

수학 교실에서 나타나는 극단적 교수 현상에 대한 고찰

김 부 윤 (부산대학교)
정 경 미 (부산대학교대학원)

수학적 지식의 개인화/배경화, 탈개인화/탈배경화의 과정이 간과되거나 지나치게 강조됨으로써 발생하는 극단적 교수 현상은 항상 우리의 교수 실제에 내재하고 있으며, 사실 교사들을 심리적으로나 교수학적으로 암박하는 현상이라 볼 수 있다. 그러나 학생들이 수학 수업에서 보이는 오류나 오개념, 장애등에 관한 문제는 많은 연구가 이루어져 있지만 교사에 의해 나타나는 극단적 교수 현상에 대한 연구는 거의 이루어지지 않고 있다고 해도 과언은 아니다.

이에 본 연구에서는 네 가지 극단적 교수 현상에 대해 설명하고, 여러 가지 사례연구에서 다양한 예문들을 제시한 후 분석하는 방법으로 이들 극단적 교수 현상에 대한 이해를 도울 것이다. 또한 이러한 분석을 토대로 수학교실에서 나타나는 극단적 교수현상을 극복할 수 있는 방법에 대해서도 논의 할 것이다. 이 연구 논문은 교사들이 자기 자신의 수업을 반성하게 함으로써 극단적으로 진행되는 교수학적 현상의 기준이 될 것이고, 나아가 보다 나은 교수학적 상황을 고려하기 위한 자료를 제공할 것이다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

교사에게 있어서 수학적 지식을 학생들에게 어떻게 지식을 전달할 것인가의 문제는 오랜 시간 동안 숙고되어지고 있다. Brousseau(1997)에 의하면, 교수학의 연구 대상은 수학적 지식과 교수학적 변환, 수학자의 활동, 학생의 활동, 교사의 활동, 몇 가지 예비적인 소박한 근본적인 질문들로 이루어져 있다.

본 연구는 지식의 교수학적 변환과정에서 나타나는 여러 가지 교수 현상 중 교사에 의해 행해지는 극단적 교수 현상에 대한 고찰로 이루어질 것이므로 위의 현상 중 교사의 활동에 집중할 것이다.

학생들이 흔히 범하기 쉬운 오류나 오개념에 관한 연구들은 상당히 활발하게 이루어지고 있지만, 교사에 의해 나타나는 극단적 교수현상에¹⁾ 대한 연구는 거의 이루어지지 않다고 해도 과언은 아니다.

* ZDM 분류 : C79

* MSC2000 분류 : 97C90

* 주제어 : 극단적 교수현상, 토파즈 효과, 죄르단 효과, 메타-인지적 이동, 형식적 고착

1) 본 연구자는 극단적 교수 현상을 교사에게 나타나는 장애의 일종이라 본다. 이는 학생들의 인식론적 장애의 극복에서와 같은 과정을 거쳐 그 근원을 파헤쳐서 극복해야 할 문제라고 본다.

사실, 어떤 하나의 교수 상황에서 한 가지 유형의 극단적 교수현상이 드러난다고 말할 수 없으며, 이들은 독립적으로 나타날 수 있고, 또한 복합적으로 나타날 수도 있다. 한 교사의 교수 실체에서 나타나는 극단적 교수 현상이 한 가지라고 말할 수 없기 때문에 이를 각각에 대한 연구와 더불어 이들 사이의 관계를 파악하는 것 또한 중요하다. 그리하여 본 연구자는 이러한 현상에 관심을 가지게 되었고, 이에 대한 연구가 절실하다는 생각을 하게 되었다.

본 연구의 목적이 수학 수업에서 어떠한 극단적 교수 현상들이 발생하고, 이를 극복할 수 있는 방법은 무엇인가에 대한 연구이므로 이를 위해 문헌연구를 통하여 이론적 분석을 한 후 여러 사람들이 연구한 수업 사례들을 관찰하고, 그들의 수업장면을 통하여 극단적 교수현상과 관련하여 진단하고 실질적인 수업 개선을 위한 실천 노력에 대해 논의해 보고자 한다.

이러한 극단적 교수 현상을 잘 파악하여 연구한다면 교사들 자신에게는 반성의 기회를 제공하고 교수의 질 또한 높힐 수 있으며, 교사에 의해 행해질 수 있는 오류나 실패의 확률도 다소 줄어 들 수 있을 것으로 기대한다.

II. 수학 교실에서 나타나는 극단적 교수현상

Brossseau는 개인화/배경화, 탈개인화/탈배경화 과정이 간과되거나 지나치게 강조됨으로써 발생하는 다소간 극단적인 현상을 제시하여 교사에 의해 교실 수업이 장악되는 문제를 지적하였다 (Brossseau & Otte, 1991). 이는 교사가 교실에서의 교수 현상을 반성하면서 가장 중요하게 생각해야 할 부분이다.

교수학적 변환론의 통제와 연관된 몇몇 현상은 여러 가지 장면(setting)과 관련해서 논의될 수도 있을 것이다. 동일한 현상이 개인 교습의 친밀함에 적용될 수도 있고 혹은 여러 세대의 전체 공동 사회에 관심을 둘 수도 있다.

Brossseau는 교수학적 변환을 고안하거나 관찰할 때, 고려해야 하는 극단적인 교수 현상으로 네 가지를 발견하였다. 개인화/배경화의 과정과 관련하여 두 가지의 극단적 현상을 고려할 수 있는데 메타-인지적 이동과 형식적 고착이다. 메타-인지적 이동은 가상적 학생의 개인화/배경화의 과정을 지나치게 강조한 결과이고 형식적 고착은 그 중요성을 과소평가한 결과이다. 학생의 탈개인화/탈배경화와 관련하여 고려하여야 할 두 가지 극단적 현상은 토파즈 효과와 죠르단 효과이다. 토파즈 효과는 학생의 탈개인화/탈배경화의 과정을 지나치게 간과한 방편적 조치의 결과이고, 죠르단 효과는 그 과정을 과대평가한 결과이다.

이에 본 연구에서는 네 가지 극단적 교수현상에 대해 설명하고, 여러 가지 사례연구에서 다양한 예문들을 제시한 후 종합하여 분석하는 방법을 이용하여 이를 극단적 교수현상에 대한 이해를 도울 것이다.

1. 토판즈 효과(Topaze effect)

가. 토판즈 효과의 뜻과 간단한 예

마르셀 빠뇰의 유명한 회곡 토판즈의 첫 장은 중요한 과정 가운데 하나를 보여주는데, 토판즈는 서투른 학생들에게 철자법을 가르치는데 너무 많은 실수를 허용하지도 기대했던 철자법을 곧바로 가르쳐 주지도 않으면서, 그는 아주 명백한 철자법의 암호로 그것을 숨겨서 답을 “제시해버린다”. 학생들에게 그것은 본래 철자와 문법 문제였는데 결국은 문제가 완전히 바뀌어 버린 것이다. 아이들이 계속해서 실패하는 것을 보자, 토판즈는 이해했다는 표시를 얻고 싶은 나머지 학생들이 결국에는 올바른 첫 자를 쓰게 될 조건에서 살짝 타협하고 말았다. 그가 법칙을 외우도록 했고 그것을 여러 번 써보게 했다가 이렇게 했을 것이라고 짐작할 수 있다. 이런 식으로 가르치려는 노력이 모두 실패했다는 것이 간단한 명령으로 드러난다. 교사는 결국 작업이 핵심적인 부분에 대해 책임감만을 다한 것이다.

학생들이 해야 할 대답이 미리 결정되어 있다. 교사는 이런 대답이 나올 수 있는 질문을 선택한다. 물론 그 의미가 변하면서 이런 대답을 만들어 내는데 필요한 지식이 바뀌게 된다. 점점 더 쉬운 질문을 고르면서 교사는 대다수의 학생들이 적절한 의미를 얻게 하려고 노력한다. 만일 목표로 하는 지식이 완전히 사라져 버린다면, 이것을 토판즈효과라고 부른다. (Brousseau, 1997, p. 25)

토판즈 효과는 소위 교수학적 계약에 의한 압박에서 일어나는 전형적인 현상으로 교사가 학생의 행동의 의미를 다룸에 있어서 인지적 내용에 관한 학습환경을 일소하게 되는 것을 말한다.

Bauersfeld(1988)가 보여준 “상호작용의 깔때기 패턴”도 이러한 현상의 한 예이다. 깔때기 패턴에서는 교사가 일련의 유도 질문을 통해 원하는 결과를 끌어낸다.

또 다른 예는 교과서에서 문제에 대한 답을 함께 제시하는 것인데, Kilpatrick(1980)이 미국 전국 수학교사연합회제 58차 연례대회에서 “문제해결은 책화할 수 있는가?”라고 한 질문은 일차원적이고 정적인 교과서 안에 문제 해결의 고차원적이며 동적인 과정을 실을 수 있는지를 묻는 것이었다.

가장 명백한 어려움은 교과서에 문제의 답이 실려 있을 경우 풀이에 막힌 학생이 답을 미리 보는 일을 막을 길이 없다는 점이다.

다른 어려움도 많다. 막다른 길, 틀린 풀이, 문제의 재구성, 힌트 등을 어떻게 책에 실을 것인가? 수학적 문제 해결은 수학적 활동의 핵심이므로 Kilpatrick의 질문은 “수학적 지식은 책화할 수 있는가?”라고 확대 제기할 수 있다. 이 확대된 질문은 수학교과서에 나타난 교수학적 변환의 제한점을 포함한 여러 특성을 명료히 할 것을 요구하고 있다. (강완, 1990)

결국 토판즈 효과는 불확실성의 통제, 부적절한 유추의 사용에 의해 나타남을 알 수 있다.

