韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 21집 제 3호, 2007. 9. 385-406

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 21, No. 3, Sep. 2007. 385-406

삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질 탐구

김 경 선 (창원봉림고등학교)
한 인 기 (경상대학교)

본 연구에서는 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질을 증명하기 위해 바탕문제들을 추출하고, 바탕문제를 중심으로 삼각형의 방접원에 관련된 성질들을 체계화하고 증명하며, 삼각형의 방접원의 다양한 성질을 사면체로 유추하여 방접구의 성질을 추측, 증명하였다.

1. 서 론

교육부(1999, p.61)에 의하면 '도형 영역에서는 자연 현상이나 실생활의 상황을 통해 평면과 공간의 개념을 직관적으로 이해하고, 평면이나 공간에서의 기하학적 도형에 관한 기본적인 사실의 이해는 중요하며, 연역적 추론 방법은 다른 어떤 영역보다도 기하 영역에서 적절하며 효과적이다'라고 규정하고 있다. 즉, 학교수학의 도형영역은 평면과 공간 개념의 이해 뿐만 아니라, 연역적 추론을 통해 논리적 사고력을 신장시키는데 중요한 역할을 한다는 것을 강조하였다. 특히, 논증적인 방법에 의한 기하학 탐구는 학생들의 논리적 사고력과 연역적 추론능력을 신장시키고 반성적 사고능력을 기르는데 중요한 역할을 한다고 할 수 있다.

중등학교 교육과정에서 논증적인 방법에 의한 기하학 탐구는 주로 중학교에서 다루어지며, 삼각형, 사각형, 원 등의 도형에 대한 다양한 성질의 탐구가 이루어지고 있다. 특히, 삼각형에 관련된 다양한 성질들은 평면도형 및 공간도형의 탐구에 있어 중요한 도구가 되기 때문에, 삼각형의 다양한 성질 탐구에 관련된 다양한 측면의 수학교수학적 연구가 필요하다.

삼각형에는 흔히 오심이라고 불리는 내심, 외심, 무게중심, 수심, 방심이 있으며, 삼각형의 오심에 관련된 많은 성질들이 탐구되고 있다. 오심 중에 내심과 방심은 일정한 관련성을 가진다. 즉, 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선들의 교점이고, 방심은 한 내각과 두 외각의 이등분선의 교점으로, 내심과 방심 모두 각의 이등분선에 관련된 유사한 측면들이 많이 있다. 그럼에도 불구하고, 6차 수학과 교육과정에서는 이들 오심을 모두 다루다가, 7차 교육과정 개정에서 수심과 방심, 특히 방심을 삭제한 것은 수학적 지식들 사이의 관련성이라는 측면에서는 아쉬움이 있다. 본 연구에서는 삼각형의 방

* ZDM 분류 : E54
* MSC2000 분류 : 97C90
* 주제어 : 삼각형의 방접원, 사면체의 방접구, 유추, 문제해결

접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질들을 논증적인 방법으로 증명할 것이다.

삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 국내의 연구들을 살펴보면, 한인기 · 에르든예프(2005)는 유추를 바탕으로 삼각형의 방접원과 사면체의 방접구에 대한 몇몇 성질들을 제시하였으며, 민수분(2005)은 사면체의 방접구의 존재성에 대한 증명을 제시하였고, 유익승 · 한인기 · 신현용(2006)는 피타고라스의 정리, 헤론의 공식, 코사인 정리 등을 방접원의 반지름으로 표현하는 식을 유도하였다. 이들 연구를 통해, 사면체의 방접구의 존재성에 대한 평이한 증명, 삼각형의 방접원과 사면체의 방접구 사이의 관계, 방접원에 관련된 몇몇 새로운 등식의 발명이 이루어졌다는 것은 교육적으로 매우 의미롭다고 할 수 있다. 그러나 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구의 다양한 성질에 대한 폭넓은 연구는 아직 이루어지지 않았다.

본 연구에서는 삼각형의 방접원에 관련된 다양한 성질들을 탐구하고, 이들 성질을 사면체로 유추하여 사면체의 방접구에 관련된 성질들을 탐구할 것이다. 이를 위해, 첫째 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질을 증명하는데 바탕이 되는 성질(바탕문제)들을 추출하고, 둘째 바탕문제를 중심으로 삼각형의 방접원에 관련된 성질들을 체계화하고 증명하며, 셋째 삼각형의 방접원의 다양한 성질을 사면체로 유추하여 방접구의 성질을 추측, 증명할 것이다. 본 연구를 통해, 삼각형의 방접원에 관련된 다양한 성질들이 체계적으로 정리되고, 사면체의 방접구에 대한 새로운 성질들이 밝혀질 것으로 기대된다.

2. 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구의 성질 탐구를 위한 바탕문제들

수학은 실용성, 추상성, 형식성, 계통성, 직관성과 논리성, 일반화와 특수화와 같은 특성을 가진다. 이들 중에서 계통성에 관련하여 교육부(1999, p.31)는 '수학적 개념의 확장은 어떤 기초적인 내용을 기반으로 하여 그 기반 위에 다른 내용을 더 첨가함으로써 기초적인 내용과 새로운 내용을 일관성 있게 이어 나가면서 이루어진다. 계통성은 학습 내용의 순서를 정할 때 논리적 연결성을 가지고 학습이 단계적으로 이루어지도록 해 주는 것이다'라고 기술하면서, 수학 교과내용이 논리적인 연결성을 가지며 배열될 것을 강조하고 있다.

수학의 특성인 연결성은 수학교육학에서의 체계성 원리와 관련된다. 한인기(2006, p.52)는 '체계성 원리는 획득된 지식을 통일된 체계의 요소로 의식하는 것을 의미한다. 체계성 원리에서는 교사가 학습 내용의 요소들 사이의 긴밀한 관련성 확인, 요소와 구조의 결합 규명, 부분과 전체의 결합 규명을 통해, 학생들의 지식에서 체계성을 달성하도록 할 수 있다. 수학적 지식의 연결성에 관련된 문제들은 체계성과 밀접하게 관련되어 있다. 체계성은 학생들의 지식, 능력, 기능의 계발에서 받침돌이 되며, 새로운 지식과 이전에 획득된 지식 사이의 관계 설정의 바탕이 된다'고 하였다. 즉, 정리들, 문제들, 개념들 사이의 관련성 확인 및 연결성의 구현은 학생들이 획득된 수학적 지식들, 능력들, 기능들을 통일된 체계로 인식하고, 요소들이 상호 결합된 전체로써 이해하는 중요한 도구가 된다는 것을 알

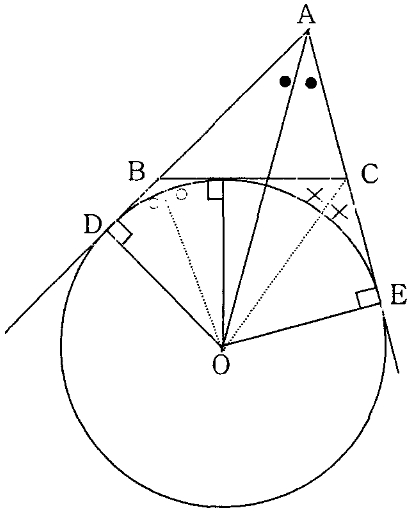
수 있다.

