

고등학교 도형의 방정식 단원에서 논증기하의 활용에 대한 연구

권 영 인 (경상대학교)
서 보 억 (경상대학교 대학원)

학교수학에서 기하는 논증기하, 해석기하, 변환기하 등 다양한 접근이 가능한 영역이다. 현행 교육과정에서 중학교의 경우에서 논증기하를 주로 다루고, 고등학교 1학년에서는 해석기하를 주로 다루고 있다. 본 연구에서는 현재 고등학교 1학년 도형의 방정식 단원 분석과 이를 학습한 학생들의 문제해결 방법에 대한 분석을 기초로 하여 중학교에서 배우는 논증기하를 고등학교에서 어떻게 이용할 수 있는지에 대한 활용 가능성, 즉 어떻게 논증기하와 해석기하 내용을 서로 결합을 이를 것인가에 대해 고찰한다. 이를 통해 학생들이 도형영역의 수학적 의미를 이해하는데 큰 도움을 주고 더불어 수정된 교육과정의 교과서 구성에 도움을 주리라 기대한다.

I. 서 론

기하고육의 중요성에 대해서는 많은 연구에 의해서 제기되어져 오고 있다. 기하는 2·3차원 공간적 관계의 기술과 추론에 대한 학문으로 논증기하, 해석기하, 변환기하 등으로 구분되어진다. 중학교에서는 유클리드 기하를 기반으로 하는 논증기하가 다루어지고, 고등학교에서는 좌표를 기반으로 하는 해석기하와 변환기하가 다루어진다(김남희·나귀수·박경미·이경화·정영옥·홍진곤, 2006).

고등학교 1학년 도형영역은 해석기하를 중심으로 10-나 단계에서 집중적으로 다루고 있고, 교육과정(1999)에서는 이에 대해 10-나 단계에서는 9-나 단계까지 익힌 도형에 관한 여러 성질과 관계를 해석 기하적인 관점에서 대수적인 방법으로 접근하여 기하학을 새롭게 조명해 보고 직관적인 사고에서 논리적이고 창조적인 사고로 발전시키는 것을 목적으로 한다고 제시하고 있다.

그런데 나귀수(2006)는 기하고육과 관련하여 학생들은 10-나 단계에서 해석기하의 많은 내용을 학습하지만 해석기하의 수학적 의미를 거의 인식하지 못하고 있다고 지적하면서, 현재의 교육과정과 교과서는 10-나 단계에서 해석 기하의 관점에서 도형을 다루는 것의 의의를 학생들이 인식하는 데에 거의 도움을 주지 못하는 것으로 판단하고, 이에 대한 대안으로 논증기하와 해석기하의 조화를 이룰 수 있는 구체적인 방안을 탐색할 필요가 있다고 지적하였다.

논증기하와 해석기하의 조화에 대한 필요성에 대해 우정호(2001)는 다음과 같은 이유들을 제시하

* ZDM 분류 : G74

* MSC2000 분류 : 97D40

* 주제어 : 해석기하, 논증기하, 도형의 방정식

였다. 첫째, 기하가 상대적으로 수학의 중심에서 멀어지고 있지만, 수학적인 상황을 ‘보는’ 기하적인 직관과 상상력 및 기하적인 방법은 여전히 중요하다. 둘째, 대수적 접근 방법은 너무 추상적인 것이며 학생들에게 자연스럽지 않아서 학생들이 탐구하고 내용을 조직하며 정의하고 연역할 기회가 주어지기 어렵다. 셋째, 논증기하와 관련된 문제에 문제다운 문제가 풍부하지만 대수에는 규칙과 절차를 적용하는 기계적인 연습문제나 학생들의 능력을 벗어난 문제가 많다. 넷째, 수학은 기하 및 대수적인 아이디어를 두 축으로 하여 이루어진 학문이며 그 어느 쪽도 소홀히 취급해서는 안 된다.

NCTM(1989)에서도 수학에서 가장 중요한 연결은 기하와 대수 사이의 관련이라고 제시하면서, 학생들은 논증기하와 해석기하를 분리하여 학습하지만 각 체계 사이를 비교하며 번역하는 가능한 많은 기회가 제공되어야 한다고 제안한다.

따라서, 10-나 단계에서 해석기하의 교육에 대한 새로운 조명과 논증기하와의 통합 내지 결합은 매우 중요한 문제가 되므로, 본 연구에서와 같은 도형의 방정식 단원에서 논증기하의 활용가능성에 대한 연구는 필요하리라 생각된다.

도형의 방정식 단원에 대한 연구들은 다양한 방법으로 진행되었다. 유정윤(2005)은 초·중·고등학교에 걸친 연계성을 고려한 연구에서 해석기하와 논증기하, 변환기하 간의 상호번역의 필요성을 지적하였고, 황우형·차순규(2002), 허종호(1999)는 공학적인 도구를 통해 효과적인 지도 가능성에 대해 제시하였고, 오종규(2005)는 수학사를 이용하여 도형의 지도방법에 대해 연구하였고, 민경선(2000)은 다양한 발문기법을 활용한 도형 단원의 학업성취도와 학습태도에 대해 연구를 진행하였다. 이처럼 도형의 방정식 단원의 지도에 대한 연구는 여러 가지로 진행되었으나 논증기하와의 통합이나 결합에 대한 연구는 부족한 실정이다.

본 연구에서는 고등학교 1학년 도형의 방정식 단원과 중학교 기하단원을 비교 분석하여 상호관련성에 대해 고찰하고, 도형의 방정식 단원을 학습한 학생의 문제해결 경향을 살펴본다. 이것을 바탕으로 도형의 방정식 단원의 학습내용에 대한 개념도입과 문제 해결을 위한 정보수집, 정보처리, 정보파지 과정에서 논증기하와 해석기하를 구체적으로 어떻게 결합할 수 있는지 살펴보는 것을 목적으로 한다. 이를 통해 학생들이 ‘도형영역의 수학적 의미를 이해하는데 도움을 주고 더불어 새로운 교과서 구성에 의미 있는 도움을 주리라 기대한다.

II. 도형의 방정식 단원 분석과 학생의 문제해결 방법

1. 도형의 방정식 단원 분석

도형의 방정식 단원의 분석을 체계적으로 하기 위해 박윤범 외 5인(2001), 우정호 외 3인(2001), 최봉대 외 6인(2001)의 고등학교 수학 10-나 교과서 세 종류와 중학교 수학교과서로 배종수 외 7인(2000, 2001, 2002)를 사용하였다.