유추는 교수학적 관계에서 그것을 사용하면 토판즈 효과를 계속해서 만들어내는 공포스러운 방법이다. 만약 다수의 학생들이 학습하지 못했다면 똑같은 재재를 가지고 가르쳐보는 두 번째 시도를

하게 된다. 학생들도 그것을 알고 있다. 새로운 문제가 앞의 것과 비슷하다는 사실을 교사가 숨긴다 하더라도 학생들은 비슷하다는 것을 알게 될 것이다.-이것은 합법적인 행동이다-그래서 그들은 현재 상태에서 앞에서 제시되었던 해답으로 거슬러 올라갈 수 있다.

이러한 반응은 학생들이 주어진 문제에 꼭 맞는 해답을 찾았다는 것을 의미하지는 않는다. 그러나 아마도 대단히 외적인 통제되지 않은 지표를 인식한 것이며 교사는 그들이 그것을 만들어내기를 원한다. 학생들은 교수학적 지시문을 읽어서 해답을 발견하는 것이지, 그들 스스로 문제에 참여해서 발견하는 것은 아니다.

비슷하지만 아직 밝혀지지 않은, 이해하지 못한 문제를 여러번 실패하고 난 후이기 때문에 학생들은 그와 같이 할 것이며, 고집스럽게 따르지 않는다고 야단치기 위해 교사가 갑작스럽게 다시 나타난 유추에 의존하게 될 것이다.

유추를 만용함으로써 토파즈 효과가 나타나는 예로 교사는 학생들이 제시된 문제의 구조에 걸맞은 진정한 수학적 활동에 의해서가 아니라 교사의 질문을 단지 사소하게 읽어내림으로써 답을 쉽게 얻도록 하기 위해서 자신이 하는 일을 단순화 한다.

아마도 가장 경계해야 될 것은 토파즈 효과인 듯 싶다.

나. 여러 가지 사례연구를 통하여 분석한 토파즈 효과

1) 조완영(2000)의 교사의 수학적 문제 해결 지도에 대한 인식조사를 분석하여 보면 K교사의 경우 소집단 형태로 수업을 진행하였는데, 수업 시간 동안 아동들에게 스스로 문제를 풀게하며 학생들이 다양한 방법으로 문제를 풀어보고 풀이를 전체에 발표하고 검토하게 하였다. 학생들은 수업에 무척 적극적이었으며 교사도 학생들의 의견을 잘 수용하였다. 학생들이 문제를 어렵게 생각을 하면 아래와 같이 ‘힌트’라고 하여 일종의 발견술을 제시하였다.

T...앞에서 했던 것을 잘 생각해 봐요. 자...중점을 찍고...연결하면 어떻게 될까요?

T. 힌트를 하나 주겠어요. 모양을 잘 보세요...원래 도형과 똑같은 모양의 도형이 4개가 생기게 됩니다.

또한 교과서에 제시된 문제 이외 예제를 준비하여 학생들이 문제 해결 경험을 많이 가질 수 있게 하였다.

위의 상황을 극단적 교수 현상 입장에서 바라다보면 교사는 학생에게 많은 힌트를 제공하고 학생들에게 사고를 불러일으킨다는 명목하에 사실은 학생들의 생각할 시간이나 기회를 박탈하고 있다. 또한 학생들의 문제해결의 증진을 위해 수많은 문제를 제시할 때에도 유의해야 할 것은 토파즈 효과라는 극단적 교수 현상의 한 유형이 나타날 수도 있다는 것이다.

2) 이경화(1996)는 확률 교육에서의 전형적인 예는 문제와 함께 풀이의 결정적인 방법을 제시하는 것이라고 하였다. 특히 고등학교 교과서에는 문제 옆에 문제를 풀이하는 중요한 단서가 함께 제시되

고 있기 때문에 학생들이 진정으로 문제를 이해하지 못해도 풀이의 방법을 알 수 있도록 하고 있다. 이는 교과서에 의해 토파즈 효과가 유발되는 한 예이다.

또한 이경화(2003)는 학생들이 본질적인 개념이나 문제의 뜻을 정확히 모르는 상태로 교사가 제공하는 힌트와 요령에 따라 풀이방법을 배우게 되는 그 실례를 교사 갑의 ‘여사간의 확률’에 관한 설명으로 제공하였다.

여사간의 확률을 설명하는 교사 갑은 사건 A가 일어날 확률을 p 라 할 때, 사건 A가 일어나지 않을 확률이 $1-p$ 가 된다는 성질을 학생 스스로 파악하도록 지도하기에 곤란함을 느낀다. 사건 A가 일어날 확률과 사건 A가 일어나지 않을 확률을 합하여 1이 됨을 설명한 후에 이 성질이 얻어짐을 설명해야 하는데, 이 과정의 설명에도 곤란함을 느낀다. 결국 1에서 뺀다라는 결정적인 부분을 교사는 학생들에게 알려주고, 그 결과 이 부분이 왜 이렇게 되는지 학생들은 이해할 필요가 없어진다.

학생들의 나머지 학습 과정은 $1-p$ 라는 계산이 여집합의 의미를 떠올려 볼 때 그럴듯한 것이며 과연 어떤 경우에 이러한 계산을 적용하는지에 관한 것이다. 즉, 교사의 대부분의 설명은 학생으로 하여금 ‘ $1-p$ ’라는 확률의 성질 (2)의 핵심적인 부분을 이해하도록 구성되는 것이 아니라 어느 경우에 그 성질을 적용하는가에 관한 것임을 알 수 있다.

학생에 의한 학습 결과에 대한 표현, 예컨대, 여사간의 확률을 적용하는 문제를 푸는 것은 교사가 원하는 가장 중요한 목표이다. 이러한 학습의 성공에 대한 증거를 얻기 위해 교사는 본질적인 의미를 이해하는데 필수적인 부분은 아예 설명해 주거나 결정적인 힌트를 제공하고 그 개념을 이해하는 부분적인 지식이나 절차를 통해 학생의 행동을 유도하는 방식으로 수업을 진행한다.

이는 본질적인 개념의 이해가 바라는 행동을 이끌 수 있지만 바라는 행동이 나타난다고 해서 개념의 이해가 일어났다고 할 수 없음을 교사가 깨닫지 못한데서 비롯된다.

또 다른 예로 교사에 의한 반복 설명과 구조상 거의 같은 문제를 계속해서 제시하는 토파즈 효과이다. 사실 유추는 사용자의 책임 아래 사용되면 훌륭한 발견술적 도구이다.

교사 을의 수업에서 원탁에 앉히는 방법을 설명하면서 교사는 학생들의 어려움을 지나치게 우려한 나머지 비슷한 설명의 반복과 학생으로 하여금 숫자만 다르고 나머지 내용은 같은 유형의 문제를 반복해서 풀게 한다.

교사의 반복된 설명 가운데 “일렬로 배열할 때 네가지가 원탁에 배열할 때는 한가지로 해야되자기 때문에”라는 언급은 가장 중요한 부분으로 간주되어 교사에 의해 계속해서 질문되고 있다.

학생들은 결국 교사의 질문 대부분에 대해 옳은 답을 하게 되고, “네명이면 4로 나눈다”는 계산 방법만 알면 교사가 내주는 모든 문제를 풀 수 있음을 알게 된다.

결국 실력이 낮은 학생들도 이 문제를 해결하는 방법을 알게 되지만 이것은 낮은 수준의 유추에 의한 풀이일 뿐 문제를 올바로 이해한 풀이라고 생각할 수 없다. 그리고 학생들이 원탁문제를 올바로 이해하고 풀이 방법 고안에 참여하여 학생 스스로 타당하다는 추측하에 얻어낸 풀이가 아니다.

3) 이희선(2006)의 <7-가>단계의 함수 단원 도입 활동에서 교과서나 교사에 의해 나타날 수 있는

극단적 교수현상에 대한 분석이다.

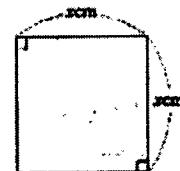
몇 개의 교과서를 분석한 결과 함수 개념의 도입 활동에서 <그림 II-1>에서와 같이 ‘정비례(반비례)관계를 이해한다’, ‘정비례(반비례)란 무엇인가?’, ‘정비례(반비례)의 뜻을 안다.’ 등의 문구로 학습자들에게 활동을 통해 해야 할 학습의 힌트를 주고 있다. 학습자들은 도입 활동을 통한 탐구 이전의 정비례, 반비례에 대한 내용을 학습하는 것을 짐작할 수 있는 것이다.

또한 활동할 때 학습자들이 활동을 통해 알아내야 할 정비례 관계를 <그림 II-2>과 같이 표를 통해 힌트를 줌으로써 교사들에게 극단적 교수현상 중 토파즈 효과가 일어날 수 있다.

▶ 정비례 관계란 무엇인가?

수학을 배우면서
정비례 문제를 알고
관련성을 구할수 있다.
비율을
변수, 정비례

한 변의 길이가 x cm인 정사각
형을 만들려고 한다. 둘레의 길이
를 y cm라고 할 때, y 의 값이 1, 2, 3, 4,
5로 변함에 따라 y 의 값이 어떻게 변하
는지 알아보아라.



<그림 II-1> 교과서 탐구활동

?) 매분 2km의 속도로 달리는 기차가 A 역을 지나서 B 역으로 향하
고 있다. A 역을 지나 x 분 후, A 역으로부터 y km 만큼 떨어진 지점
을 지난다고 할 때, 다음 빈 칸을 알맞게 채워라.



x	0	1	2	3	4	5	6	...
y	0	2	□	6	□	10	□	...