이러한 체계성을 구체적으로 구현하려는 시도의 하나로, Sharygin(1994)은 다른 문제의 해결에 사용되는 수학적 사실이나 문제해결 방법을 포함하고 있는 문제를 바탕문제라 하였고, 이들 문제를 활용하여 해결하는 문제를 응용문제라고 규정하면서, 기하 문제들을 바탕문제-응용문제와 같은 형태로 체계화하였다.

본 연구에서는 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구의 다양한 성질을 체계화시키는 한 방법으로, Sharygin이 주장한 바탕문제의 개념을 이용할 것이다. 이를 위해, 우선 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 성질들과 이들의 해결 방법을 분석하여, 바탕문제들을 추출하였다. 그리고 나서, 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질들을 바탕문제들과 유추의 개념을 이용하여 증명하고, 이들 증명의 논리적인 계통성을 바탕으로 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 성질들을 체계화하였다.

바탕문제 1. 삼각형 ABC의 변 BC의 길이를 a라 하고, BC에 접하는 방접원의 반지름을 r_a라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 S, 둘레의 절반을 p라 하면, $r_a = \dfrac{S}{p-a}$가 성립한다는 것을 증명하여라.

증명. 사각형 $ABOC$의 넓이 S_{ABOC}를 두 가지 방법 $S_{ABC}+S_{BOC}$, $S_{ABO}+S_{ACO}$로 계산하여, 이들을 연립하자(그림 1).



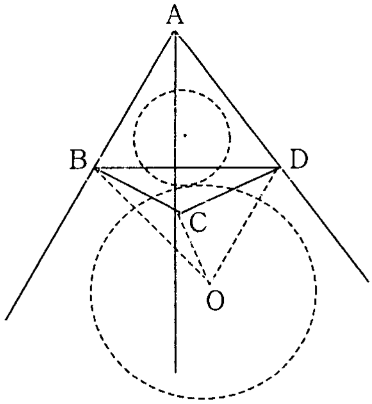
<그림 1>

$S_{ABC}+S_{BOC}=S+\frac{1}{2}ar_a$이고, $S_{ABO}+S_{ACO}=\frac{1}{2}br_a+\frac{1}{2}cr_a$이므로, $S+\frac{1}{2}ar_a=\frac{1}{2}br_a+\frac{1}{2}cr_a$이다. 그러므로 $S=\frac{1}{2}(b+c-a)r_a=\frac{1}{2}(2p-2a)r_a=(p-a)r_a$가 성립한다. 이로부터, 등식 $r_a=\frac{S}{p-a}$가 증명된다. □

삼각형의 방접원의 반지름에 관한 등식인 바탕문제 1은 사면체의 방접구의 반지름에 관한 등식으로 유추될 수 있다. 이때, 삼각형의 넓이는 사면체의 부피로, 삼각형의 둘레의 절반은 사면체의 겉넓이의 합의 절반으로 대응시키면, 다음 바탕문제 2를 얻을 수 있다.

바탕문제 2. 사면체 $ABCD$의 면 BCD에 접하는 방접구의 반지름을 r_A라 하고, 사면체 $ABCD$의 부피를 V라 하자. 사면체 $ABCD$의 겉넓이들의 합의 절반을 P, 면 BCD의 넓이를 S_A라 하면, $r_A=\frac{3V}{2(P-S_A)}$가 성립한다는 것을 증명하여라.

증명. 육면체 $ABCDO$의 부피를 두 가지 방법 $V_{ABCD}+V_{OBCD}$, $V_{ABCO}+V_{ACDO}+V_{ABDO}$로 계산하고(그림 2), 이들을 연립하자.



<그림 2>

면 ABC, ABD, ACD의 넓이를 각각 S_D, S_C, S_B라 하면, $V_{ABCD}+V_{OBCD}=\frac{1}{3}r(S_A+S_B+S_C+S_D)+\frac{1}{3}r_AS_A$가 성립한다. 한편, $V_{ABCO}+V_{ACDO}+V_{ABDO}=\frac{1}{3}r_AS_D+\frac{1}{3}r_AS_B+\frac{1}{3}r_AS_C$이므로, 등식 $\frac{1}{3}r(S_A+S_B+S_C+S_D)+\frac{1}{3}r_AS_A=\frac{1}{3}r_AS_D+\frac{1}{3}r_AS_B+\frac{1}{3}r_AS_C$를 얻을 수 있다. 이 등식을 정리하면,

$V=\frac{1}{3}r_A(-S_A+S_B+S_C+S_D)$, $V=\frac{2}{3}r_A(P-S_A)$를 얻게 된다. 즉, 등식 $r_A=\frac{3V}{2(P-S_A)}$이 성립한다. □

바탕문제 2의 증명과정은 바탕문제 1에 대한 방법유추를 통해 쉽게 얻어질 수 있다. 즉, 바탕문제 1의 증명에서는 사각형의 넓이를 두 가지 방법으로 구하여 이들을 연립하였고, 바탕문제 2의 증명에서는 육면체의 부피를 두 가지 방법으로 구하여 이들을 연립하여, 구하는 등식을 얻었다.

3. 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 성질들의 체계화

본 연구에서는 바탕문제 1을 이용하여, 다음과 같은 삼각형의 방접원에 관련된 몇몇 등식들을 증명하였다. 이들 등식에 대해, 사면체로의 유추가능성을 조사하였다. 얻어진 결과를 바탕으로, 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다른 성질들을 얻을 수 있는가를 연구하였다.

본 연구에서는 삼각형의 방접원에 관련된 다양한 성질들을 간단하게 기술하기 위해, 삼각형 ABC의 넓이를 S, 변 AB, BC, AC의 길이를 각각 c, a, b, 이들 변에 접하는 방접원의 반지름을 각각 r_c, r_a, r_b, 이들 변에 그은 높이를 각각 h_c, h_a, h_b로 나타내고, 둘레의 절반을 p, 내접원의 반지름을 r, 외접원의 반지름을 ρ라 할 것이다. 한편, 사면체에 관련하여서는 사면체 $ABCD$의 부피를 V, 면 ABC, ABD, ACD, BCD의 넓이를 각각 S_D, S_C, S_B, S_A로 나타내고, 이들 면에 접하는 방접구의 반지름을 각각 r_D, r_C, r_B, r_A, 이들 면에 그은 높이를 각각 h_D, h_C, h_B, h_A로 나타내고, 겉넓이들의 합의 절반을 P, 내접구의 반지름을 R이라 할 것이다.