1) 도형의 방정식 단원의 개념 도입에서의 내용 분석

현행 중등학교 교과서를 보면 중학교의 경우 직관과 논증을 중심으로 기하 학습내용이 구성되어져 있고, 본 연구에서 다루고자 하는 고등학교 1학년의 도형의 방정식 단원은 좌표를 기반으로 하는 해석 기하로 대부분 이루어져 있다. 따라서 도형의 방정식 단원의 지도에서 논증기하를 활용하기 위한 단원 분석은 고등학교 내용과 중학교 내용의 상호 관련성이란 측면에서 다음 <표 1>과 같이 분석할 수 있다. 도형의 방정식에서 도형의 이동 부분은 변환기하의 측면이므로 본 연구에서는 제외하였다.

<표 1> 도형의 방정식 단원의 구성과 중학교 내용과의 관계

구분	도형의 방정식 학습내용	관련된 중학교 학습내용
평면도형	두 점사이의 거리	피타고라스의 정리의 활용(9-나)
	선분의 내분점과 외분점	닮음과 삼각형의 닮음의 성질(8-나)
직선의 방정식	직선의 방정식	기본 도형(7-나)
	두 직선의 위치관계, 점과 직선사이의 거리	도형의 위치관계(7-나)
원의 방정식	원의 방정식	원의 성질(9-나)
	원과 원, 원과 직선의 위치관계	평면도형의 성질(7-나)

(1) 두 점 사이의 거리 : 중학교와 고등학교 교과서 사이에 전개 방식의 차이는 없었다. 단지 중학교는 피타고라스 정리를 학습한 다음 곧바로 첫 번째 활용의 예로서 두 점 사이의 거리 공식을 제시하고 있다. 고등학교는 피타고라스의 정리에 대한 구체적인 언급 없이 바로 피타고라스의 정리에 의해 거리 공식을 유도하고 있다.

(2) 선분의 내분점과 외분점 : 비례식을 이용하여 직선상에서 내분점과 외분점을 구하는 공식을 유도한 후, 이 공식을 기초로 하여 평면 위에서의 선분의 내분점과 외분점을 구하는 공식을 유도하였다. A교과서는 닮음에 대한 언급은 없지만 구체적인 생활 속의 예를 통해 닮음비를 구할 수 있는 탐구활동을 제시하여 공식을 유도하였고, B와 C교과서는 닮음에 대한 구체적인 언급 없이 평행선 사이의 선분의 길이의 비에 대한 결과를 이용하여 공식을 유도하였다.

(3) 직선의 방정식, 두 직선의 위치관계, 점과 직선사이의 거리 : 내용 전체가 대수적인 식을 기반으로 하여 기울기와 한 점이 주어진 직선의 방정식, 두 점이 주어진 직선의 방정식을 구하고 있다. 또 대수적인 식에서 두 직선의 평행조건, 수직조건, 점과 직선 사이의 거리를 유도하고 있다.

(4) 원의 방정식 : 중심이 (a, b) 이고 반지름이 r 인 원의 방정식을 대수적으로 유도하고 있다. A교과서에서는 ‘준비해두자’라는 영역에서 중학교 3학년에서 학습한 원의 기본성질 두 가지를 간단하게 언급한 다음 대수적인 접근을 하였고, B와 C교과서는 논증기하에 대한 언급이 없었다.

(5) 원과 원, 원과 직선의 위치관계 : 중심선과 중심거리를 정의한 후 직관적으로 원의 위치관계를 제시하였다. 이것을 바탕으로 두 원이 만날 때 공통현과 중심선 사이의 관계를 살펴보고, 원과 직선 사이의 위치관계를 판별식을 이용하여 제시하고, 공통접선의 길이를 구하고 있다. 이 부분은 A, B, C교과서 모두에서 논증적인 요소가 가장 많이 나타나 있다. B교과서는 <그림 2>와 같이 공통접선의 길이를 구하는데 논증적인 측면을 구체적으로 언급하였고, C교과서는 <그림 4>와 같이 도입부에서

공통현과 중심선 사이의 관계를 논증을 통해 밝히고 있다.

예제 2	주 원 O 와 O' 이 서로 다른 두 원 A, B 에서 만남 예. \overline{AB} 와 $\overline{O O'}$ 의 교점을 C 라고 하면 $\overline{AC} = \overline{BC}, \overline{AB} \perp \overline{OO'}$ 임을 증명하여라.
------	---

증명 오른쪽 그림의 $\triangle OAO'$.
 $\triangle OBO'$ 에서
 $\overline{OA} = \overline{OB}, \overline{OA'} = \overline{OB'}$
 $\angle OAO' = \angle OBO'$
 $\therefore \angle AOO' = \angle BOO'$
 따라서, $\overline{OO'}$ 은 이등변삼각형 OAB 의 복지각의 이등분선이다.
 즉,
 $\overline{AC} = \overline{BC}, \overline{AB} \perp \overline{OO'}$

◀ 오른쪽 그림은 주
원 O 와 O' 이 대칭
이라는 사실을 더 명확
로 증명하는 것이다.

한 공통현선의 두 점 사이의 거리를 공통현선의 길이라고 한다.
 반지름이 길이가 r , $r'(r < r')$ 이고 중심거리는 $d(d > r + r')$ 인 두 원의
 공통현선의 길이를 구하여 보자.

(i) 공통외경선 PQ 의 길이

점 O 에서 반시사 OQ 에 내린 수선

의 발을 H 라고 하면,

사각형 $OQPH$ 는 직사각형이므로

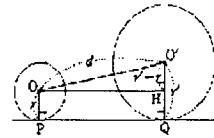
$$PQ = OH$$

직각삼각형 $O'OH$ 에서

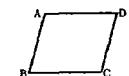
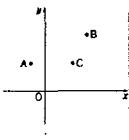
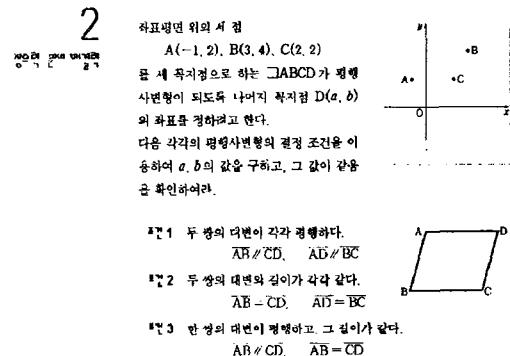
$$OH = \sqrt{O'^2 - O^2}$$

$$= \sqrt{d^2 - (r + r')^2}$$

$$= \sqrt{(d+r-r')(d-r+r')}$$



<그림 1> A교과서에 있는 논증기하적인 요소

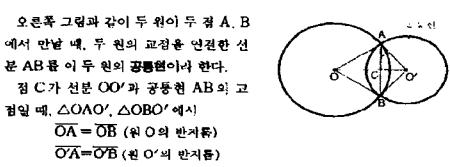


<그림 3> C교과서에 있는 논증기하적인 요소(1)