위의 물음에서, 시간이 1분의 2배, 3배, 4배, ...로 변함에 따라
떨어진 거리도 2배, 3배, 4배, ...로 변한다.

<그림 II-2> 교과서 탐구활동

4) 이혁규(1996)는 수업시간 중에 나타나는 ‘발문하기’가 순수한 의미의 발문이 아니라 학생들의 주의력을 집중시키기 위해 의도로 자주 사용된다고 보았다.

교사의 발문에 대해 학생들이 목표로 하는 답을 하지 못할 경우, 교사는 설명을 먼저하고 그 설명이 제대로 전달되었는지를 확인하기 위한 수단으로 발문을 하게 된다. 그러므로 교사는 앞 설명의 단순한 기억에 의한 학생들의 대답을 내용을 이해했다는 단서로 받아들이게 되고, 수업이 교사만의 만족에 의해 다음 단계로 넘어가는 오류를 범하게 되는 경우를 예로 들면서 잘못된 발문으로 인하여 토파즈효과를 발생시킬 수 있다고 보았다.

위의 예는 자리 수업의 한 경우이지만 발문에 의한 토파즈 효과는 모든 과목을 넘어서 많은 교사에 의해 일어날 수 있는 극단적 교수현상이라 볼 수 있다.

이런 현상을 극복하기 위해서는 발문이 변형되는 동안에도 그 의미가 보존 되도록 하는 교사의 조절이 필요하다.

5) Nara, L (2002)의 수학에서 필요한 특수교육이라는 연구에서 교육에서의 ‘지식’은 때로 학교에서 제공되는 교육을 통해 아동들이 어떤 지식을 그 안에서 획득하도록 의도되는 ‘객관적인 현상’으로 간주된다고 하였다.

그러나 아동들과 지식 사이의 관계는 주관적이다. 아동은 새로운 지식을 자신만의 관점이나 이해, 그리고 자신만의 목표에 의해 검토하며 그 지식을 자신만의 삶과 관련짓는다.

학교에서 아동들은 때로 이해하지 못하는 척하거나 활동에 참여하는 것을 거부하는 모습을 보기도 한다. 그렇지 않으면 아동들이 활동에 참여하는 척하지만 진정으로 참여하고 있는 것이 아니라 ‘하는 척하기’ 놀이를 하고 있을 수도 있다. 아동들은 자신에게 기대되는 것이 무엇인지를 알고 있으며 이에 따라서 행동하게 되는데 Edwardsen(1981)은 이를 ‘카멜레온처럼 행동하는 것’이라고 표현했다. SEN²⁾ 교수에서 널리 받아들여지고 있는 가정 중에는 ‘연습하면 완벽해진다’는 것이다.

위의 내용을 살펴보면 아동들은 교사의 기대를 저버리지 않기 위하여 교사에 지도에 잘 따르는 것처럼 보이기 위해 ‘하는 척하기’를 통해 교사의 경로를 따른다.

이는 아동의 문제이기도 하지만 연습을 통해서 완벽하게 만들려고 하는 교사의 노력에 의해서 파행되는 토파즈 현상의 일종이라 볼 수 있다.

6) 박지용(2002)의 수학 수업에서 교사에 의한 교수학적 변환 연구 중 교사 A의 수업 일부 장면이다.

교사: 자, 이제 수모형으로 안 해도 구구단만 외워서 정확한 답을 계산해 낼 수 있겠습니까?

그러면 선생님이 이제 연습지를 줄테니까, 모둠장은 나오세요.

나머지 사람들은 수모형을 정리하고 연필과 지우개를 꺼내세요.

교사: 칠판에 문제를 쓸 준비! 아들은 문제를 쓸 준비!

교사: 10까지 세자

학생: 10까지 센다. 한목소리로,

교사: 자 준비!

교사: 1번 323×3 (아이들의 대부분은 세로셈으로 능숙하게 계산!)

교사: 김승엽 얼마?

학생: 969

2) 노르웨이 Bergen의 일반학교에서 특수교육을 필요로 하는 (SEN; special educational needs) 아동들을 위한 교육과정의 규정들에 초점을 맞춘 연구에서 나온 용어이다.

학생: 에이

교사: 자, 구구단 외워보자.

학생: 3단을 외운다.

교사: 다시 풀어보자.

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 3 \\ \hline 927 \end{array}$$

교사: 2번 문제 121×3 (아이들 각자 계산)

교사는 수업이 시작된 지 약 20분 경부터 칠판에 문제를 내고 아이들에게는 시험지를 나누어 주고 곱셈 문제를 반복적으로 풀게 하였다.

수업의 반 이상이 같은 패턴의 문제를 반복적으로 제시하여 곱셈식에 완전히 익숙해져서 문제 풀이에 능숙하게 하려는 듯 보였다.

결국 수학 실력이 낮은 학생들도 문제를 해결하는 방법을 알게 되었다. 하지만 이것은 낮은 수준의 유추에 의한 풀이일 뿐 '곱셈'에 대한 의미를 바로 알고, 문제를 올바로 이해한 풀이라고는 생각 할 수 없다.

위의 사례를 접하면서 본 연구자의 수업 활동을 반성하여 본 결과 학생들에게 '능숙한 문제 해결'이라는 목표하에 문제 풀이의 기능만을 제공한 듯 하여 이에 대한 극복이 시급함을 느꼈다.

7) 김미월(2001)의 로그함수 단원을 도입하는 수업에서 교사가 교과서 연습문제 7(문제: 함수 $y = 2^x$ 의 그래프를 이용하여 함수 $y = 2^{|x|}$ 의 그래프를 그려라.)의 풀이과정에 대한 설명 마지막 부분이다.

교사: 이렇게 올라가면 안되지. 애도 고쳐야 되잖아. [원래 $y = 2^{|x|}$ 그래프에서 1사분면에 있어야 할 꼬리부분도 추가하면서 그래프를 그린다] 이것이 문제 7번에서 절대값이 들어간 것을 구하는 것이야. 로그라는 것을 한 번 봐야겠지. 응?

학생: 예

교사: 이것을 [$y = 2^{|x|}$ 그래프를 가리키면서] 보면서 다시 얘기하자. $y = 2^x$ 이라고 하는 저 그래프는 어떤 특징을 갖죠? 어떤 특징을 갖는다는 것보다, 저것의 정의역이 뭐야?

교사는 함수의 정의역, 치역, 일대일 대응등에 대해 설명하고서는 아래의 장면으로 들어갔다.

교사: 응? 그러면 일대일 대응을 왜 따지지?

학생: 역함수

교사: 역함수 때문에 따진다 말이야. 그러면 얘($y = 2^x$ 을 뜻함)는 x 는 전 범위에서, y 는 0보다 큰 범위 내에서 역함수가 존재할까? 응? 역함수가 존재할까? 즉, 그러니까 x 는 전부, y 는 0보다 큰 범위 이내에서 역함수가 존재할까? 응? 존재한다? 안한다? 거꾸로 뭐냐면 이 함수($y = 2^x$

을 뜻함)가 치역이, 치역이 0보다 크다잖아? 그지? 거꾸로 정의역을 0보다 큰 걸로 바꾸고, 치역을 실수 전체로 바꾸는 함수가 존재하겠는가 말이야. 응? 무슨 얘기인지 어려워? 그러면 이 함수의 역함수를 구하기 위해서 그래프에서? 응? $y = x$ 라고 하는 직선에 대칭인 것을 그리면 되죠? 그지? 대칭인 것을 그리면 되겠네요. [임의의 로그함수 그래프를 그리면서] 그려지네. 그지? 그러면 이 그래프의 정의역은 뭐야? 이것의 정의역은 x 는 0보다 크다 이죠?

학생: 예

교사: 0보다 크다. 그지?

학생: 예

교사: 치역은 뭐야? 치역은 실수 전체란 말이야. 이것이 역함수잖아. 그래프는 지난번에 그려봤잖아. 그러면 이것은 2^x 의 역함수를 구하려면 어떻게 해야지? x 하고 y 의 값을

학생: 바꿔 줘요.

교사: 바꿔 주잖아. 그지? 바꿔 주잖아.

학생: 예

교사: 그러면 $x = 2^y$ 란 말이야. 그지? 응?

학생: 예

교사: y 를 풀어주면 되지. 풀어주면 뭐가 되니? 지난번에 저것을 해서 못했잖아. 응?

학생: 예.

위의 학습과정을 보면 교사는 끊임없이 질문하고 스스로 대답하는 과정에서 학생들이 생각할 수 있는 시간적인 여유와 기회를 박탈하고, 문제 풀이과정의 사소한 모든 힌트를 제공하므로써 학생들의 학습권을 박탈하고 있다. 위의 교사는 토파즈효과라는 극단적 교수 현상에 사로잡혀 있다.

본 연구자 뿐 아니라 우리나라의 대다수 수학 교사는 어떤 수학적 개념이나 원리를 학생들에게 습득시키기 위해 반복적인 설명이나 유사한 문제의 제시등을 이용한다.

그러나 어느 선까지가 우리를 토파즈 현상을 유발하는 교사라는 오명을 줄 것인지 상당히 고민스러운 부분이다.

2. 죠르단 효과 (Jordan effect)

가. 죠르단 효과의 뜻과 간단한 예

학생들과 지식에 대한 논의 및 실패에 대한 인정을 피하기 위해 교사는 실제 단계나 응답 학생이 하는 행동들(사실은 아주 전형적인 동기에서 나오는 것인데도 불구하고)을 보고 그것을 지식을 알고 있는 것으로 판정하여 인정하는 것이다. 그리하여 그것에 가치를 두고 시종일관 그것에 의미를 부여하는 것이다.