(1) 바탕문제 1로부터 얻어지는 삼각형의 방접원에 관련된 성질들

성질 A. $a=S\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)$

증명. $S=pr$이므로, $\frac{1}{r}=\frac{p}{S}$이 된다. 한편, 바탕문제 1에 의해, $r_a=\frac{S}{p-a}$이다. 그러므로 $\frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S}$이 된다. 따라서 $\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}=\frac{p}{S}-\frac{p-a}{S}=\frac{a}{S}$이고, $a=S\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)$이다. □

성질 B. $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

증명. 바탕문제 1에 의해, $r_a=\frac{S}{p-a}$이므로 $\frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S}$이다. 마찬가지로 $\frac{1}{r_b}=\frac{p-b}{S}$, $\frac{1}{r_c}=\frac{p-c}{S}$이므로, 이들 등식을 더하면 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{S}=\frac{p}{S}$이 얻어진다. 한편, $S=pr$

이므로, 등식 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$이 성립한다. □

성질 C. $\frac{h_a+h_b}{r_c}+\frac{h_b+h_c}{r_a}+\frac{h_c+h_a}{r_b}=6$

증명. 바탕문제 1에 의해, $S=\frac{1}{2}ah_a=r_b(p-b)=r_c(p-c)$이므로 $\frac{h_a}{r_b}=\frac{2(p-a)}{a}$, $\frac{h_a}{r_c}=\frac{2(p-c)}{a}$ 이 된다. 따라서 $\frac{h_a}{r_b}+\frac{h_a}{r_c}=\frac{2a}{a}=2$이다. 같은 방법으로, $\frac{h_b}{r_a}+\frac{h_b}{r_c}=\frac{2b}{b}=2$, $\frac{h_c}{r_a}+\frac{h_c}{r_b}=\frac{2c}{c}=2$임을 알 수 있고, 이들 등식을 서로 더하면, $\frac{h_a+h_b}{r_c}+\frac{h_b+h_c}{r_a}+\frac{h_c+h_a}{r_b}=6$이 성립한다. □

성질 D. $\frac{h_a}{r_a}+\frac{h_b}{r_b}+\frac{h_c}{r_c}\geq 3$

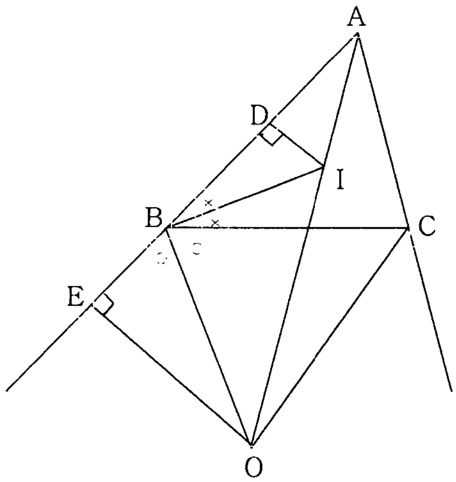
증명. 바탕문제 1에 의해, $S=\frac{1}{2}ah_a=r_a(p-a)$이므로 $\frac{h_a}{r_a}=\frac{2(p-a)}{a}=\frac{2p}{a}-2$이다. 같은 방법으로, $\frac{h_b}{r_b}=\frac{2p}{b}-2$, $\frac{h_c}{r_c}=\frac{2p}{c}-2$임을 알 수 있다. 이제, 이들 등식을 서로 더하면, $\frac{h_a}{r_a}+\frac{h_b}{r_b}+\frac{h_c}{r_c}$ $=2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-6=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-6\geq 3^2-6=3$이 얻어진다. □

성질 E. $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)$

증명. 바탕문제 1에 의해, $\frac{1}{r}=\frac{p}{S}$, $\frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S}$, $\frac{1}{r_b}=\frac{p-b}{S}$, $\frac{1}{r_c}=\frac{p-c}{S}$이 성립한다. 이들을 제곱하여 더하면, $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=\frac{1}{S^2}\{p^2+(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2\}=\frac{a^2+b^2+c^2}{S^2}$이 성립한다. 한편, $\frac{a}{S}=\frac{2}{h_a}$이므로 $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}=4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)$이 증명된다. □

성질 F. $rr_a=(p-b)(p-c)$

증명. 삼각형 ABC의 내심을 I, 변 BC와 접하는 방접원의 중심을 O, I에서 변 AB에 내린 수선의 발을 D, O에서 변 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E라 하자(그림 3).



<그림 3>

I는 내심이므로 $\angle DBI=\frac{\angle B}{2}$이고, O는 방심이므로 $\angle EOB=\frac{\angle B}{2}$이다. 따라서 $\triangle DBI \backsim \triangle EOB$이고, $DB:EO=DI:EB$가 성립한다. 즉, $p-b:r_a=r:p-c$이므로 $rr_a=(p-b)(p-c)$이 성립한다. □

(2) 바탕문제 2로부터 얻어지는 사면체의 방접구에 관련된 성질들

바탕문제 1로부터 얻어지는 삼각형의 방접원에 관련된 몇몇 성질들을 증명하였다. 이들 성질을 사면체로 유추하여, 바탕문제 2를 이용하여 증명하도록 하자. 편의상, 삼각형의 방접원의 성질 A를 사면체로 유추하여 얻어지는 성질을 성질 $f(A)$로 나타낼 것이다.

성질 $f(A)$. $S_A=\frac{3V}{2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right)$

증명. $V=\frac{2}{3}RP$이므로 $\frac{1}{R}=\frac{2P}{3V}$이다. 한편, 바탕문제 2에 의해 $r_A=\frac{3V}{2(P-S_A)}$이므로, 이 등식의 분자와 분모를 바꾸어, 등식 $\frac{1}{R}=\frac{2P}{3V}$로부터 빼면, $\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}=\frac{2P}{3V}-\frac{2(P-S_A)}{3V}=\frac{2S_A}{3V}$을 얻게 된다. 그러므로 $S_A=\frac{3V}{2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right)$이 성립한다. □