2) 풀이가 있는 예제 및 제시된 문제에서의 내용 분석

논증기하와 해석기하의 가장 전형적인 차이는 증명 문제의 해결을 통해 드러난다. 논증기하는 종합적인 방법이나 분석적인 방법을 이용하여 증명을 실행하고, 해석기하는 좌표를 도입하여 대수적으로 증명을 수행한다. 따라서 교과서에 이미 풀이가 있는 예제문제와 제시된 문제에서의 증명 문제(문두에 ‘밝히시오’, ‘보이시오’ 문제도 증명문제에 포함시킴)의 유형을 중심으로 분석하도록 한다. 고등학교 수학교과서 A, B, C 세 종류에 대한 분석결과는 다음 <표 2>와 같다.

<그림 4> C교과서에 있는 논증기하적인 요소(2)



이므로

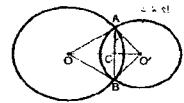
$$\triangle OAO' \cong \triangle OBO'$$

이다. 이 때, 대응하는 각각의 크기는 각각 같으므로

$$\angle AOO' = \angle BOO'$$

이다. 즉, 선분 OAO' 은 이등변삼각형 OBA 의 복지각의 이등분선이요, 이등
 변삼각형에서 복지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분한다.

따라서, 두 원이 두 점에서 만날 때, 공통현은 중심선에 의해 수직이등분
 된다.



<표 2> 고등학교 교과서에서 증명관련 예제 및 문제의 개수

구 분	풀이가 있는 예제(단위 : 문항수)			문제와 단원 연습문제(단위 : 문항수)		
	논증적 증명	해석적 증명	전체 예제	논증적 증명	해석적 증명	전체 문제
A 교과서	1	5	15	0	6	103
B 교과서	0	2	19	0	7	60
C 교과서	0	2	20	1	3	87

제시된 <표 2>에서 보는 것과 같이 도형의 방정식 단원에 제시된 풀이가 있는 예제 문제의 경우 논증기하의 방법으로 문제를 해결하고 있는 문제는 A교과서에서 단 한 문제만 있을 뿐이었다(<그림 1>참조). 세 교과서에서 풀이가 있는 증명 문제 10문제 중에서 논증기하는 10%에 지나지 않았다. 이러한 경향은 문제나 연습문제에서도 동일한 경향성이 있었다. 전체 250문항 중에서 증명과 관련된 문제 17문항 중에서 논증기하의 방법으로 문제를 해결하기를 요구하는 문제는 C교과서 단 한 문제만 있었다(<그림 4>참조). 결국 고등학교 도형의 방정식에 제시된 예시나 문제는 대부분 해석적인 방법으로 문제를 이해하여 해결하고 있는 것으로 볼 수 있다.

2. 학생들의 문제해결

도형의 방정식을 학습한 상위권에 있는 고등학교 학생이 다음과 같이 제시되어진 문제 상황에 대해 논증기하와 해석기하의 측면에서 구체적으로 어떻게 반응을 하였는지에 대해 살펴보고 그 결과를 분석한다.

[문제1] 포물선 $y = x^2 - 1$ 이 x 축과 만나는 두 점 A, B와 이 포물선 위의 점 P가 이루는 삼각형 APB가 직각삼각형일 때, 점 P의 좌표를 구하시오.

$$\begin{aligned} \text{직선 } AP \text{의 방정식 } y &= \frac{a-1}{a+1}(x+1) & \text{직선 } BP \text{의 방정식 } y &= \frac{a^2-1}{a-1}(x-1) \\ y &= \frac{a-1}{a+1}(x+1) & y &= \frac{a^2-1}{a-1}(x-1) \\ y &= (a-1)(x+1) & y &= (a+1)(x-1) \\ \overline{AP}, \overline{BP} \text{ 가 } \perp \text{인 } \Rightarrow & & & \\ \frac{a-1}{a+1} = -\frac{1}{a-1} & & a-1=-1 & a^2=0 \therefore a=0 \end{aligned}$$

<그림 5> 학생의 풀이(1)

학생은 문제에 주어진 상황을 먼저 그림으로 그리고 주어진 조건에 따라 방정식을 세우고 두 직선이 직각인 조건을 이용하여 정확하게 문제를 해결하였다. 학생에게 선분 AB와 직각의 의미에 대해 질문을 하였지만 그것의 의미에 대해서는 궁금해 하지 않았다.

[문제2] 사각형 ABCD에서 변 AB의 중점을 P, 변 CD의 중점을 Q, 두 대각선 AC와 BD의 중점을 각각 R, S라고 할 때, 선분 PQ의 중점과 선분 RS의 중점이 한 점에서 만남을 보이시오.

[문제2] 사각형 ABCD에서 변 AB의 중점을 P, 변 CD의 중점을 Q, 두 대각선 AC와 BD의 중점을 각각 R, S라고 할 때. 선분 PQ의 중점과 선분 RS의 중점이 한 점에서 만남을 보이시오.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}\right), Q\left(\frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}\right) \Rightarrow \overline{PQ} \text{의 중점 } &\left(\frac{b+d}{4}, \frac{a+c}{4}\right) \\ R\left(\frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}\right), S\left(\frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}\right) \Rightarrow \overline{RS} \text{의 중점 } &\left(\frac{b+d}{4}, \frac{a+c}{4}\right) \\ \therefore \text{중점 } & \end{aligned}$$

<그림 6> 학생의 풀이(2)

문제에는 좌표가 제시되어있지도 않았지만 거의 자동적으로 두 축을 그리고, 네 점의 좌표를 설정한 후 중점을 구하는 공식을 두 번 이용하여 문제를 정확하게 해결하였다. 학생에게 평행사변형의 성질에 대해 질문을 하고 그것과 관련을 짓는 것에 대해 생각하도록 하였다. 선분 PS와 선분 RQ가 평행이라는 사실을 얼마 후 대답하였지만 그 이유가 무엇인지에 대해서는 답하지 못하였다.