조르단 효과-철학자가 조르단에게 산문과 운문이 무엇인지를 가르쳐주는 자칭 신사의 한 장면을 참조하여 부리는 것으로-는 토파즈 효과의 한 형태이다.

학생과 지식에 대해 논쟁하는 것이나 가능한 한 실수를 인정하는 것을 피하기 위해 그러한 행동이 사실은 평범한 단서나 의미로 유도된 것임에도 불구하고 교사는 학생들의 행동이나 대답이 과학적 지식 중 일부를 보여주고 있다고 인정해 버린다.

장면의 전체적인 유머는 평범한 활동을 신성하게 만드는 과학적 대화의 위력을 반복해서 사용하는 어리석음에 있다.

예를 들어 여러 개의 작은 요구르트 병이나 색칠한 그림 등으로 약간 기이한 조작을 해낸 아동에게 “너는 방금 클라인 군을 발견했어”라고 말해준다.

덜 조잡한 방법으로 지식을 친숙한 활동 속에 끼워 넣으려는 바램으로 교사는 진짜 특수한 것 대신에 다른 *problematique*(복잡한 여러 문제들, 해결 곤란한 상황들)을 사용하게 된다. (Brousseau, 1997, 261-262).

학생들은 단순하게 인식한 후 옳은 답을 내는데 교사는 이러한 행동을 학문적이면서 수학적, 인식론적인 이야기를 통해 가치 있는 것으로 증명한다.(Brousseau, 1997, 271)

죠르단 효과는 토파즈 효과의 심각한 퇴행이다. 특정한 지식에 대해 학생과 토론하기도 어렵고 그렇다고 가르칠 수 없음을 인정하기도 어렵게 되자 그러한 곤란을 피하기 위하여 교사는 마치 학생들의 행동이나 반응에서(특정한)과학적 지식이 형성되었음을 확인한 듯이 행동하게 되는데, 그 학생들의 반응이란 사실은 사소하거나 진부한 동기에서 비롯된 것일 뿐이다.

Brousseau(1997)는 죠르단 효과의 극단적인 예로 Diénès 이론을 제시하였다.

수학적 구조는 그 사용으로부터 그것의 기능으로부터 다른 것들의 구성으로부터 무엇보다 그것으로 풀 수 있는 문제들로부터 의미를 얻는다. 그것은 개념의 수준에서 보여져야 한다. 실제로 Diénès의 연구는 그것이 교수에 관한 논쟁의 중심에 성공적으로 내용을 놓는다지만 교수학자들이 구조를 넘어 개념을 탐색하기 위해 또 개념을 넘어 특별히 주체가 역사적인 또는 교수학적인 상황에서 세우는 관념을 탐구하기 위해 수학에 대해 질문하도록 이끌지 않는다.

학생들이 소유하거나 피해야 하는 이런 관념의 분석은 그 관념들이 사용되어 기능하는 일련의 상황으로부터 분리될 수 없다. 이 둘은 교사들이 계속적으로 통제할 수 있는 교수학적 기술과 직면 방법을 장착한 이론을 제공하려는 어떤 시도에서도 피할 수 없다. Diénès의 연구는 교수학적 요구에 대한 반응으로서 무엇보다 교수학의 이론적인 문제들에 대한 정보의 근원으로서 학생들의 행동에 대한 질문으로 이끌지 않는다. 우리는 이것이 필연적인 결과라고 말하고 싶다. (Brousseau, 1997, p. 144)

교사가 Diénès 이론을 수용하는 것은 연구와 교수 사이에 세워질 수 있는 잘못된 관계의 예이다. 연구자들은 문제를 해결하기 위해서 교사가 만들어내는 개념들을 의식적으로 사용하기도 하고 사용하지 않기도 한다. 연구자들은 어느 정도까지는 그 개념들은 합리화되고 그 개념들을 학문적인 용어로 변환하며 과학적인 분위기로 정당화된 그 개념들을 교사(그 개념이 참이라고 생각하면서 그 개념을 즉각적으로 받아들이며 연구자들의 사회적 성공을 확신하고 있는 교사들)에게 되돌려 준다. 이것이 또 다시 죠르단 효과가 된다. ((Brousseau, 1997, p. 271)

Diénès 블록을 이용한 소수지도 방법은 Diénès (Brousseau, 1997)의 심리역학에 따른 것이라고 할 수 있다.(Maudet, 1979). 가르치고자 하는 수학적 구조는 Diénès 블록과 같은 교구 속에 암호화되어 숨겨져 있으며 학생들은 Diénès의 심리역학의 단계를 밟아가며 암호를 해독하는 작업, 곧 교사가 게임 속에 숨겨 놓은 것을 인식하는 작업을 하게 된다.

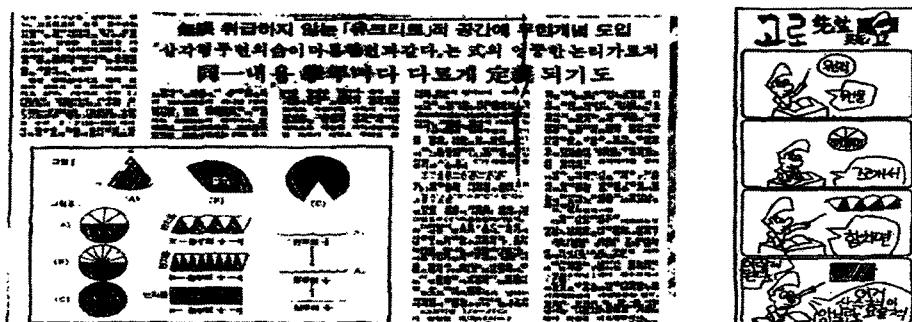
그러나 이런 상황은 그 개념이 '살아 기능하는' 상황이라고 보기는 어렵다. 그 개념은 발견되기를 또는 해독되기를 기다리면서 교구 속에 조용히 숨어 있다. 이것을 발견하고 못하고는 전적으로 학생들의 책임이다. 교사가 할 일은 '다양한 동형 구조 게임'을 제공하는 것이다.

심리-역동적 과정에 자신감을 갖고 있는 교사는 학생들에게 활동지와 게임을 제공해주는 것으로 만족하고, 예상한 효과나 일반화 혹은 형식화가 일어날 때까지 기다린다. 교사가 제공한 다양성 속에서 공통된 구조를 추상화하는 것은 학생들의 몫이다. 다양한 동형 구조 게임을 제공한다고 해서 그것이 학생들로 하여금 그 속에 들어 있는 구조를 추상화해야겠다는 생각이 들도록 만드는 것은 아니다. 즉 Diénès식의 상황은 개념이 살아있는 상황이 아니다.

나. 여러 가지 사례연구를 통하여 분석한 죠르단 효과

1) 강완(2001)의 아르키메데스 무한 분할방법과 죠르단 효과에 대한 연구는 다음과 같다.

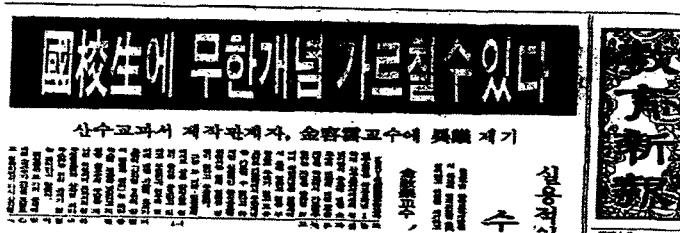
원의 넓이를 구하는 공식에 사용되는 원주율의 개념을 간접적으로 보여 주는 방법은 아르키메데스 무한 분할방법이다. 그러나 아르키메데스 무한 분할 방법에는 무한 개념이 사용되므로 무한 개념에 대한 논쟁에 민감한 사람들에게 교수학적인 오해를 불러일으킬 소지가 있다. 1983년 7월 11일 당시 교육 전문 주간지인 교육신보는 초, 중등 수학 교과서 내용 분석 기사를 기획하여 게재하기 시작하였는데, 이 분석 기사의 원고를 제공한 김용운은 8월 15일자에 실린 제5회 기사에서 원의 넓이를 지도하기 위하여 사용한 아르키메데스 무한 분할 방법을 예로 들어 “무한 취급하지 않는 「유크리드」 적 공간에 무한 개념”을 도입하였다고 지적하였다. <그림 II-3>



<그림 II-3>

유클리드 공간에 무한 개념을 도입하는 것이 잘못인지의 여부에 대한 논란을 벌어나, 이 기사는 당시의 초등학교 수학 교과서가 학생들의 지적 수준에 비하여 매우 어렵게 제작되었다는 인상을 일 반인에게 심어주게 되었다.

이에 당시 한국교육개발원(KEDI)의 교과서 개발 담당자는 교육 신보의 기자에게 아르키메데스 무한 분할 방법은 무한 개념을 학생들에게 가르치려는 의도가 아니며, 원의 넓이 공식에 사용되는 원 주율의 개념을 지도하기 위한 것이고 아르키메데스 무한 분할 방법에 사용된 무한 개념은 학습에 부정적 영향을 줄 수 없음을 설명하였다. 그러나 당시 교과서 행정에 대하여 부정적 시각을 지니고 공격적 입장에서 서 있던 교육신보는 이러한 설명을 왜곡하여 “국교생에 무한 개념 가르칠 수 있다”는 제목의 기사를 게재하였다. <그림 II-4>



<그림 II-4>

이후 이 논쟁은 “이론상 모순을 가르칠 수 없다”, “수학 어려워 학습 효과 낮아” 등의 제목으로 신문 지상에 2차례 더 기사화 되었다. 원의 넓이 공식의 학습 가능성에 대한 서로 다른 시각이 교과서 내용을 둘러싼 논쟁으로 비화된 이러한 현상은 극단적 교수현상의 하나인 죠르단 효과의 전형적 예에 해당된다.

