라서, 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 다음과 같다.<br><br>일반적으로 로그함수 $y=\log_a x$에는 다음과 같은 성질이 있다.<br>**로그함수 $y=\log_a x$의 성질**<br>❶ 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합이다.<br>❷ $a>1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.<br>$0<a<1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.<br>❸ 그래프는 두 점 $(1, 0)$과 $(a, 1)$을 지나고 $y$축을 점근선으로 한다. | 일반적으로 로그함수 $y=\log_a x$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. 또한, 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.<br>따라서, 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 다음과 같다.<br><br>로그함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$의 성질을 정리하면 다음과 같다.<br>**로그함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$의 성질**<br>❶ 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.<br>❷ 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(a, 1)$을 지나고, $y$축을 점근선으로 한다.<br>❸ $a>1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가한다.<br>$0<a<1$일 때, $x$의 값이 증가하면 $y$의 값은 감소한다.<br>❹ 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 $x$축에 대하여 대칭이다. |
| A교과서 p.189. | B교과서 p.205. | C교과서 p.188. |

<표 8>을 살펴보면 로그함수 $y=\log_a x$의 성질은 세 교과서에서 보여 지는 개념의 접근방식은 차이가 없었다. 세 교과서 모두 로그함수와 지수함수가 역함수임을 이용하여, 직선$y=x$에 대칭임을 이용해 그래프를 그려 시각화 시킨 후, 정신적인 심상을 가지고 실재 그래프를 다루는 것처럼 그래프를 보고 성질을 파악하는 구조적 접근을 하고 있다.

## IV. 결 론

같은 수학적 개념을 두고 세 교과서의 접근방식이 조금씩 달랐다. 수학적 개념의 발달과정에서 조작과 구조, 언어적 표현과 시각적인 표현은 인지양식과 관련된 선호의 문제로 볼 수 있고, 수학적 개념의 조작적 접근과 구조적 접근의 이분법적 구분이 절대적인 것은 아니며, 문제풀이 과정의 경우 같은 표기의 조작적 개념화와 구조적 개념화를 서로 오가며 구성된다. 이에, 세 교과서 모두 학생들의 수학적 개념 이해를 돕기 위해 한 가지 방식만을 고집하지는 않았다.

따라서, 수학적 개념을 제시할 때 조작적 접근과 구조적 접근의 제시 순서가 달랐을 경우 학생의 이해에 어떠한 영향을 주는지에 대한 후속연구도 필요할 것이다. 또한, 학생들의 발달단계에 따른 조작적 접근과 구조적 접근의 적절한 배합에 대한 연구도 따라야 할 것이다. 수학의 엄밀성에 더 중점을 두고 구조적인 표현에 치중할 경우 수학교과서는 딱딱한 형식적인, 그야말로 학생들에게 지루한 과목이 되기 쉽고, 과정에 치중하여 전체적인 구조에 집중하지 않을 경우 수학의 진정한 내용이 가려지는 모순이 발생하기 쉽기 때문이다.

## 참 고 문 헌

고정화 (2002). 수학적 개념의 과학적 성격과 교육과정 구성과의 관련성 연구, 수학교육학연구, **12(2)**, pp.213-227.

배종수·임창균 (2001). 수학적인 개념 형성지도에 관한 연구, 한국 초등교육, **13(1)**, pp.57-73.

신현성 (2000). 수학교육론, 서울: 경문사.

예정아 (1992). 고등학교 수학문제해결에서 개념이해의 적용수준에 대한 연구, 이화여자대학교 석사학위 논문.

우정호 (2006). 학교수학의 교육적 기초(증보), 서울: 서울대학교 출판부.

정은실 (2001). 수학적 개념 형성 과정과 그 지도, 진주교육대학교 과학교육연구, **제27집**, pp.95-110.

조영미 (1997). 수학적 개념의 정의유형 분석-고등학교 교과서를 중심으로, 서울대학교 석사학위 논문.

조태근·임성모·정상권·이재학·홍진곤 (2007). 고등학교 수학I, 서울: (주)금성출판사.

최봉대 · 강옥기 · 황석근 · 이재돈 · 김영욱 · 홍진철 (2006). 고등학교 수학I, 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

최상기 · 이용수 · 이만근 · 이재실 · 백한미 · 조택상 (2002). 고등학교 수학I, 서울: (주)고려출판.

Bachelard, G. (1970). *La Philosophie du Nom.* Paris: Presses Universitaires de France, 김용선(역)(1991), 부정의 철학, 서울: 경문사.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des mathematiques.* in Balacheff, N; Cooper, M; Sutherland, R & Warfield, V. (Eds), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing,* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics,* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc, 구광조, 오병승, 류희찬(공역)(1992), 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics,* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc, 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙(공역)(2007), 학교수학을 위한 원리와 규준, 서울: 경문사.

Sfard, A. (1991). On the Nature Mathematical Conception : Reflection on Processes and Object as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics,* **22,** pp.1-36.

# The Operational Approach and Structural Approach to the Mathematical Concepts

## - Focusing on exponential function and logarithmic function -

**Kim, Bu-yoon**

Dept. of Mathematics Education, Pusan National University, 609-735, Korea

E-mail : kimby@puaan.ac.kr

**Kim, So-young**

Nam San Highschool, 609-813, Korea

E-mail : ksy813@hanmail.net

In modern mathematic education, the development of mathematical ability based on the understanding of mathematical concepts has been emphasized in curriculum and teaching methodology. Also, in schools, most math teachers stress the importance of mathematical concepts in doing math well. Thus, in this paper, we outlined the development of mathematical concepts through the literature survey. And then, based on the Sfard's definition of mathematical concepts, which classifies math concepts into the operational approach and structural approach, we analyzed the math concepts of exponential function and logarithmic function units in three highschool math textbooks. As the result, we found that the textbook authors used different approach for the same concepts, and, at the same time, they used both approaches to help develop the students' math concepts.

* ZDM Classification : E44

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key Words : Mathematical concept