[문제3] 점 (4,0)을 지나고 $x^2 + y^2 = 4$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하시오.

$$\begin{cases} y = m(x-4) \\ y = mx - 4m \end{cases}$$

$$(1+m^2)x^2 - 8m^2x + 16m^2 - 4 = 0$$

$$D = 0, \quad 16m^4 - (16m^2 - 4)(m^2 + 1) = 0$$

$$16m^4 - 16m^4 - 4m^2 + 4 = 0$$

$$4m^2 = 4 \quad \therefore m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

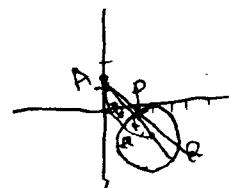
$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x \mp \frac{4}{\sqrt{3}}$$

<그림 7> 학생의 풀이(3)

학생은 주어진 문제가 어떤 기하학적인 상황인지에 관심도 없는 듯 그림 없이 직선의 방정식을 결정하고, 이 일차식을 원의 방정식(이차식)에 대입하였다. 그리고 판별식을 이용하여 문제를 해결하였다. 학생은 이 문제가 쉽다고 생각하였고 대수적인 식 이외에 기하적인 의미에 대해서는 관심이 없는 듯 보였다.

[문제4] 점 A(0,2)를 지나는 직선이 원 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ 와 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 하자. 이 때, $PQ = AP$ 를 만족할 때, 선분 AP의 길이를 구하시오.

처음에는 (0,2)를 지나는 직선의 방정식을 설정하고 원의 방정식에 대입하여 풀려고 하다가 잘 되지 않자, 그림을 그리다가 결국은 원하는 대수적인 식을 얻을 수 없다고 판단하고 오래 지나지 않아 문제해결을 포기하였다.



<그림 8> 학생의 풀이(4)

[문제5] 두 원 $x^2 + (y+1)^2 = 1$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 구하시오.

$$y = mx + n$$

$$\frac{|m \cdot 0 - (-1) + n|}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \quad \frac{|m \cdot 0 - 2 + n|}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m^2} = 1 \quad \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m^2} = 3$$

$$|n+1| = \sqrt{1+m^2} \quad 3\sqrt{1+m^2} = 2 \quad m^2 + 1 = 9$$

$$4(1+n)^2 = (n-2)^2 \quad 3n(n+4) = 0 \quad m^2 = 8$$

$$4+8n+4n^2 = n^2 - 4n + 4 \quad n = 0 \quad m = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore y = \pm 2\sqrt{2}x - 4$$

<그림 9> 학생의 풀이(5)

제시된 문제의 요구에 따라 정확하게 식을 세워서 점과 직선사이의 공식을 이용하여 문제를 쉽게 해결하였다. 이 문제를 닮음의 성질을 이용하여 풀어 보도록 유도하였을 때 닮음인 도형을 찾아서 해결하였는데 이 방법보다 대수적인 식이 좋다고 대답하였다.

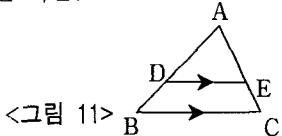
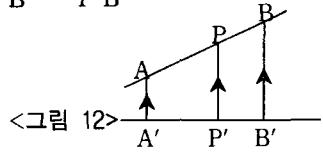
III. 논증기하와 해석기하의 결합

기하교육에서의 논증기하와 해석기하의 결합에 대한 많은 주장들이 있었다. 현행 교과서의 분석결과 고등학교 10-나 단계의 도형의 방정식 단원에서는 이러한 결합은 잘 드러나지 않는 것으로 나타났다. 학생의 문제해결 방법에서도 동일한 결과를 보여 주고 있다. 이 장에서는 구체적으로 논증기하와 해석기하의 결합의 방법 및 해석기하에서 논증기하의 활용가능성에 대해 다음 네 가지 측면에서 접근하여 그 대안을 제시하고자 한다.

1. 개념 도입

피타고라스 정리를 학습한 다음 두 점 사이의 거리 공식을 유도하는 교수-학습 상황은 교사나 학생에게 매우 쉬운 학습내용으로 다가온다. 그 이유는 거리 공식을 유도하기에 앞서 피타고라스 정리의 학습을 통해 기하적인 대상들에 대한 충분한 의미의 전달이 있었을 뿐만 아니라 충분한 사전 경험을 통해 직관 및 창의력과 상상력이 고스란히 남아 있기 때문이라고 생각된다. 그렇다면 10-나 단계에서 새로운 내용을 학생들에게 제시할 때 이러한 경험이 동일하게 제공되어질 필요가 있다. 여기에서는 구체적으로 ‘평면 위에서의 선분의 내분점’에서의 학습내용을 제시할 때 논증기하에 대한 충분한 경험의 제공에 대한 구체적인 예를 통해 논증기하와 해석기하의 자연스러운 결합에 대해 살펴보자.

<표 3> 개념도입에서의 결합

해석기하 요소	논증기하 요소의 추가
좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 를 이은 선분 AB 를 $m : n$ 으로 내분하는 점 P 의 좌표를 구해 보자. 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하고, 그림과 같이 세 점 A, B, P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 차례로 A, B, P 이라 하면 점 P' 은 $\overline{A'B'}$ 을 $m : n$ 으로 내분하므로, $x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$. y 축에도 같은 방법으로 하면, $y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$. 따라서 선분 AB 를 $m : n$ 으로 내분하는 점 P 의 좌표는 다음과 같다. $P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$	첫째, $\overline{DE} // \overline{BC}$ 일 때, $\angle ADE, \angle AED$ 와 크기가 같은 각은?  <그림 11> $\overline{DE} // \overline{BC}$ 일 때, $\angle ADE, \angle AED$ 와 크기가 같은 각은? 둘째, 삼각형ABC에서 $\overline{DE} // \overline{BC}$ 일 때, $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ 임을 알아보자. 셋째, 다음 그림과 같이 평행인 세 직선 l, m, n 이 임의의 두 직선 g, h 와 만날 때, $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{P'B'}}$ 임을 알아보자.  <그림 12>

평면에서 두 점 A, B 사이를 $m : n$ 으로 내분하는 내분점 P를 구하는 상황에서 <그림 10>에서 와 같이 점 A, B, P에서 x축에 수선의 발을 각각 A', B', P'이라고 하자. 이 때, 점 P'이 $\overline{A'B'}$ 을 $m : n$ 으로 내분한다고 제시되어져 있다. 이 사실에 대해 학생에게 질문을 하였을 때 정확하게 대답은 하였지만 그 이유에 대해 물었을 때는 대답을 하지 못하였다. 그 이유는 닮음에 대한 분명한 이해가 부족하기 때문일 것이다. 따라서 내분점과 외분점에 대한 기하적인 의미를 분명하게 하고 직관적인 능력을 성숙하기 위해 주어진 상황에서의 추가적인 수학적 경험의 제공이 필요하다. 이러한 경험은 <표 3>에서 나타난 논증기하의 요소의 추가와 같은 형태로 구체적으로 다루어줄 필요가 있다. 첫 번째 질문을 통해 평행선이 주어지면 닮음이 되는 상황을 인식하도록 하고, 두 번째 질문을 통해 닮음인 삼각형에서 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비에 대한 경험을 제공해 주고, 세 번째 질문을 통해 평행선 사이의 선분의 길이의 비가 일정함을 인식하도록 한다. 이러한 경험은 평면에서 두 점 사이의 내분점에 대한 수학적인 의미를 더욱 확실하게 만들어 줄 것으로 기대된다.