초등학교 6학년 학생이 아르키메데스 무한 분할 방법을 통하여 원의 넓이 공식을 학습하였다고 해서, 그것이 무한 개념을 학습한 것이라거나, 아르키메데스 무한 분할 방법을 사용한 교수 방법이 이론상 모순이라는 주장은 학생이 불가피하게 점진적으로 받아들인 불완전한 학습 내용을 전문적 수준의 특정 지식의 표현으로 받아들이려고 하는 것을 말한다.

그러나 이러한 맹목적인 비판은 교수학적으로 타당한 것이 아니다.

이러한 소모성 논쟁을 방지하는 길은 교수학적 변환론에 입각한 극단적 교수학적 현상에 대한 이해를 보다 넓히는 일이다.

2) 홍진곤(1999)의 교수학적 상황론에 기초한 소수 지도 상황 분석에 따르면 다음 [그림 II-5]의 예 3, 4, 5)은 죠르단 효과의 전형적인 예임을 알 수 있다.

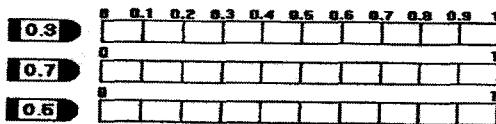
예 3, 4, 5)과 같은 문제들은 교재나 교사의 의도와는 달리, 학습자에게는 다름과 같은 아주 단순한 활동을 요구하는 것으로 받아들여질 수 있다.

예3)의 처음 문제는 0.3이 있는 데까지 세 칸을 칠하면 해결할 수 있다. 그런데 이는 왼쪽의 크레파스 그림에 있는 '0.3'이라는 표현을 오른쪽에서 찾기만 하면 해결할 수 있는 것이기도 하다. 즉, 학습자는 이 활동을 하면서 단순히 왼쪽에 있는 것과 똑같은 숫자를 오른쪽에서 찾는 활동을 한 것일 수 있으며, 이러한 학습자의 활동 결과를 보고 학습자가 소수 개념을 이해했다고 판단하는 것은 일종의 죄르단 효과이다.

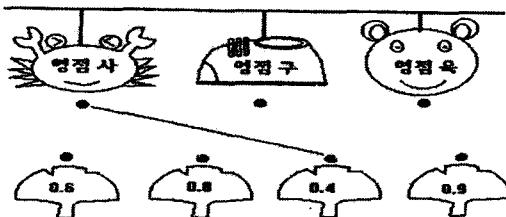
예4)의 경우도 마찬가지이다. 예4)의 문제를 해결하는 데에는 단순히 '영점 사'의 '영'을 '0'으로, '점'을 '.'으로, '사'를 '4'로 바꾸어 놓기만 하면 된다. 더 간단하게는 양쪽에 '사와 4', '구와 9', '육과 6'을 찾아 연결하기만 하면 이 문제를 해결할 수 있다.

예5)의 경우에도 유사한 일이 일어날 수 있다. 학습자는 0.1이 세 번 모여서 0.3이 된다고 생각하지 않고, 앞의 '0.'을 떼어버린 상태에서 1이 세 번 모인 결과인 3을 생각함으로써 이 문제를 해결할 수 있다. 만일 학습자가 이 문제를 이렇게 해결한다면, 이는 소수 개념의 학습이라기 보다 오히려 자연수 개념의 단순 복습에 더 가까운 것이라 할 수 있다.

[예 3] 수학 익힘책 3-2, p.88.
다음 소수만큼 색칠하시오.



[예 4] 수학 익힘책 3-2, p.89.
서로 같은 것끼리 선으로 이으시오.



[예 5] 수학 익힘책 3-2, p.88.
□ 안에 알맞은 수를 넣으시오.
0.3은 0.1이 □ 0.5는 0.1이 □ 0.7은 0.1이 □ 0.8은 0.1이 □

<그림 II-5> 교과서 문제

3) 이경화(1996)에 따르면 학생들이 일상적인 용어 속에 확률적인 표현을 사용하는데 이를 확률적 소양이 있는 것으로 표현하는 것이 이에 해당된다. '가능성, 불가능성, 희박한 가능성, 확실성 등'의 확률적 표현을 일관성 있게 사용한다는 것만으로 확률적인 소양이 갖추어졌다고 한다면 수학적인 지식의 형태로 탈배경화/탈개인화 하지 않고도 확률 현상을 다룰 수 있다는 생각을 할 수 있다. 이는 교사에게 학생들이 확률적인 소양이 갖추어져 있다고 생각하게 하는 중요한 오해를 불러 일으킬 수 있다.

3. 메타-인지적 이동(meta-cognitive shift)

가. 메타-인지적 이동의 뜻과 간단한 예

가르치는 활동이 실패했을 때, 교사는 자신의 활동을 계속하기 위해 스스로를 정당화하고 진짜 수학적 지식을 대신해서 자기 스스로의 표현이나 발견 방법을 학습의 대상으로 삼고 싶어 할 수 있다. 이런 효과가 여러번 반복될 수 있다. 그것은 전체 사회에 관계될 수도 있고, 행동하는 사람의 통제를 벗어나는 실제 과정을 구성할 수도 있다.

가장 놀랄만한 예는 아마도 G. Pappy로부터 비롯된 방법으로 구조를 가르치기 위해 60년대에 그래프를 사용한 사실일 것이다.

30년대 말 집합론은 초수학과 본질적 형식주의에 대한 교사의 필요를 만족시키는 교수 방법이 되기 위해 그 본래의 과학적 기능으로부터 떠났다. 그리고 교사들은 학생들이 이론을 의미론적으로 통제하도록 (소위 “단순하게”)해야 했다.

오류를 피하기 위해서는 공리를 적용하는 것만으로는 충분하지 않았다; 지금 말하고 있는 것이 무엇인지를 알아야 하고 오류를 피하기 위해 사용한 경우가 일으킬 수도 있는 모순도 알아야 한다. 이런 식으로 다루는 것은 보통의 좀 더 “문장론적인” 수학적 취급과는 다른다. 이미 교수학적인 집합론의 이러한 사용은 다른 이론들도 타협만 그럴싸하다면 공리적인 제시를 할 수 있게 만들었다.

의미론적으로 취급하는 것은 오일러로 돌아가 찾을 수 있는 여러 가지 그래프적인 표현을 참조하게 하는 “모델”에 기초해 있었다. 이 “모델”은 실제로는 올바른 모델이 아니다; 기대했던 취급도 하게 해주지 못하며, 가르치는데 어려움만 유발시켰다. 이러한 어려움 때문에, 그 차례가 되어서 이러한 교수 “방법”은 교수 대상이 되었고, 모든 표현의 시기에 가르쳐져야 하고 설명되어야 할 관례나 특별한 언어로 짐지워지게 되었다. 이러한 과정으로 교수활동이 여러 언급이나 관례를 만들어내면 별수록 학생들은 그것에 끼워 맞추어지는 상황을 덜 통제할 수 있게 되었다.

이것이 “메타 인지적 이동”이라는 효과이다. 교사가 모든 것을 희생해서라도 가르치는 것에서 후퇴할 수 없는 한, 교수학적 효과의 힘은 통제 불가능하다. 타협에 참여하는 사람들의 수가 많아 질수록 과정은 더 “단순한” 취급에서 벗어나게 된다.(Brousseau, 1997, 26-27)

교사는 문제를 해결하는 여러 가지 방법을 제공해야 하며, 이미 가르쳐진 방법으로 잘 해결될 것이라는 사실을 고려해야 한다. 그러므로 교사는 가르칠 지식에서 시작해서, 새로운 문제에 대한 해결 방법이 어떻게 만들어지는지 잘 알고 있는 것처럼 행동해야 한다. 그리고 언젠가 교사는 이를 방법, 그것들을 되돌리는 방법, 인식했던 방법, 등에 관해서 언급해야 한다.

“알고리즘”은 책임을 일시에 명확하게 분할해 준다는 의미에서 막힌 것을 말소하고 교수학적 갈등을 풀어주는 도구가 된다. 교사는 알고리즘을 보여주고, 학생은 그것을 배워서 올바르게 적용한다.

교사는 학생들이 동일한 교사의 모든 지시를 문제 해결의 효과적인 방법(알고리즘과 같이)으로

심지어는 그런 것을 처리하면서도 남겨져 있어야 할 본질은 다루지 않은 채 학생들의 탐색을 북돋고 격려하고 도왔던 그러한 방법에서 교사가 택했던 지시조차도 받아들일 것이라는 사실을 알고 있어야 하다.

본질적으로는 자기성찰에 기초한 이러한 문제 해결의 기술로 교사는 학생들이 알고리즘을 기대하는 동안 해결책을 발견하는 방법을 배우게 하고 싶을 것이다.

교사가 전형적인 탐구를 위한 기회로 학생들에게 제시하고 싶어 하는 것은 단지 그 해결 방법이 발견술로 이미 알려져 있고 항목화 되어 있는 문제를 모아놓은 문화적 대상의 집합체일 뿐이다. 그러므로 학생들이 마치 그것이 지식인 양 아무렇게나 문제들을 받아들이는 것도 정당화된다. 발견술은 문제 해결의 방법이 선택되어야 하는 것으로 정리나 이론과 나란히 위치를 차지하게 된다. 이것은 일종의 반복되는 발견술적 이동을 고무하는 즉 수학적 문제 해결 보다는 발견술 자체가 목적이 되는 메타인지적 이동 현상이 일어날 수 있다. (Brousseau, 1997, 37-40).

메타-인지적 이동이란 교사의 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식 그 자체로부터 그가 만들 교수학적 고안으로 이동한 것을 말한다.