성질 $f(B)$. $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}=\frac{2}{R}$

증명. 바탕문제 2에 의해, $r_A=\dfrac{3V}{2(P-S_A)}$이 성립하므로 $\dfrac{1}{r_A}=\dfrac{2(P-S_A)}{3V}$이다. 같은 방법으로, $\dfrac{1}{r_B}=\dfrac{2(P-S_B)}{3V}$, $\dfrac{1}{r_C}=\dfrac{2(P-S_C)}{3V}$, $\dfrac{1}{r_D}=\dfrac{2(P-S_D)}{3V}$임을 알 수 있다. 이들 등식을 서로 더하면, 등식 $\dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}+\dfrac{1}{r_D}=\dfrac{2\{4P-(S_A+S_B+S_C+S_D)\}}{3V}=\dfrac{4P}{3V}$을 얻을 수 있다. 그런데 $3V=2RP$이므로 $\dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}+\dfrac{1}{r_D}=\dfrac{2}{R}$이 성립한다. □

성질 $f(C)$. $\dfrac{h_B+h_C+h_D}{r_A}+\dfrac{h_A+h_C+h_D}{r_B}+\dfrac{h_A+h_B+h_D}{r_C}+\dfrac{h_A+h_B+h_C}{r_D}\geq 24$

증명. $V=\dfrac{2}{3}RP$, $V=\dfrac{1}{3}h_AS_A$이고, 바탕문제 2에 의해 $V=\dfrac{2}{3}r_A(P-S_A)$이므로, 이들을 연립하면, 등식 $\dfrac{h_A}{r_B}=\dfrac{2(P-S_B)}{S_A}$, $\dfrac{h_A}{r_C}=\dfrac{2(P-S_C)}{S_A}$, $\dfrac{h_A}{r_D}=\dfrac{2(P-S_D)}{S_A}$을 얻을 수 있다. 이들 등식을 서로 더하면, $\dfrac{h_A}{r_B}+\dfrac{h_A}{r_C}+\dfrac{h_A}{r_D}=\dfrac{2(P+S_A)}{S_A}=\dfrac{2P}{S_A}+2$가 얻어진다. 같은 방법으로, S_B, S_C, S_D에 대한 등식을 구하면, $\dfrac{h_B}{r_A}+\dfrac{h_B}{r_C}+\dfrac{h_B}{r_D}=\dfrac{2P}{S_B}+2$, $\dfrac{h_C}{r_A}+\dfrac{h_C}{r_B}+\dfrac{h_C}{r_D}=\dfrac{2P}{S_C}+2$, $\dfrac{h_D}{r_A}+\dfrac{h_D}{r_B}+\dfrac{h_D}{r_C}=\dfrac{2P}{S_D}+2$를 얻을 수 있다. 이제, 이들 등식을 서로 더하면, $\dfrac{h_B+h_C+h_D}{r_A}+\dfrac{h_A+h_C+h_D}{r_B}+\dfrac{h_A+h_B+h_D}{r_C}+\dfrac{h_A+h_B+h_C}{r_D}$ $=8+2P\left(\dfrac{1}{S_A}+\dfrac{1}{S_B}+\dfrac{1}{S_C}+\dfrac{1}{S_D}\right)=8+(S_A+S_B+S_C+S_D)\left(\dfrac{1}{S_A}+\dfrac{1}{S_B}+\dfrac{1}{S_C}+\dfrac{1}{S_D}\right)\geq 8+4^2=24$이 증명된다. □

삼각형의 방접원에 대한 성질 C에서는 등식 $\dfrac{h_a+h_b}{r_c}+\dfrac{h_b+h_c}{r_a}+\dfrac{h_c+h_a}{r_b}=6$을 증명하였지만, 본 연구에서는 사면체의 방접구로 이 성질을 유추하면서 사면체의 높이, 방접구의 반지름에 대한 부등식을 얻었다.

성질 $f(D)$. $\dfrac{h_A}{r_A}+\dfrac{h_B}{r_B}+\dfrac{h_C}{r_C}+\dfrac{h_D}{r_D}\geq 8$

증명. $V=\dfrac{1}{3}S_Ah_A$이고, 바탕문제 2에 의해 $V=\dfrac{2}{3}r_A(P-S_A)$이다. 이들을 연립하면, 등식 $\dfrac{h_A}{r_A}=\dfrac{2(P-S_A)}{S_A}=\dfrac{2P}{S_A}-2$을 얻을 수 있다. 같은 방법으로, $\dfrac{h_B}{r_B}=\dfrac{2P}{S_B}-2$, $\dfrac{h_C}{r_C}=\dfrac{2P}{S_C}-2$,

$\frac{h_D}{r_D}=\frac{2P}{S_D}-2$임을 알 수 있다. 이제, 이들 등식을 서로 더하면, $\frac{h_A}{r_A}+\frac{h_B}{r_B}+\frac{h_C}{r_C}+\frac{h_D}{r_D}$ $=2S\left(\frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}\right)-8\geq 4^2-8=8$이 증명된다. □

성질 $f(E)$. $\frac{1}{r_A^2}+\frac{1}{r_B^2}+\frac{1}{r_C^2}+\frac{1}{r_D^2}=4\left(\frac{1}{h_A^2}+\frac{1}{h_B^2}+\frac{1}{h_C^2}+\frac{1}{h_D^2}\right)$

증명. 바탕문제 2에 의해, $\frac{1}{r_A}=\frac{2(P-S_A)}{3V}$이고, 같은 방법으로 $\frac{1}{r_B}$, $\frac{1}{r_C}$, $\frac{1}{r_D}$에 대한 등식을 구하여, 이들을 제곱하여 더하자. 그러면, $\frac{1}{r_A^2}+\frac{1}{r_B^2}+\frac{1}{r_C^2}+\frac{1}{r_D^2}$을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{4}{9V^2}\left\{(P-S_A)^2+(P-S_B)^2+(P-S_C)^2+(P-S_D)^2\right\}&=\frac{4}{9V^2}(S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2)\\&=4\left\{\left(\frac{S_A}{3V}\right)^2+\left(\frac{S_B}{3V}\right)^2+\left(\frac{S_C}{3V}\right)^2+\left(\frac{S_D}{3V}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

한편, $\frac{1}{h_A}=\frac{S_A}{3V}$이므로, $4\left\{\left(\frac{S_A}{3V}\right)^2+\left(\frac{S_B}{3V}\right)^2+\left(\frac{S_C}{3V}\right)^2+\left(\frac{S_D}{3V}\right)^2\right\}=4\left(\frac{1}{h_A^2}+\frac{1}{h_B^2}+\frac{1}{h_C^2}+\frac{1}{h_D^2}\right)$이 증명된다. □

바탕문제들로부터 삼각형의 방접원에 관련된 성질 A, B, C, D, E, F를 증명하였고, 유추를 통해 사면체의 방접구에 관련된 성질 $f(A), f(B), f(C), f(D), f(E)$를 추측하고 증명하였다. 이들 증명된 성질들을 정리하면, <도식 1>을 얻을 수 있다.