2. 정보의 수집

기본적인 문제에서부터 복잡한 문제에 이르기까지 모든 문제의 해결 과정에서 세 단계의 과정을 발견할 수 있는데 그 첫 번째 단계는 충분한 분석 종합적인 고찰과 주어진 문제에 대해 충분한 이해와 그것을 분명히 하려는 시도를 통해 문제에 대한 초기 사실들 곧 정보를 획득하는 정보의 수집단계가 있다(Krutetskii, 1976). 여기서는 정보의 수집 단계에서 논증기하 내용이 해석기하 문제 해결에 어떻게 결합되어질 수 있는지 살펴보자.

[문제6] 두 점 A(1,1), B(3,-1)로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하시오.

(해석기하에 의한 풀이)

두 점 A(1,1), B(3,-1)에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표를 (x, y) 라 두면, 선분 PA와 PB의 길이는 두 점 사이의 거리 공식에 의해 $\overline{PA} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, $\overline{PB} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$ 을 얻을 수 있다. 주어진 문제의 조건에 의해 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2$ 이므로 자취의 방정식은 $y = x - 2$ 이다.■

(논증기하와의 결합에 의한 정보 수집)

<주어진 것>

- 1) 점 A(1,1)
- 2) 점 B(3,-1)

<구할 것>

- 3) 점 A와 B로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취

<정보의 수집>

- 4) 주어진 점 A와 B에 의해 선분 AB를 만든다.
- 5) 선분 AB의 중점 M은 문제의 주어진 조건을 만족한다.

6) 선분의 수직이등분선의 성질에 의해 문제에서 주어진 조건을 만족하는 점들의 기하적인 성질을 파악한다. 즉, 선분의 수직이등분선 위의 점은 양 끝점으로부터 거리가 같다(왜냐하면, 삼각형 APM과 삼각형 BPM은 합동이기 때문이다).

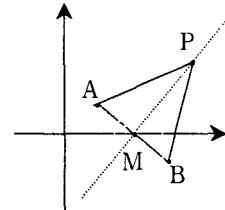
7) 점 P의 자취는 선분 AB의 수직이등분선 위의 점이다.

8) 선분 AB의 수직이등분선을 구하면 점 P의 자취가 된다.

<풀이>

9) 선분 AB의 수직이등분선을 대수적으로 구하면 다음과 같다.

선분 AB의 중점은 (2,0), 기울기는 -1이다. 따라서 AB의 수직이등선의 기울기는 1이다. 따라서 우리가 구하는 방정식은 (2,0)을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식이므로 $y = x - 2$ 이다. ■



<그림 13>

[문제7] 한 점 A(0,2)에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

(해석기하에 의한 풀이)

점 A(0,2)를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx + 2$ 라고 하자. 이 식을 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하여 판별식이 0이 되는 m의 값을 구하면 $\pm\sqrt{3}$ 이다. 구하는 방정식은 $y = \pm\sqrt{3}x + 2$ 이다. ■

(논증기하와의 결합에 의한 정보 수집)

<주어진 것>

<구할 것>

1) 점 A(0,2)

3) 점 A에서 원에 그은 접선의 방정식

2) 원 $x^2 + y^2 = 1$

<정보의 수집>

4) 점 A는 원 O 외부의 점이다.

5) 점 A에서 원 O에 두 개의 접선을 그을 수 있다. 이 접선이 x축과 만나는 교점을 각각 B, B'이라고 하자.

6) 점 A에서 원에 그은 접선의 접점을 T, T'이라고 하면 AT와 OT, AT'과 OT'은 서로 수직이다.

7) OA의 길이가 2, OT의 길이는 1이므로 AT의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다.

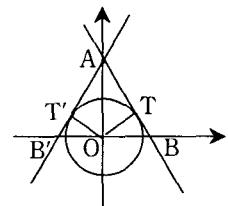
8) 삼각형 AOT에서 세 변의 길이의 비가 $2:1:\sqrt{3}$ 이므로 각 OAT는 30° 이고, 각 ABO는 60° 이다.

9) 접선의 방정식은 점 A를 지나고 기울기가 $\tan 120^\circ, \tan 60^\circ$ 인 직선이다.

<풀이>

10) 점(0,2)를 지나고 기울기가 $\tan 120^\circ, \tan 60^\circ$ 인 직선의 방정식은 다음과 같다.

(0,2)를 지나고 기울기가 $\pm\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은 $y = \pm\sqrt{3}x + 2$ 이다. ■



<그림 14>

앞의 [문제6]에서 일반적인 해법으로 P(x, y)의 자취를 구하기 위해서는 두 점 사이의 거리 공식

을 이용하여 대수적으로 문제를 해결할 수 있다. 이렇게 문제를 푸는 경우 문제가 지닌 기하적인 의미에 대한 고려 없이 자동적으로 해답을 찾을 수 있을 것이다. 반면 4)~8)까지와 같이 선분의 수직 이등분선의 성질을 이용한 논증기하와 결합할 경우 문제에 제시된 기하적인 의미를 파악함과 동시에 문제해결에 중요한 방향을 정보수집 활동을 통해 설정할 수 있다. 또한 [문제7]에서도 4)~9)와 같이 원 밖의 한 점에서 그은 접선의 성질과 삼각비의 성질을 이용하여 문제해결을 위한 필요한 정보들을 수집할 수 있다.

3. 정보의 처리

문제해결 과정의 두 번째 단계는 원하는 결과를 얻기 위해 얻어진 사실들을 처리하고 변형하는 단계로, 이 때 적절한 해답을 얻게 된다. Krutetskii(1976)는 이것을 문제해결에서 정보의 처리단계라고 하였다. 정보의 처리단계에서 논증기하의 내용이 해석기하 문제해결에 어떻게 결합되어질 수 있는지 살펴보자.

[문제8] 포물선 $y = x^2 - 1$ 이 x 축과 만나는 두 점 A, B와 이 포물선 위의 점 P가 이루는 삼각형 APB가 직각삼각형일 때, 점 P의 좌표를 구하시오.