그 예로 미국의 종합 학교 수학 프로그램 Comprehensive School Mathematics Program (CSMP)(Howson, Keitel, & Kilpatrick, 1981)에 나오는 코끼리 엘리의 이야기에서는, 교사의 교수학적 관심이 수학적 지식 (음의 정수의 개념)으로부터 교수학적 고안 ("마술 콩"을 나타내는 기호 "[~]", 음의 정수를 나타내기 위함)으로 이동되었다.

즉 음의 정수의 개념을 도입하기 위하여 가상적 상황 ("마술 콩이 보통 콩을 만나면 둘 다 사라진다")이 소개되고, "5+[~]5=0" 또는 "7+[~]4-3"과 같은 표기 방법에 대해 연습하게 된다. 전문적인 용어인 '음의 정수'는 전혀 사용되지 않는다.

메타-인지적 이동은 학생의 개인화/배경화의 과정을 용이하게 하는데 유리한 반면, 학생의 수학을 수학자의 수학과는 사뭇 다른 형태로 이끌 수 있다

나. 여러 가지 사례연구를 통하여 분석한 메타-인지적 이동

1) 박선화(1998)에 따르면 극한의 과정 및 극한 개념의 유용성을 잘 보여주고 극한에 대한 심상을 심어주기 위해 활용할 수 있는 자료로서 컴퓨터 그래픽을 이용한 프랙탈 그림을 들 수 있다고 하였다.

이는 학생들이 극한 과정을 시각적으로 확인할 수 있으므로 학생들의 마음속에 함수가 점점 더 많이 시행될수록 점점 더 어떤 대상에 가까워진다고 하는 극한과정에 대한 심상이 쉽게 형성될 수 있다는 것이다. 그러나 프랙탈의 구성 과정에 너무 집중하다 보면 학생들이 극한 과정에만 초점을 두게하고 그것의 최종 결과에는 주목하지 못하게 할 수도 있다.

이는 결국 학생들에게 목표로 하는 수학적 지식을 획득하는 대신에 그가 극한의 개념의 이해를 쉽게 하기 위해 도입했던 프렉탈에 집중하게 함으로써 교수학적 고안물에 집중하게 하는 메타-인지

적 이동이라는 극단적 교수현상을 만들어 낼 수 있다.

2) 이경화(1996)는 확률 개념의 교육에 컴퓨터를 이용할 경우에도 그 현상이 발생하는데 교사도 학생도 컴퓨터라는 도구를 이용해야 하기 때문에 컴퓨터의 구조와 특성이 확률개념보다 관심의 대상이 될 수 있다. 대개의 경우 컴퓨터는 빈도적 관점을 보다 의미롭게 다루기 위하여 도입되는데 경험적 자료를 보다 풍부하게 얻도록 하기 위하여 사용된다.

예를 들어 주사위 1000번 던진 결과를 단시간에 확인할 수 있게 한다. 컴퓨터의 장단점을 이해하고 컴퓨터가 포함된 환경에서의 교사와 학생의 역할을 잘 통제할 수 있다면 메타-인지 이동현상을 감소시킬 수 있을 것이다.

3) 이경화(2003)가 다음에 제시한 예들은 풀이 방법에 대한 부연 설명에서 드러난 간단한 메타 인지 이동의 예이다.

교사 읊의 수업에서 '일렬로 배열하는 방법은 전형적인 순열 문제인데, 중학교 과정에서는 수형도로 이에 대해 설명해 준다. 일렬로 배열하는 방법을 순열 공식으로 알려 줄 수는 없고, 수형도 보다는 쉽게 풀이를 가능하게 하는 방법을 알려 주려고 교사는 결국 순열의 초보적인 수준에서의 계산법을 가르친다.

학생들 대부분은 교사가 옳은 것을 가르쳐준다는 믿음을 가지고 있기 때문에 교사가 제공하는 방법을 그대로 받아들인다. 교사는 학생들이 자신의 방법을 그대로 받아들임을 확인하기 위해 풀이 방법의 설명을 요구하고 학생들은 비슷한 설명을 풀이에 대한 타당한 설명으로 생각하게 된다.

그러나 이 부분을 자세히 살펴보면 풀이 방법의 설명이 대부분 교사에 의해 지도된 교수학적 고안 그 자체에 집중하고 있음을 알 수 있다. 왜 그렇게 푸는가에 대한 자신의 생각은 전혀 볼 수 없고, 교사에 의해 강조되고 고안된 특정 방법을 설명하는 것이다.

4) 이희선(2006)의 연구인 함수 단원의 도입 활동은 학습자들에게 함수의 개념을 이해시키기 위한 것이다. 그러나 집합 사이의 관계를 직관적으로 다루기 위한 수단으로 도입 된 Venn-Euler 다이어그램이 초등수학에서 지도 목적이 된 것처럼, 정비례 관계를 직관적으로 다루기 위한 대응표의 빙칸을 채우는 것이 평가의 수단이 됨으로써 학습 목표가 될 수 있다.

이러한 메타-인지적 이동 현상은 주로 추상적인 개념이나 학생들이 일상생활에서 경험해 보지 못한 개념을 설명하기 위해 교사가 고민하는 과정에서 일어날 수 있다.

수학 지식에서의 본질적인 내용에서 자료를 찾아내는 것이 아니라 학생들의 생활 경험지식이나 친숙한 용어를 활용하는 것을 지나치게 고려하여 교사 스스로가 만들어 낸 설명에 의존하는 것이다.

이러한 쉽게 설명하고자 하는 교사의 전략들은 비현실적이거나 부적절하여 종종 지식의 올바른 전달을 저해하는 원인이 된다.

4. 형식적 고착 (formal abidance)

가. 형식적 고착의 뜻

형식적 고착은 수학적 지식의 전달에서 개인화/배경화의 중요성을 과소평가하여 이를 간과하고 논리적, 형식적으로 표현된 수학적 지식을 곧바로 제시하는 현상이다.

형식적 고착은 공식화된 지식의 논리적 표현으로서, 메타-인지적 전략을 무시하고 지식의 은유적 사용을 억제하려는 시도이다. 이것은 브루소(1986)에 의하여 메타-수학적 이동이라고 불리워진 바 있다.

교수학적 상황론의 관점에서 볼 때 현재 우리나라의 수학 학습 지도는 ‘제도화’가 주를 이루고 있고 ‘형식화’와 ‘타당화’ 단계가 미흡한 실정인 것으로 보인다. 이전 단계가 생략된 상태에서의 제도화는 학생들이 수학적 지식을 제대로 내면화하게 만들지 못하며 형식적 고착으로 퇴행할 가능성이 높다

Rash (1975)에 따르면 그 전형적인 예는 유틀리드 원본이나 그와 유사한 것에서 볼 수 있는 수학적 지식의 연역적 표현이다. 19세기 미국에서 발행된 Olney의 교과서에서는 일반적 법칙이 먼저 소개되고 난 후 예제가 주어진다. 예를 들어 $(a+b)^m$ 에 대한 이항공식이 주어지고 난 후 $(x+y)^5$ 이나 $(x+y)^{-4}$ 과 같은 특수한 경우의 전개 방법이 설명된다. (강완, 1990, p. 38에서 재인용)

즉 이항공식을 이해한다는 것은 일반적 법칙을 특수한 경우에 논리적으로 적용한다는 것을 의미한다. 이러한 교과서에서 저자의 노력이란 곧 수학적 법칙이 적용되는 논리적 과정을 상세히 하는 것이다.

현재의 예는 미국 일리노이 대학교 학교수학위원회 University of Illinois Committee on school Mathematics (UICSM)에서 낸 교과서에서 볼 수 있는데 이 위원회의 목표는 여러 대학의 편익을 위하여 학교수학과 대학수학의 간격을 좁히는데 도움이 되고 보다 우수한 수학자 세대를 확보하고자 대학 진학 준비 학생들의 수학교육을 개선하는데 있었다 (Hawson, Keitel, & Kilpatrick, 1981, pp. 132-138). UICSM의 교재의 한 곳에는 실수의 여러 원리가 축약된 이름과 각 원리의 패턴과 함께 나열된다. 몇가지 예를 들면

(1) The Associative Principle for Addition

$$(\underline{\quad} + \underline{\quad}) + \dots = \underline{\quad} + (\underline{\quad} + \dots)$$

(2) The Twist Principle

$$(\underline{\quad} + \underline{\quad}) + (\dots + \underline{\quad}) = (\underline{\quad} + \dots) + (\underline{\quad} + \underline{\quad})$$

(3) The Left Distributive Principle for Multiplication over Addition

$$\dots \bullet (\underline{\quad} + \underline{\quad}) = (\dots + \underline{\quad}) + (\dots + \underline{\quad})$$

(4) The Principle for Multiplying by +1

$$\underline{\quad} \bullet +1 = \underline{\quad}$$

즉, 각 원리들의 의미가 매우 형식적인 방법으로 압축되어 있음을 알 수 있다. 형식적 고착은 학생

들로 하여금 수학적 활동이 가진 귀납적 성격을 이해하는데 도움이 되지 않을 수 있으나, 탈개인화/탈배경화의 과정에서의 어려움을 줄여줄 수는 있다.

나. 여러 가지 사례연구를 통하여 분석한 형식적 고착

1) 이경화 논문(1996)은 ‘원탁의 문제의 경우 무조건 인원수를 일렬로 배열하고 인원수로 나누면 된다’라는 설명은 배경화/개인화를 통하여 다루어진 지식이 과도하게 단순화되어 탈배경화/탈개인화되는 것을 보여준다고 하였다. 이는 과정을 무시한채 결과만을 암기하게 하는 형식적 고착의 한 형태이다.