성질 A. $a = S\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}\right)$

성질 $f(A)$. $S_A = \frac{3V}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_A}\right)$

성질 B. $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

성질 $f(B)$. $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D} = \frac{2}{R}$

성질 C. $\frac{h_a+h_b}{r_c}+\frac{h_b+h_c}{r_a}+\frac{h_c+h_a}{r_b} = 6$

바탕문제들

$r_a = \frac{S}{p-a}$

$r_A = \frac{3V}{2(P-S_A)}$

성질 $f(C)$. $\frac{h_B+h_C+h_D}{r_A}+\frac{h_A+h_C+h_D}{r_B}+\frac{h_A+h_B+h_D}{r_C}+\frac{h_A+h_B+h_C}{r_D} \geq 24$

성질 D. $\frac{h_a}{r_a}+\frac{h_b}{r_b}+\frac{h_c}{r_c} \geq 3$

성질 $f(D)$. $\frac{h_A}{r_A}+\frac{h_B}{r_B}+\frac{h_C}{r_C}+\frac{h_D}{r_D} \geq 8$

성질 E. $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2} = 4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)$

성질 $f(E)$. $\frac{1}{r_A^2}+\frac{1}{r_B^2}+\frac{1}{r_C^2}+\frac{1}{r_D^2} = 4\left(\frac{1}{h_A^2}+\frac{1}{h_B^2}+\frac{1}{h_C^2}+\frac{1}{h_D^2}\right)$

성질 F. $rr_a = (p-b)(p-c)$

<도식 1> 바탕문제들로부터 얻어진 성질들

(3) 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관한 성질의 탐구

삼각형의 방접원에 관한 성질 A, B, F, 사면체의 방접원의 성질 $f(A)$, $f(B)$를 이용하여, 삼각형의

방접원 및 사면체의 방접구에 대한 다양한 성질들을 증명할 수 있다.

성질 A, 성질 $f(A)$를 이용하여 얻을 수 있는 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 성질을 살펴보자. 성질들 사이의 연결성을 드러내기 위해, 삼각형의 성질 A로부터 얻어지는 성질들을 $A-1$, $A-2$, $A-3$ 등과 같이 표기할 것이며, 삼각형의 성질 $A-1$, $A-2$, $A-3$에 대한 사면체 유추로 얻어지는 성질을 각각 $f(A-1)$, $f(A-2)$, $f(A-3)$ 등과 같이 표기할 것이다.

성질 $A-1$. $\dfrac{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}{r_ar_br_c}=\dfrac{4r\rho}{p^2}$

증명. 성질 A에 의해, $a=S\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}\right)$이고, $S=\dfrac{arr_a}{r_a-r}$이다. 한편, $S=pr$이므로 $\dfrac{arr_a}{r_a-r}=pr$을 얻을 수 있다. 즉, $\dfrac{r_a-r}{r_a}=\dfrac{a}{p}$이고, 같은 방법으로 유사한 등식들을 구하여, 이들을 곱하면 등식 $\dfrac{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}{r_ar_br_c}=\dfrac{a}{p}\cdot\dfrac{b}{p}\cdot\dfrac{c}{p}$을 얻을 수 있다. 한편, 삼각형의 넓이 공식에 의해, $S=\dfrac{abc}{4\rho}$이므로 $\dfrac{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}{r_ar_br_c}=\dfrac{4\rho S}{p^3}=\dfrac{4\rho r}{p^2}$이 성립한다. □

성질 $A-2$. $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}$

증명. 성질 A에 의해, $a=S\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}\right)$이고 $S=\dfrac{1}{2}ah_a$이므로, 이들 식을 연립하면 등식 $\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{2}{h_a}$을 얻을 수 있다. □

성질 $A-2$를 사면체로 유추하면 다음과 같은 성질을 얻을 수 있으며, 성질 $f(A)$를 이용하여 간단하게 증명된다.

성질 $f(A-2)$. $\dfrac{2}{h_A}=\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_A}$

증명. 성질 $f(A)$에 의해 $S_A=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_A}\right)$이 성립하므로, 우변의 $\dfrac{3V}{2}$를 좌변으로 넘기면 구하는 등식 $\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_A}=\dfrac{2S_A}{3V}=\dfrac{2S_A}{S_Ah_A}=\dfrac{2}{h_A}$을 얻을 수 있다. □

성질 $A-3$. $S=\dfrac{(a-b)r_ar_b}{r_a-r_b}$

증명. 성질 A에 의해, $a=S\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}\right)$, $b=S\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_b}\right)$이므로, 첫 번째 등식에서 두 번째 등식을 빼면 $a-b=S\left(\dfrac{1}{r_b}-\dfrac{1}{r_a}\right)=S\left(\dfrac{r_a-r_b}{r_ar_b}\right)$을 얻을 수 있다. 이제, 우변에서 S만을 남기고 이항하면, 구하는 등식 $S=\dfrac{(a-b)r_ar_b}{r_a-r_b}$을 얻게 된다. □

등식 $S=\dfrac{(a-b)r_ar_b}{r_a-r_b}$에 대한 개념유추를 통해, 사면체의 부피, 겉넓이, 방접구의 반지름에 대한 다음 등식을 얻을 수 있으며, 사면체의 성질 $f(A)$를 이용하여 증명할 수 있다.

성질 $f(A-3)$. $V=\dfrac{2(S_A-S_B)r_Ar_B}{3(r_A-r_B)}$

증명. 성질 $f(A)$에 의해 $S_A=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_A}\right)$, $S_B=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_B}\right)$이므로, 첫 번째 등식에서 두 번째 등식을 빼면 $S_A-S_B=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{r_B}-\dfrac{1}{r_A}\right)=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{r_A-r_B}{r_Ar_B}\right)$을 얻을 수 있다. 이로부터, 구하는 등식 $V=\dfrac{2(S_A-S_B)r_Ar_B}{3(r_A-r_B)}$이 증명된다. □

본 연구에서는 성질 A인 등식 $a=S\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}\right)$을 이용하여, 삼각형의 방접원에 관련된 등식 $\dfrac{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}{r_ar_br_c}=\dfrac{4r\rho}{p^2}$, $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}$, $S=\dfrac{(a-b)r_ar_b}{r_a-r_b}$을 증명하였으며, 특히 $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}$, $S=\dfrac{(a-b)r_ar_b}{r_a-r_b}$을 개념유추하여 사면체의 방접구에 대한 성질 $\dfrac{2}{h_A}=\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_A}$, $V=\dfrac{2(S_A-S_B)r_Ar_B}{3(r_A-r_B)}$을 유도하고 증명하였다. 이를 체계적으로 정리하면, <도식 2>와 같이 나타낼 수 있다.