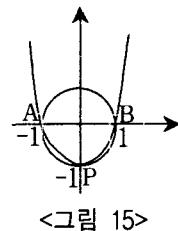
(해석기하에 의한 풀이)

앞의 [문제1]의 학생풀이에서 보듯이 일반적으로 이 문제를 해결하기 위해서는 직선 AP의 방정식과 직선 BP의 방정식을 각각 구한다. 즉, $y = (a-1)(x+1)$, $y = (a+1)(x-1)$ 이다. 이때, 두 직선의 방정식이 수직이 되므로 두 기울기의 곱이 -1 이 된다는 사실을 이용한다. 즉,

$$\frac{a-1}{1} \cdot -\frac{1}{a+1} = -1 \text{ 을 이용하여 } a = 0 \text{ 임을 구하고, } P(0, -1) \text{ 을 찾는다.} \blacksquare$$

(논증기하와의 결합에 의한 풀이)

삼각형 APB가 직각삼각형이라는데 착안을 하자. 논증에서 직각을 만들 수 있는 상황을 정보수집활동을 통해 찾아낸다. 그리고 한 가지 가능한 상황을 추측하도록 학생들을 유도한다. 실제로 선분 AB가 어떤 원의 지름이고 점 P가 원주 위의 임의의 한 점이면 각 APB는 직각이다. 왜냐하면 지름에 대한 원주각의 크기는 직각이기 때문이다. 따라서, 선분 AB를 지름으로 하는 원과 포물선과의 교점을 찾으면 주어진 문제는 해결되어진다. 즉, $x^2 + y^2 = 1$ 이고, 이 원과 포물선 $y = x^2 - 1$ 이 만나는 점 P는 $(0, -1)$ 이 된다. ■



<그림 15>

앞의 [문제8]에서와 같이 해석기하를 이용한 풀이 방법뿐만 아니라 논증기하와의 결합에 의한 새로운 접근 방법을 찾을 수 있다. 즉, 논증기하와 해석기하의 결합을 통해 폭넓은 수학적인 아이디어

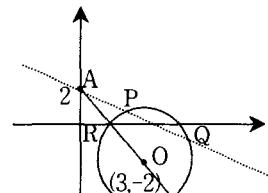
를 이용하여 보다 더 다양한 풀이 방법과 접근 방법을 찾을 수 있다. 이러한 다양한 풀이 방법에 대한 탐색활동을 통해 학생들의 사고경험을 더 풍부하게 만들고, 더 멋있는 풀이방법을 찾으려고 노력하는 사고의 우아성을 길러줄 것으로 기대된다.

[문제9] 점 A(0,2)을 지나는 직선이 원 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ 와 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 하자. 이 때, $PQ = AP$ 를 만족할 때, 선분 AP의 길이를 구하시오(단, 점 A에서 가까운 점이 점 P이다).

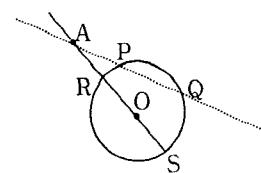
(논증기하와의 결합에 의한 풀이)

문제의 조건에 맞도록 좌표평면에 <그림 16>과 같이 그릴 수 있다. 주어진 조건으로부터 대수식을 세워 이 문제를 해결하는 것은 많은 어려움이 있다. 이 문제를 새로운 방법으로 풀어보자. <그림 16>에서 해석적인 요소를 모두 제거하면 <그림 17>을 얻을 수 있다. 선분 AQ는 원을 지나는 할선이 된다. 이제 할선과 관련된 수학적인 사실이나 내용들에는 어떤 것이 있는지 생각해 보자. 중학교 3학년에서 배운 논증기하 내용 중에 두 할선에 의해 만들어지는 선분의 길이의 비에 대한 성질을 고려해 볼 수 있다. 이것을 위해 원의 중심을 지나는 새로운 할선 AS를 긋자. 그러면, 삼각형 APS와 삼각형 ARQ는 서로 닮음이 된다. 닮음의 성질에 의해서 변의 길이의 비 $AP : AR = AS : AQ$ 가 성립한다. 즉, $AP \cdot AQ = AR \cdot AS$ 를 얻을 수 있다. 이러한 논증기하의 생각을 <그림 16>의 좌표에 똑같이 적용해 보자.

AO 의 길이를 a , 반지름을 r 라고 하면, AR 과 AS 의 길이는 $a - r, a + r$ 이다. 따라서, 주어진 식에 의해서 $2AP^2 = a^2 - r^2 = 16$ 을 얻을 수 있다. 즉, $AP = 2\sqrt{2}$ 를 얻을 수 있다. ■



<그림 16>



<그림 17>

앞의 [문제4]에서 (0,2)을 지나는 직선의 방정식을 설정하고 원의 방정식에 이 식을 대입하여 문제를 해결하려고 하였다. 하지만 이것이 잘 되지 않자 학생은 곧 문제해결 활동을 그만두었다. 해석기하에만 편중된 학습경험은 학습자의 유연한 사고활동을 방해할 수 있다. 따라서 [문제9]와 같이 논증기하와 결합한 문제해결 활동 경험은 학습자가 한 가지 사고에서 다른 사고로 쉽게 전환할 수 있도록 하는 사고의 유연성을 길러줄 수 있을 것이다.

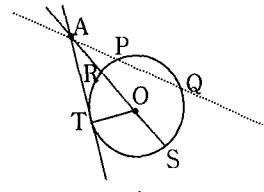
[문제10] $A(a, b)$ 를 지나는 직선이 원 $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ 와 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 하자. 이 때, $PQ = AP$ 를 만족할 때, 선분 AP의 길이와 점 A에서 이 원에 그은 접선의 길이와의 관계를 구하시오(단, 조건을 만족하지 않는 원이 생기는 경우는 제외).

(논증기하와의 결합에 의한 풀이)

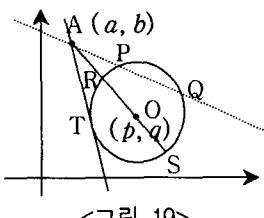
문제의 조건에 맞도록 <그림 18>과 같이 그릴 수 있다. 이 그림에서 좌표를 제거하여 <그림 19>를 얻는다. [문제9]에서 $AP \cdot AQ = AR \cdot AS$ 를 얻을 수 있고, 주어진 식에 의해서 $2AP^2 = a^2 - r^2$ (①식)을 얻을 수 있다.

이제 점 A를 지나는 원에 그은 접선이 원과 만나는 점을 T라고 하면, 삼각형 AOT는 직각삼각형이 된다. 직각삼각형에서는 피타고라스 정리가 성립하므로 $AO^2 = AT^2 + OT^2$ 즉, $a^2 = AT^2 + r^2$ (②식)을 얻을 수 있다.