또 한 예로 확률교육에서의 전형적인 예는 순열과 조합, 이항 정리등에 관한 일반적인 표현을 제시하고 학생들로 하여금 그 기호의 사용을 연습하도록 하는 것이다.

이 현상은 입시 위주나 단순 암기 위주의 수업의 결과로 나타나는데 이러한 상황에서 교사는 교과 내용 전달을 위해 구조화하고 간결한 형태의 판서하기와 반복적인 설명을 통한 각인 전략을 취하게 된다. 수학적 사실과 개념 및 일반화는 따로 분리되어 있는 것이 아니고 서로간에 관계를 형성하며 학습될 때 개념 변화가 이루어질 수 있다. 그런데 실제 수업에서 사실과 개념에 기초하여 단계적으로 일반화된 지식으로 발전시켜가면서 가르치는 것이 아니라 사실과 개념을 도외시하고 최종적인 결과라고 할 수 있는 일반화만을 지나치게 강조한 결과 학생들은 잘못된 일반화를 학습하게 된다.

이경화가 제시하였던 원탁에 앉히는 방법의 수를 구하는 문제를 설명할 때 교사는 반복적으로 인원수만 바꾸어서 연습을 시키고 학생들은 기계적으로 계산 공식에 대입하여 계산하는 현상이 있었다.

교사가 확률 단원에서 어렵다고 하는 문제를 설명할 때는 이와 같이 하는 경우가 많다. 학생들은 계산 방법이 간단하기 때문에 원탁 문제를 해결하는 것처럼 행동하지만 사실상 원탁에 안지는 방법의 의미를 전혀 생각하지 않고 계산 공식에 대입하여 교사가 원하는 답을 말할 수 있게 된다. 학생들은 문제집을 풀거나 집에서 과제를 풀이할 때, 원탁에 앉히는 방법의 의미를 생각하기보다는 교사가 어떤 방법을 가르쳐주었던가를 기억하려고 한다.

이러한 현상은 확률교육의 핵심적인 문제점을 드러내고 있다. 의미를 생각하지 않고 기계적인 계산에 치중한다는 것은 다른 수학의 분야에서도 제기되는 바이지만, 문장체 형태로 제시되는 확률 문제의 경우 계산을 간단하고 유형은 복잡하기 때문에 문장체로 제시됨에도 불구하고 문제를 이해하기보다는 유형과 풀이 방법을 암기하는 것이 훨씬 효과적이라고 생각하는 경향이 있다.

위의 과정들을 살펴보면 형식적 고착과 토파즈 효과와 동시에 나타나는 경우라 볼 수 있다.

2) 박선화(1998)에 따르면 극한 개념의 지도에 있어서 극한 개념이 포함하고 있는 무한개념은 교사들도 명확히 이해하지 못하거나 학생들에게 설명하는 데에 많은 곤란을 겪는 경우가 적지 않다고 생각된다.

몇몇 교사들은 $0.999\cdots=1$ 임을 인정하면서도 그것을 명확하게 설명하지 못하였고, 그냥 무한급수의 합의 정의에 따라 부분합의 극한으로서 받아들이도록 지도한다고 말하였으며, 또한 극한값 계산법칙을 이용한 극한값 계산의 경우에는 계산 알고리즘만 가르칠 뿐 왜 그러한 알고리즘이 적절한지 그것이 왜 필요한지 설명해주지 않는다고 하였다.

또한 교사들은 대부분 교과서의 지식을 순서대로 그대로 전달하는 데에 치중할 뿐 그것을 재조직하거나 재구성하여 전달하지 않음으로써 교과서의 연역적인 제시방식이 수업에서도 그대로 유지되고 있다. 이러한 연역적 제시 방식은 학생들에게 이유나 의문을 갖지 못하게 하고, 수동적으로 지식을 받아들이도록 강요한다.

위의 결과들을 분석하여 보면 교사는 자신에게 확실하지 않은 수학적 지식이나 학생들에게 설명을 하기가 부적절할 때 형식적인 알고리즘에 의해 가르치려는 경향이 있는데 극한의 개념의 경우에 교사의 형식적 고착과 같은 극단적 교수 현상이 자주 드러남을 알 수 있다.

3) 우호식(2001)에 따르면 수학 교과 내에서 정의 속에 함축되어 있는 개념이 유의미하게 이해되지 않은 채 학생들 사고 속에서 개념의 즉각적인 암기로서 그나마 단기적 활용에는 가능하지만 활용 후에는 곧바로 잊어버리게 된다는 사실을 감안 할 때 개념에 대한 일시적으로 분석된 사항과 기억들은 당연히 학생들에게 두렵고 생소한 것일 뿐이다.

이를 Skemp와 연결하여 생각하여 보면 수학적 개념이나 지식에 대해 학생들에게 도구적 이해를 통해 제공한다면 이는 형식적 고착이라는 극단적 교수현상을 유발 할 수도 있을 것이다.

4) 이희선(2006)에 의하면 ' y 는 x 에 정비례한다'가 곧 $y = ax$ 꼴로 표현됨을 반복 학습시킨다. 이 때, a 의 값을 비례상수라고 지칭하지 않는다.

분석 교과서 대부분이 도입 활동 결과를 표로 나타나게 하거나 <그림 II-6>과 같이 표의 빈칸을 채우는 문제를 제시함으로써 단순 계산의 반복 학습을 통해 정비례, 반비례 관계를 암기하도록 구성되어 있다.



동호는 1000원짜리 지폐를 500원짜리 동전 2개로 교환해 주는 동전교환기에서 1000원짜리 지폐 10장을 500원짜리 동전으로 교환해 보고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

① 1000원짜리 지폐의 장수가 다음 표와 같을 때, 교환한 500원짜리 동전의 개수를 구하여 표를 완성하여 보자.

1000원짜리 지폐(장)	1	2	3	4	...	10
500원짜리 동전(개)						

<그림 II-6> 교과서 탐구활동

함수적 사고란 함수의 정의나 함수 공식을 암기하는 것이 아니라 어떠한 변수들 간의 상호 관련성을 찾아내고 그것을 공식화 할 수 있는 능력이다. 빙칸 채우기 같은 단순 계산에 의해 결과를 유도할 수 있는 교과서의 구성은 학습자의 활동에 초점을 맞춘 게 7차 교육과정에 맞지 않는 것이라 할 수 있다.

5) 허학도(2006)의 연구에 따르면 직사각형 넓이 공식에 대해 대부분의 학생들은 ‘가로’×‘세로’가 직사각형의 넓이라는 것을 거부하지 않는다. 오히려 문제는 학생들이 그것을 당연하게 받아들인다는 점이다.

당연해 보이는 만큼 넓이 계산은 기계적인 주어진 수를 공식에 대입하는 것을 직사각형의 넓이 공식을 이해한다(김부봉, 2000; 이경화, 2001; 이정욱, 이혜원, 2004; Jamski, 1978; Reys, Suydam, Lindquist, & Smirith, 1999; Schifer & Szymaszda, 2003; 재인용 허학도, 2006).

직사각형의 넓이 공식을 ‘정의’로 가르친다면 교육과정상의 깔끔한 출발점이 될지는 모르겠지만, 이러한 ‘정의’는 그 이면에 담겨 있는 비례, 측정, 넓이의 보존성, 가법성, 승법성, 실수의 정의와 성질, 수체계의 곱의 연산, 극한의 개념, 공간에 대한 수학적 정의 등을 모두 무시한 알맹이가 빠진 단순한 정의에 지나지 않는다.

위의 내용을 Rousseau의 교수 현상에 비추어 보면 복잡한 모든 절차를 제외하고 학생들에게 오직 수학적 지식이나 개념의 결과만을 제시하여 Skemp의 경우처럼 도구적으로 이해하는 형식적 고착에 빠지기 쉽다.

따라서 이러한 극단교수에서 빠져 나오기 위해서는 직사각형의 넓이 공식은 학생의 지식 수준에 따른 단계적이 이해를 요구하며 교과과정 역시 이러한 이해 수준에 맞게 구성되어야 한다. 이를 위해서 우선 직사각형 넓이 공식의 이해에 대한 분석이 요구된다. 다시 말해 직사각형 넓이 공식의 이해를 위해 교과과정 구성과 바람직한 학습-지도를 위해서는 무엇보다 넓이에 대한 개념적 분석을 바탕으로 역사적인 분석과 교과구성에 대한 분석, 그리고 실제 직사각형 넓이 공식에 대한 학생들의 이해에 대한 조사를 결합해야 한다.(직사각형 넓이를 수학적 개념으로 바꾸기)

이상으로 수학수업에서 나타나는 여러 가지 유형의 극단적인 교수현상에 대해 살펴보았다. 이들은 서로 배타적인 것이 아니며, 하나의 상황에 두 가지 이상의 현상이 겹쳐서 발생하기도 한다.

이러한 극단적인 교수현상들이 실제 수업에서 자주 일어나는 일은 아니며 치명적인 오류를 범한다고 말할 수 없을지도 모른다. 또한 그러한 현상을 일으키는 원인을 완전히 제거한다는 것도 현실적으로 거의 불가능한 일일 것이다. 그럼에도 불구하고 이러한 현상을 분석해 보는 이유는 이러한 분석이 교사 자신들의 수업에 대해 보다 더 의식적으로 임하게 하고 수업에 대한 통찰력을 제공하리라고 보기 때문이다.

이상에서 고찰하여 본 극단적 교수현상에 대해 강완(1990)은 다음과 같이 이야기 하였다.