성질 A. $a=S\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)$

성질 $f(A)$. $S_A=\frac{3V}{2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right)$

성질 $A-1$. $\frac{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}{r_a r_b r_c}=\frac{4r\rho}{p^2}$

성질 $A-2$. $\frac{2}{h_a}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}$

성질 $f(A-2)$. $\frac{2}{h_A}=\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}$

성질 $A-3$. $S=\frac{(a-b)r_a r_b}{r_a-r_b}$

성질 $f(A-3)$. $V=\frac{2(S_A-S_B)r_A r_B}{3(r_A-r_B)}$

<도식 2> 성질 A, $f(A)$로부터 얻어지는 성질들

이제, 성질 B인 등식 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$에 관련된 삼각형의 방접원의 탐구를 살펴보자. 등식 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$는 삼각형의 방접원의 반지름들과 내접원의 반지름에 관련된 흥미로운 등식으로, 이로부터 다양한 등식들을 유도할 수 있다.

성질 $B-1$. $\frac{r_a}{3}\leq r\leq\frac{r_c}{3}$ (단, $r_a\leq r_b\leq r_c$)

증명. $r_a\leq r_b\leq r_c$이므로, $\frac{1}{r_c}\leq\frac{1}{r_b}\leq\frac{1}{r_a}$이 성립한다. 그러므로, $\frac{3}{r_c}\leq\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\leq\frac{3}{r_a}$이고 성질 B에 의해 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$이다. 이로부터 구하는 부등식 $\frac{r_a}{3}\leq r\leq\frac{r_c}{3}$이 유도된다. □

성질 $B-1$을 사면체에 대해 유추하면, 사면체의 방접구의 반지름들, 내접구의 반지름에 대한 다음 성질을 얻을 수 있다.

성질 $f(B-1)$. $\frac{r_A}{2}\leq R\leq\frac{r_D}{2}$ (단, $r_A\leq r_B\leq r_C\leq r_D$)

증명. $r_A \leqq r_B \leqq r_C \leqq r_D$이 성립하므로, $\frac{1}{r_D} \leqq \frac{1}{r_C} \leqq \frac{1}{r_B} \leqq \frac{1}{r_A}$이다. 이로부터 방접구의 반지름에 대한 부등식 $\frac{4}{r_D} \leqq \frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D} \leqq \frac{4}{r_A}$을 얻을 수 있고, 성질 $f(B)$에 의해 등식 $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}=\frac{2}{R}$이 성립한다. 그러므로 $\frac{4}{r_D} \leqq \frac{2}{R} \leqq \frac{4}{r_A}$이 된다. 결국 $\frac{r_A}{2} \leqq R \leqq \frac{r_D}{2}$가 성립한다. □

성질 $B-2$. $\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_a^3}-\frac{1}{r_b^3}-\frac{1}{r^3}=\frac{12\rho}{S^2}$

증명. 증명하려는 등식의 좌변을 변형시켜 보자. $\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_a^3}-\frac{1}{r_b^3}-\frac{1}{r_c^2}=\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_a^3}\right)-\left(\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^2}\right)$ $=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)^3+\frac{3}{rr_a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)-\left\{\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^3-\frac{3}{r_br_c}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\right\}$와 같이 쓸 수 있다. 그런데 성질 B에 의해 $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}$이 성립하므로, 다음 등식이 성립한다.

$$\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_a^3}-\frac{1}{r_b^3}-\frac{1}{r_c^3}=3\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)\left(\frac{1}{rr_a}+\frac{1}{r_br_c}\right)$$
$$=3\left(\frac{p}{S}-\frac{p-a}{S}\right)\left(\frac{p}{S}\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}\frac{p-c}{S}\right)=\frac{3a}{S}\left\{\frac{2p^2-(a+b+c)p+bc}{S^2}\right\}=\frac{3abc}{S^3}$$

한편 $S=\frac{abc}{4\rho}$이므로, 이것을 얻어진 식에 대입하면 증명하려는 등식 $\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_a^3}-\frac{1}{r_b^3}-\frac{1}{r^3}=\frac{12\rho}{S^2}$을 얻게 된다. □

성질 $B-3$. $\frac{r_ar_br_c}{h_ah_bh_c}=\frac{r_ar_b+r_br_c+r_ar_c}{h_ah_b+h_bh_c+h_ah_c}$

증명. 삼각형의 넓이를 이용하면, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$임을 알 수 있다. 한편, 성질 B에 의해 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$이므로, $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$이 성립한다. 이제, 얻어진 식을 통분하여 정리하면, $\frac{r_ar_br_c}{h_ah_bh_c}=\frac{r_ar_b+r_br_c+r_ar_c}{h_ah_b+h_bh_c+h_ah_c}$가 된다. □

성질 $f(B-3)$. $\frac{2r_Ar_Br_Cr_D}{h_Ah_Bh_Ch_D}=\frac{r_Ar_Br_C+r_Ar_Br_D+r_Ar_Cr_D+r_Br_Cr_D}{h_Ah_Bh_C+h_Ah_Bh_D+h_Ah_Ch_D+h_Bh_Ch_D}$

증명. 사면체의 부피를 이용하면, $\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}=\frac{S_A}{3V}+\frac{S_B}{3V}+\frac{S_C}{3V}+\frac{S_D}{3V}=\frac{2S}{3V}=\frac{1}{R}$임을 알 수 있다. 한편, 성질 $f(B)$에 의하여 $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}=\frac{2}{R}$가 되므로, 이들 두 등식을 연립하면 $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}=2\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}\right)$을 얻을 수 있다. 이제, 등식의 좌변과 우변을 각각 통분하여 정리하면, $\frac{2r_Ar_Br_Cr_D}{h_Ah_Bh_Ch_D}=\frac{r_Ar_Br_C+r_Ar_Br_D+r_Ar_Cr_D+r_Br_Cr_D}{h_Ah_Bh_C+h_Ah_Bh_D+h_Ah_Ch_D+h_Bh_Ch_D}$을 얻을 수 있다. □

성질 $B-4$. $a=S\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)$

증명. 성질 A에 의해 $a=S\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)$이 성립하고, 성질 B에 의해 $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$이 성립한다. 두 번째 등식을 첫 번째 등식에 대입하면, 등식 $a=S\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)$이 얻어진다. □

성질 $f(B-4)$. $S_A=\frac{3V}{2}\left(\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}\right)$

증명. 성질 $f(A)$에 의해 $S_A=\frac{3V}{2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right)$이고 성질 $f(B)$에 의해 $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}=\frac{2}{R}$이 성립한다. 이제, 두 번째 등식을 첫 번째 등식에 대입하여 정리하면, $S_A=\frac{3V}{2}\left(\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}\right)$을 얻을 수 있다. □

성질 $B-4$인 등식 $a=S\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)$은 삼각형의 방접원에 대한 성질을 탐구하는 흥미로운 도구로, 성질 $B-4$을 이용하여 몇몇 등식들을 증명할 수 있다. 성질 $B-4$를 이용하여 증명되는 등식들을 $B-4-1$, $B-4-2$ 등과 같이 나타내기로 하자.