따라서, ①식과 ②식에 의해서 $2AP^2 = AT^2$ 이다. 결국 AT의 길이는 AP의 길이의 $\sqrt{2}$ 배가 됨을 알 수 있다. ■



<그림 18>



<그림 19>

앞의 [문제10]은 [문제9]의 일반적인 경우로 생각할 수 있다. [문제9]를 일반적인 모든 경우까지 확장하여 선분 AP의 길이와 접선 AT의 길이 사이의 관계를 구하였다. 해석기하와 논증기하의 결합을 통해 특수한 상황에서 벗어나 주어진 문제를 일반화할 수 있었고, 학습자에게는 일반화하는 사고능력의 향상에 어느 정도 기여할 것으로 기대된다.

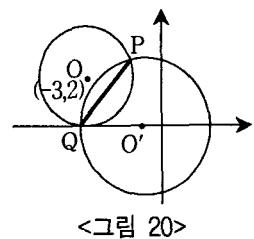
4. 정보의 파지

문제해결 과정의 세 번째 단계는 해를 구하는 과정 및 그 결과로서의 해답이 학습자의 기억에 항상 어떤 흔적을 남기게 되는데 이를 통해서 학습자의 경험을 더욱 더 풍부하게 만드는 단계이다. Krutetskii(1976)는 이것을 문제해결에서 정보의 파지단계라고 하였다. 정보의 파지 단계에서 논증기하와 해석기하의 결합에 대해 살펴보자.

[문제11] 주어진 두 원 $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$, $(x-p)^2 + y^2 = 9$ 이 두 점 P, Q에서 만나는 위치관계에 있다. 선분 PQ의 길이가 최대가 되게 하는 p의 값을 구하시오.

(풀이)

문제의 조건에 맞도록 좌표평면에 <그림 20>과 같이 그릴 수 있고, 이 그림에서 좌표를 제거하여 <그림 21>(왼쪽)을 얻는다. 두 원의 위치관계에서 두 점에서 만나면 공통현 PQ를 생각할 수 있다. 그런데 문제의 조건에서 공통현의 길이가 최대가 된다고 하였으므로 이 현은 작은 원의 지름이 된다. 따라서 <그림 21>(오른쪽)에서처럼 선분 PQ가 원 O의 지름이 된다. 두 중심 O와 O'을 그은 선분은 선분 PQ의 수선이 된다(왜냐하면, 원의 중



<그림 20>

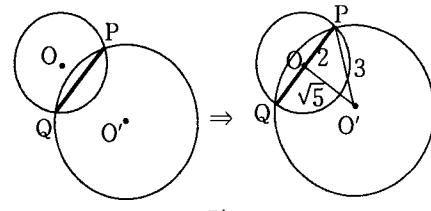
심에서 원에 내린 수선은 원을 수직 이등분하기 때문이다).

삼각형 POO' 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해서 선분 OO' 의 길이는 $\sqrt{5}$ 가 된다. 점 O의 좌표는 $(-3,2)$ 이고 점 O' 의 좌표는 $(p,0)$ 이므로, 식 $\sqrt{(p+3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5}$ 을 얻을 수 있다. 따라서, $p = -2$ 또는 $p = -4$ 이다. ■

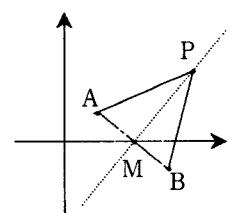
(정보의 파지)

이 문제를 해결한 다음 무엇을 기억할 것인가는 중요하다. 수학에 능력이 부족한 학생은 구체적인 그림이나 수치들을 기억하는 경향이 있지만 능력이 많은 학생은 수학적인 원리나 구조를 기억한다. 따라서, 이 문제에서 학생은 논증기하와 해석기하의 결합을 통해 다음과 같은 의미 있는 수학적인 내용을 기억할 수 있다. 첫째, 공통현이 최대가 되게 하는 상황의 인식이다. 공통현이 최대가 되는 것은 원의 위치관계에서 작은 원의 지름이 공통현이 되는 경우이다. 직관적 사고활동을 통해 이러한 수학적인 요소를 쉽게 기억할 수 있다. 둘째, 원의 중심에서 원에 내린 수선은 원을 수직 이등분한다는 사실로부터 두 원의 반지름과 중심선에 의해 직각삼각형을 얻을 수 있다는 사실이다. 이 사실로부터 피타고라스의 정리를 이용해 두 원의 중심사이의 거리를 얻을 수 있다. 셋째, 논증에 의해 구한 선분의 길이가 곧 좌표에 의해 구체적으로 주어진 두 점사이의 거리와 일치한다는 사실로부터 원하는 해답을 구할 수 있었다는 것이다.

앞의 [문제6]은 ‘두 점 $A(1,1)$, $B(3,-1)$ 로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하시오.’이다. 이 문제에서 정보의 수집과 풀이로부터도 의미 있는 정보의 파지를 얻을 수 있다. 그것은 두 점에서 같은 거리에 있는 점들의 자취는 결국은 두 점을 이은 선분의 수직이등분선 위의 점이라는 것이다. 수직이등분선 위의 모든 점들은 합동인 두 삼각형 APM 과 BPM 에 의해 항상 두 점 A, B에서 같은 거리 위에 있음을 알 수 있다. 이 사실과 직선의 방정식을 구하는 해석적인 방법을 통해 문제를 해결할 수 있었다. 이러한 논증적인 방법에 의한 방향설정과 해석적인 방법에 의한 문제해결의 결합을 기억하는 것은 의미 있는 정보의 파지 활동으로 기대할 수 있다.



<그림 21>



IV. 결 론

우리는 지금까지 고등학교 1학년의 도형의 방정식 단원에서 다루어지는 해석기하 부분을 중학교에서 학습하였던 논증기하와 어떻게 결합을 이루어질 수 있는지에 대해 간단히 살펴보았다. 기하에

서 논증기하의 중요성에 대해서는 많은 학자들이 동일한 주장을 펼치고 있다. 따라서 고등학교 1학년에서 다루어지는 기하영역에서 이러한 논증기하가 얼마나 다루어지고 있고 이것을 학습한 학생은 어느 정도의 논증기하의 사고능력을 가지고 있는지 먼저 분석하여 보았다. 분석을 위해 고등학교 세 종류의 교과서를 사용하였으며 그 결과는 논증기하의 내용이 다양하고 풍부하게 다루어지고 있지는 않다는 것이다. 또한 학생의 문제해결 결과를 보면 해석기하적인 측면에서 대수적인 해법을 거의 자동적으로 사용하였으며 논증적인 방법으로 해결할 수 있는 문제도 해석적인 접근을 더 선호하였다. 심지어는 논증기하적인 아이디어로 해결되는 문제는 어려워하고 접근하는 것을 포기하기도 하였다.