혹자는 이들 네가지 현상이 어쩔 수 없는 극단적인 것 들이라고 주장할 수 있다. 이들 현상은 교사나 교과서 저자가 지식의 의미와 그 표현형식 양쪽을 고루 고려하고자 할 때 생기는 어려움을 나타낸다. 극단적 교수학적 현상이 잠재해 있음에도 불구하고 학교 수학의 교과서 저자들은 지식을 병적으로 사용한다고 보여지지 않았다. 그들은 교수학적 현상을 고려하여 중립적 입장을 견지했다. 한편 그러한 태도는 교실에서 교과서를 사용하는 일이 제한적임을 나타내기도 한다. 예를 들어 비록 지식을 극단적인 병적 형태로 변환시킬 수도 있겠지만 교사는 교과서 저자보다 자유롭게 때로는 보다 효과적으로 직사각형 그림들을 사용해서 다항식의 전개공식을 설명할 수도 있다. 이러한 교과서 사용의 한계는 교과서에 이어 교실에서의 수학적 지식의 교수학적 변환에 대한 연구가 필요함을 말해준다. (p. 35)

III. 결론 및 제언

본 연구에서는 교수 실제에서 교사들에 의해 나타나는 극단적인 교수 현상이 자주 나타나는 환경과 유형에 대하여 살펴보았다.

교사들은 수학적인 여러 가지 지식이나 현상을 설명하는데 학생의 문제 해결에 도움을 준다는 이유로 발견술이라는 입장에서 발문을 통한 과다한 힌트의 제공으로 학생들에게 문제 해결의 실마리를 제공할 수 있는 토파즈 효과를 유발하기도 하였고, 가르칠 지식의 부담감으로 목표가 되는 수학적 지식에서 교구에 관심을 돌리게 하는 메타-인지적 이동을 발생시키기도 하였으며, 가르키는데 대한 부담감으로 형식적 고착이나 죠르단 효과와 같은 극단적 교수현상을 보이기도 하였다.

본 연구자가 생각하기에 극단적 교수 현상을 위의 4가지만으로 구분 짓는다는 것은 많은 무리가 따른다고 본다. 이 예들 이외에도 우선은 교사의 수학적 지식에 대한 그릇된 관념으로 학생들의 표상에 저해가 된다면 이는 어떠한 교수 극단적 현상이라 이름지어야 할까?

물론 모든 부정적 상황이 극단적 교수현상을 불러 일으키는 것은 아니지만 교사의 잘못된 지식이 내재된 교수학적 변환은 그릇된 결과를 불러 올 것임은 자명하다.

어떤 의미에서 이러한 극단적 교수현상의 발생을 어느 선까지 극단적 교수현상으로 보고 어느 선에서는 아니라고 보아야 하는지 애매한 경우가 많다.

특히 교과서의 힌트 부분을 토파즈 효과라는 이름으로 많이 이야기 하는데 힌트라는 구성 자체가 항상 토파즈 효과를 불러일으킨다는 오해를 가질 수도 있고, 심지어 Brousseau가 제안하는 게임을 통한 교수학적 상황 자체도 자칫하면 방법인 게임 자체가 목적이 되어 메타-인지적 이동을 일으킬 수 있다.

결국 극단적 교수학적 현상을 극복할 수 있는 방법은 교사의 수학에 대한 올바른 신념과 수학적 지식에 대한 철저한 이해가 잠재해 있는 교수학적 변환이라 볼 수 있다. 이를 위해 본 연구자는 두 가지 정도의 제안을 한다.

극단적 교수현상을 극복하기 위한 방법 중 하나는 교수학적 상황론에 입각하여 수학적 개념이 살아서 기능하는 많은 교수학적 상황을 개발하여야 한다는 것이다.

그리고 마지막으로 잘못된 교수학적 변환을 조금이나마 극복할 수 있는 방법으로 ATD³⁾를 제안하는 바이다. ATD라는 새로운 용어는 이제 교수학적 변환론의 발전된 모습으로 수학에서 유용하게 쓰일 듯 싶다. ATD에 대한 자세한 논의는 후속 연구로 남겨둘 것이다.

수학 수업에서 발생하는 극단적 교수현상에 대해 다룬 본 연구는 현장 교사들이 수학내용의 교수학적 변환 경험들을 공유할 수 있고 극단적으로 이루어지는 교수 현상에 대해 교사 스스로 자신의 수업을 반성하는 데에 기준 역할을 할 수 있을 것이며, 나아가 보다 나은 교수학적 상황을 고민하기 위한 자료를 제공함으로써 수업 상황에 대한 정확한 이해를 통해 수학 교사들의 교실 수업 개선에 실질적으로 도움이 되는 자료가 될 것이다.

ATD와 더불어 실제로 교실 수업을 분석한 후 수학 교사의 지도와 학생의 학습에서의 발생하는 문제점이나 개념형성, 절차의 이해에 대한 분석과 비교 연구 등은 후속연구로서 다룰 것이다.

참 고 문 헌

- 강 완 (2001). 원의 넓이 공식에 대한 교수학적 변환 분석. 과학과 수학교육 논문집, 27, pp.37-68.
- 김미월 (2001). 고등학교 수학교사의 수학 및 교수-학습에 대한 신념과 교수 실제의 관계 연구. 한국 교원대학교 대학원 박사학위 논문.
- 김민정 (2002). 지리수업에서의 교수학적 변화에 근거한 극단적 교수현상 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.
- 김요한 (2007). 초등학교 수학 교사의 교수학적 변화에 관한 연구. 청주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 박선화 (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
- 박지용 (2002). 수학 수업에서 교사에 의한 교수학적 변화 연구. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.
- 방정숙 (2002). 수학교사의 교수방법에 영향을 미치는 요소에 관한 소고. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 41(3), pp.257-271.
- 변희현 (2005). 소수 개념의 교수학적 분석. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
- 오영열 (2003). 초등교사의 수학과 수업 개선 의지의 예측과 이해. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 13(3), pp.267-286.
- 우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

3) ATD(The Anthropological Theory of Didactics), 교수학의 인류학적 이론에서 ATD는 Bosch, M, Chevallard, Y, Gascón, J.의 "Science or Magic? The Use of Models and Theories in Didactics of Mathematics."에서 나온 용어로 이는 교수학적 변환론(Chevallard, 1985, 1992)에 대한 발전된 형태라고 볼 수 있다. 그러나 이미 1999년 스페인 중등학에서 함수의 극한과 연속성에 대한 가르쳐지는 수학적 지식을 분석하면서 사용되었던 용어이다.

- 우정호 · 변희현 (2005). 소수 개념의 교수학적 분석. 대한수학교육학회지 수학교육연구회, 15(3), pp.287-313.
- 우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈 (2006). 수학교육학 연구방법론. 서울: 경문사.
- 이경화 (1993). 학교 수학의 교수학적 변화에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.
- 이경화 (1996). 확률 개념의 교수학적 변화에 관한 연구. 서울대학교 박사학위 논문.
- 이종욱 (2005). 분수에 대한 교사 지식의 변화에 관한 연구. 한국교원대학교 박사학위 논문.
- 이희선 (2006). Brousseau의 교수학적 상황론에 입각한 함수 지도의 상황 구성. 서강대학교 교육대학원 석사학위 논문.
- 조완영 (2000). 수학적 문제 해결 지도에 대한 교사의 인식과 지도의 실제 조사. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 4(1), pp.51-61
- 한길준 · 우호식 (2001). 고등 수학 개념의 올바른 이해를 위한 유의미한 교수법 탐색. 한국수학교육 학회지 시리즈 A <수학교육>, 40(2), pp.241-252.
- 허학도 (2006). 직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.
- Bosch, M; Chevallard, Y. & Gascón, J. (2005). *Science or Magic? The Use of Models and Theories in Didactics of Mathematics*. Winslow, C.(Ed.), .Didactics of Mathematics - The French Way. Ed. University of Copenhagen.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situation in Mathematics*. Didactique des mathématiques. in Balacheff, N; Cooper, M; Sutherland, R & Warfield, V. (Eds.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Hofe, R. V; Knipping C; Mariotti, M. A. & Pedemonte B. (2003). Thematic Working Group 4: Argumentation and Proof. *European Research in Mathematics Education III*. European Society for Research in Mathematics Education.
- Kang, W. (1990). *Didactic Transposition of Mathematical Knowledge in Textbook*, Doctorial Dissertation, Athens: University of Georgia.
- Nara Linden. (2002). *Special Educational Needs in Mathematics-A problem Developed in School*. In Goodchild, S. & English L. (Eds.) *Researching Mathematics Classroom*. pp.68-89.

Review on the Extreme Didactic Phenomena in the Mathematical Class

Kim, Bu-yoon

Dept. of Mathematics Education, Pusan National University, 609-735, Korea

E-mail : kimby@puaan.ac.kr

Jung Gyeong Mee

103 Dong 1102 Ho Kyungnam APT. Jwa-Dong Haeunda-Gu, Busan Korea

E-mail : jgmbada@hanmir.com

The extreme didactic phenomena that occur by ignoring or overemphasizing the process of personalization/contextualization, depersonalization/decontextualization of mathematical knowledge is always in our teaching practice and in fact, seems to be a kind of phenomena that suppress teachers psychologically or didactically. The study of the problems on error, misconception or obstacles revealed by students has been done continuously, but that of the extreme didactic phenomena revealed by teachers has not.

In this study, I will explain four extreme didactic phenomena and help you understand them by giving various examples from several case studies and analyzing them. And also, I will discuss the way to overcome the extreme didactic phenomena in the mathematical class, based on this analysis.

This thesis will become a standard of didactic phenomena that are proceeded extremely by having teachers reconsider their own classes and furthermore, will offer the research data for considering better didactic situation.

* ZDM Classification : C79

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90

* Key Words : The extreme didactic phenomena, topaze effect, jordan effect, meta-cognitive shift, formal abidance