성질 $B-4-1$. $S=\frac{(a+b)rr_c}{r+r_c}$

증명. 성질 $B-4$에 의해 $a=S\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)$, $b=S\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)$이므로, 이들 두 등식을 서로 더하면 $a+b=S\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_c}\right)$를 얻을 수 있다. 이제, 우변을 통분하여 정리하면, $S=\frac{(a+b)rr_c}{r+r_c}$이 성립함을 알 수 있다. □

성질 $B-4-1$을 사면체에 대해 개념유추하면, 사면체의 부피, 내접원의 반지름, 방접원의 반지름, 면의 넓이에 대한 다음 등식을 얻을 수 있다.

성질 $f(B-4-1)$. $V=\dfrac{2(S_A+S_B+S_C)Rr_D}{3(R+r_D)}$

증명. 성질 $f(A)$에 의해 $S_A=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_A}\right)$, $S_B=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_B}\right)$, $S_C=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_C}\right)$가 된다. 이들 등식을 서로 더하면, $S_A+S_B+S_C=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{3}{R}-\dfrac{1}{r_A}-\dfrac{1}{r_B}-\dfrac{1}{r_C}\right)$가 얻어진다. 성질 $f(B)$에 의해 $\dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}+\dfrac{1}{r_D}=\dfrac{2}{R}$이므로, $S_A+S_B+S_C=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{r_D}\right)$가 된다. 이로부터 구하는 등식 $V=\dfrac{2(S_A+S_B+S_C)Rr_D}{3(R+r_D)}$이 얻어진다. □

성질 $B-4$인 $a=S\left(\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}\right)$로부터 등식 $\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{2}{h_a}$을 증명할 수 있다.

성질 $B-4-2$. $\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{2}{h_a}$

증명. 성질 $B-4$에 의해 $a=S\left(\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}\right)$이 성립하므로, S를 좌변으로 이항하자. 그리고 삼각형의 넓이 공식을 이용하면, $\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{a}{S}=\dfrac{2}{h_a}$을 얻을 수 있다. □

성질 $B-4-2$를 사면체로 유추하면, 사면체의 방접원의 반지름, 내접원의 반지름, 높이에 관련된 다음 등식을 얻을 수 있다.

성질 $f(B-4-2)$. $\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}+\dfrac{1}{r_D}-\dfrac{1}{R}=\dfrac{2}{h_A}$

증명. 성질 $f(B-4)$에 의해 $S_A=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}+\dfrac{1}{r_D}-\dfrac{1}{R}\right)$이고, 사면체의 부피 공식 $V=\dfrac{1}{3}S_Ah_A$을 생각하자. 두 번째 등식을 첫 번째 등식에 대입하여 정리하면, $\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}+\dfrac{1}{r_D}-\dfrac{1}{R}=\dfrac{2S_A}{S_Ah_A}=\dfrac{2}{h_A}$이 얻어진다. □

이제, 성질 $B-4-2$를 이용하여 삼각형의 방접원에 대한 몇몇 성질을 증명하자.

성질 $B-4-2-1$. $\frac{1}{r_c}<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}<\frac{1}{r}$

증명. 성질 $B-4-2$에 의해 $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}$, $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_b}$이므로, 이들 등식을 서로 더하면 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)+\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)\right\}$이 얻어진다. 성질 B에 의해 $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$이므로, 등식 $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_c}\right)$이 유도된다. 한편, $\frac{1}{r_c}<\frac{1}{r}$이므로, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_c}\right)<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)$이다. 결국, 구하는 등식 $\frac{1}{r_c}<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}<\frac{1}{r}$이 증명된다. □

성질 $f(B-4-2-1)$. $\frac{3}{4r_D}<\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}<\frac{3}{2R}$

증명. 성질 $f(B-4-2)$에 의해 등식 $\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}=\frac{2}{h_A}$, $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}=\frac{2}{h_B}$, $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}=\frac{2}{h_C}$이 성립함을 알 수 있다. 이제, 이들 등식을 더하여 정리하면, 등식 $\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r_A}+\frac{2}{r_B}+\frac{2}{r_C}+\frac{2}{r_D}+\frac{1}{r_D}-\frac{3}{R}\right)$이 성립함을 알 수 있다. 그런데 성질 $f(B)$에 의해 $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}=\frac{2}{R}$이 성립하므로, $\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r_D}\right)$가 된다. 한편, $\frac{1}{r_D}<\frac{2}{R}$이므로 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r_D}+\frac{1}{r_D}\right)<\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{2}{R}\right)$을 얻을 수 있고, 이로부터 증명하려는 등식 $\frac{3}{4r_D}<\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}<\frac{3}{2R}$가 얻어진다. □

성질 $B-4-2$를 이용하면, 성질 $\frac{h_a}{2r_b}=\frac{r_c}{r_b+r_c}$, $h_a\leq\sqrt{r_br_c}$, $\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}\geq 3$ 등을 증명할 수 있다. 이들에 대한 증명은 간단하므로, 생략하고 다음 성질을 살펴보자.

성질 $B-4-2-2$. $\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$

증명. 성질 $B-4-2$에 의해 $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}$이므로, $\frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)$가 된다. 같은 방법으로, $\frac{1}{h_b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_c}\right)$, $\frac{1}{h_c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)$가 성립함을 알 수 있다. 이제, 이들 등식을 이용하여,

$\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$을 계산하면, 구하는 등식 $\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}=\frac{1}{r_a}$이 얻어진다. □

성질 $f(B-4-2-2)$. $\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}-\frac{1}{h_A}=\frac{1}{r_A}$

증명. 성질 $f(B-4-2)$에 의해 $\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}=\frac{2}{h_A}$이 성립하므로, 우변의 2를 좌변으로 넘기면 $\frac{1}{h_A}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}\right)$이 성립한다. 같은 방법으로 등식들 $\frac{1}{h_B}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}\right)$, $\frac{1}{h_C}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}\right)$, $\frac{1}{h_D}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}-\frac{1}{R}\right)$이 성립함을 알 수 있다. 이제, 이들 등식으로부터 $\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}-\frac{1}{h_A}$을 계산하면, 구하는 등식 $\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}-\frac{1}{h_A}=\frac{1}{r_A}$이 얻어진다. □

살펴본 바와 같이, 성질 B, 성질 $f(B)$를 바탕으로 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 성질들을 증명하였으며, 이들 성질을 체계적으로 정리하면, <도식 3>을 얻을 수 있다.