이러한 결과로부터 고등학교 1학년 도형의 방정식 단원의 학습에서 논증기하를 해석기하와 결합을 이루고, 해석기하에서 논증기하의 활용가능성을 높이기 위해 다음 네 가지 측면에서 접근을 시도하였다.

첫째, 개념 도입에서의 활용이다. 피타고라스 정리를 학습한 다음 두 점 사이의 공식을 유도하는 교수-학습 상황은 교사나 학생에게 쉬운 학습내용으로 다가온다. 그 이유는 피타고라스 정리를 학습하는 동안에 기하적인 요소에 대한 충분한 의미의 전달이 있었고, 직관적인 창의력과 상상력이 고스란히 남아 있기 때문이다. 본 연구에서는 구체적으로 ‘평면 위에서의 선분의 내분점’에서의 학습내용을 제시할 때 논증기하와 해석기하의 결합을 이루는 방법에 대해 살펴보았다.

둘째, 문제해결을 위한 정보의 수집에서의 활용이다. 문제해결 상황에서 ‘문제에서 주어진 정보 찾기’, ‘구해야 할 것 찾기’, ‘주어진 정보와 구해야 할 것으로부터 관련성 찾기’, ‘문제해결을 위한 방향성 찾기’ 등을 정보수집과정에서 논증기하의 활용을 통해 가능함을 살펴보았다.

셋째, 문제해결을 위한 정보의 처리에서의 활용이다. 문제해결과정에서 논증기하와 해석기하의 결합을 통해서 다양한 풀이 방법의 탐색이 가능하고, 한 가지 사고에서 다른 사고로 쉽게 전환하는 사고의 유연성과 더 나은 풀이를 추구하는 사고의 우아성 및 일반화하는 사고능력의 향상을 기대할 수 있음을 구체적으로 살펴보았다.

넷째, 문제해결 후 정보의 파지에서의 활용이다. 정보파지라는 것은 문제를 해결한 후 문제에서 어떤 정보를 기억할 것인가와 관련되는데 문제를 해결하는 과정에서 논증기하와 해석기하의 결합을 통해 의미 있는 수학적인 풀이과정과 풀이방법의 기억에 대해 살펴보았다.

지금까지의 연구 결과를 통해 첫째, 대수적인 방법을 강조하는 해석기하와 직관력, 사고능력, 창의력을 강조하는 논증기하의 결합이 더욱 다양하게 이루어질 수 있음을 기대할 수 있다. 둘째, 해석기하의 개념 도입과 문제해결 상황에서 논증기하의 내용과 방법이 효율적으로 사용될 수 있는 교수-학습이 이루어질 수 있음을 기대할 수 있다. 셋째, 새로운 고등학교 1학년 교과서의 도형의 방정식 단원의 내용 개발에 의미 있는 시사점을 줄 수 있음을 기대할 수 있다.

참 고 문 헌

- 교육부 (1999). 고등학교 수학과 교육과정 해설, 서울 : 대한교과서 주식회사.
- 김남희 · 나귀수 · 박경미 · 이경화 · 정영옥 · 홍진곤 (2006). 수학교육과정과 교재연구, 서울 : 경문사.
- 민경선 (2000). 발문학습이 수학과 학업성취도 및 학습태도에 미치는 영향 : 고등학교 1학년 “도형의 방정식” 단원을 중심으로, 한국학 교수학회 논문집 제3권 1호, pp.117-129.
- 박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 김홍섭 · 육인선 · 송상현 (2001). 고등학교 수학 10-나, 서울 : 대한교과서 (주).
- 배종수 · 박종률 · 윤행원 · 유종광 · 김문환 · 민기열 · 박동익 · 우현철 (2000). 중학교 수학 7-나, 서울 : 한성교육연구소.
- 배종수 · 박종률 · 윤행원 · 유종광 · 김문환 · 민기열 · 박동익 · 우현철 (2001). 중학교 수학 8-나, 서울 : 한성교육연구소.
- 배종수 · 박종률 · 윤행원 · 유종광 · 김문환 · 민기열 · 박동익 · 우현철 (2002). 중학교 수학 9-나, 서울 : 한성교육연구소.
- 오종규 (2005). 수학사를 활용한 고등학교 도형·기하지도에 관한 연구 : 10-나, 수Ⅱ를 중심으로, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 우정호 (2001). 학교수학의 교육적 기초, 서울 : 서울대학교출판부.
- 우정호 · 류희찬 · 윤평호 · 박경미 (2001). 고등학교 수학 10-나, 서울 : 대한교과서(주).
- 유정윤 (2005). 7차 수학과 교육과정에서 도형지도의 연계성에 관하여, 인제대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 최봉대 · 강옥기 · 황석근 · 이재돈 · 김영옥 · 전무근 · 홍진철 (2001). 고등학교 수학 10-나, 서울 : 중앙교육진흥연구소.
- 황우형 · 차순규 (2002). 탐구형 소프트웨어를 활용한 고등학교 해석 기하 교육에 관한 사례 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 제41권 제3호, pp.341-360.
- 허종호 (1999). 고등학교 수학과 교육을 위한 CAI 프로그램 개발연구 : 도형의 이동을 중심으로, 한국학 교수학회 논문집 제2권 1호, pp.219-229.
- Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of mathematical abilities in schoolchildren, Chicago : The University of Chicago Press.
- NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, Virginia : NCTM Inc.

A Study on Application of Euclid's Geometry at Unit of Equation of Figures in High School 1st Grade

Kwon young-in

Department of Mathematics Education Research Institut, Gyeongsang National University,
900 Gaza-dog, Jinju, Korea
E-mail : yikwon@gnu.ac.kr

Suh bo-euk

Major in Mathematics Education, Gyeongsang National University Graduate School,
900 Gaza-dong, Jinju, Korea
E-mail : eukeuk@hanmail.net

Geometry in school mathematics is the field that has the possibility of diverse approach such as Synthetic Geometry and Analytic Geometry. Synthetic Geometry is handled in middle schools and Analytic Geometry in the first year of high schools. Therefore, this research show for the possibility of using Synthetic Geometry in high schools which was learned already in middle schools and the way of integrating both of them concretely. This is expected to help students understand the mathematical meaning of figures a lot.

* ZDM Classification : G74

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

* Key Words : Synthtic Geometry, Analytic Geometry, Equation of Figures