성질 $B-1$. $\frac{r_a}{3} \leqq r \leqq \frac{r_c}{3}$

성질 $f(B-1)$. $\frac{r_A}{2} \leqq R \leqq \frac{r_D}{2}$

성질 $B-2$. $\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r_a^3}-\frac{1}{r_b^3}-\frac{1}{r^3}=\frac{12\rho}{S^2}$

성질 B. $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

성질 $f(B)$. $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}=\frac{2}{R}$

성질 $B-3$. $\frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c}=\frac{r_a r_b+r_b r_c+r_a r_c}{h_a h_b+h_b h_c+h_a h_c}$

성질 $f(B-3)$. $\frac{2r_A r_B r_C r_D}{h_A h_B h_C h_D}=$

$$\frac{r_A r_B r_C + r_A r_B r_D + r_A r_C r_D + r_B r_C r_D}{h_A h_B h_C + h_A h_B h_D + h_A h_C h_D + h_B h_C h_D}$$

성질 $B-4$. $a=S\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)$

성질 $f(B-4)$. $S_A=\frac{3V}{2}\left(\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}\right)$

성질 $B-4-1$. $S=\frac{(a+b)rr_c}{r+r_c}$

성질 $f(B-4-1)$. $V=\frac{2(S_A+S_B+S_C)Rr_D}{3(R+r_D)}$

성질 $B-4-2$. $\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{h_a}$

성질 $f(B-4-2)$. $\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}-\frac{1}{R}=\frac{2}{h_A}$

성질 $B-4-2-1$. $\frac{1}{r_c}<\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}<\frac{1}{r}$

성질 $f(B-4-2-1)$. $\frac{3}{4r_D}<\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}<\frac{3}{2R}$

성질 $B-4-2-2$. $\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$

성질 $f(B-4-2-2)$. $\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}-\frac{1}{h_A}=\frac{1}{r_A}$

<도식 3> 성질 B, $f(B)$로부터 얻어지는 성질들

한편, 본 연구에서는 삼각형에 관련된 성질 C, D, E, 사면체에 관련된 성질 $f(C), f(D), f(E)$로부터는 다른 주목할 만한 성질들을 유도하지 못했다. 그러나 성질 F로부터는 헤론의 공식에 대한 새롭고 간결한 증명을 얻을 수 있었다. 특히, 한인기(2003)는 헤론의 공식에 대한 다섯 가지 서로 다른 증명방법을 소개하였는데, 방접원의 성질에 관련된 증명은 없었다. 헤론의 공식에 대해 본 연구에서 찾아낸 증명 방법을 살펴보자.

헤론의 공식. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

증명. 삼각형의 넓이 공식으로부터 $r=\dfrac{S}{p}$를 알 수 있고, 바탕문제 1로부터 $r_a=\dfrac{S}{p-a}$, 성질 F로부터 $rr_a=(p-b)(p-c)$을 알 수 있다. 이제, 첫 번째 등식과 두 번째 등식을 세 번째 등식에 대입하면, $\dfrac{S}{p}\cdot\dfrac{S}{p-a}=(p-b)(p-c)$이 성립함을 알 수 있다. 얻어진 등식의 좌변에 있는 항 $p(p-a)$를 우변으로 이항하여 정리하면, $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$을 얻을 수 있다. □

본 연구에서는 바탕문제 2와 사면체의 방접구에 대해 증명된 성질들을 이용하여 헤론의 공식을 사면체에 대해 유추하려고 시도하였으나, 의미로운 결과를 얻지 못했다. 특히, 한인기 외 4인(2005)의 연구에는 헤론의 공식과 유사한 사면체의 부피를 구하는 다양한 공식들이 제시되어 있지만, 이들 중에서 방접구의 성질을 이용하여 유도되는 사면체의 부피 공식은 발견할 수 없었다.

4. 결 론

본 연구에서는 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 다양한 성질을 증명하기 위해 바탕문제들을 추출하고, 바탕문제를 중심으로 삼각형의 방접원에 관련된 성질들을 체계화하고 증명하며, 삼각형의 방접원의 다양한 성질을 사면체로 유추하여 방접구의 성질을 추측, 증명하였다.

삼각형의 방접원 탐구를 위한 바탕문제로 $r_a=\dfrac{S}{p-a}$을 추출하였고, 사면체의 바탕문제로는 $r_A=\dfrac{3V}{2(P-S_A)}$를 추출하였다. 본 연구에서는 $r_a=\dfrac{S}{p-a}$이용하여, 삼각형의 방접원에 관련된 등식들 $a=S\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_a}\right)$, $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{1}{r}$, $\dfrac{h_a+h_b}{r_c}+\dfrac{h_b+h_c}{r_a}+\dfrac{h_c+h_a}{r_b}=6$, $\dfrac{h_a}{r_a}+\dfrac{h_b}{r_b}+\dfrac{h_c}{r_c}\geq 3$, $\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r_a^2}+\dfrac{1}{r_b^2}+\dfrac{1}{r_c^2}=4\left(\dfrac{1}{h_a^2}+\dfrac{1}{h_b^2}+\dfrac{1}{h_c^2}\right)$, $rr_a=(p-b)(p-c)$을 증명하였고, 이들 성질을 사면체로 유추하여 사면체의 방접구에 관련된 식들 $S_A=\dfrac{3V}{2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r_A}\right)$, $\dfrac{1}{r_A}+\dfrac{1}{r_B}+\dfrac{1}{r_C}+\dfrac{1}{r_D}=\dfrac{2}{R}$,

$\frac{h_B+h_C+h_D}{r_A}+\frac{h_A+h_C+h_D}{r_B}+\frac{h_A+h_B+h_D}{r_C}+\frac{h_A+h_B+h_C}{r_D} \geq 24$, $\frac{h_A}{r_A}+\frac{h_B}{r_B}+\frac{h_C}{r_C}+\frac{h_D}{r_D} \geq 8$, $\frac{1}{r_A^2}+\frac{1}{r_B^2}+\frac{1}{r_C^2}+\frac{1}{r_D^2}=4\left(\frac{1}{h_A^2}+\frac{1}{h_B^2}+\frac{1}{h_C^2}+\frac{1}{h_D^2}\right)$을 추측하고 증명하였다. 특히, 삼각형의 방접원, 사면체의 방접구에 관련된 유사한 등식 $a=S\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_a}\right)$와 $S_A=\frac{3V}{2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_A}\right)$, $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$와 $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}=\frac{2}{R}$을 이용하여, 삼각형의 방접원 및 사면체의 방접구에 관련된 몇몇 흥미로운 등식들을 얻을 수 있었다.

한편, 본 연구에서는 삼각형의 방접원에 관한 등식인 $rr_a=(p-b)(p-c)$을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 헤론의 공식에 대한 새로운 증명방법을 찾아냈다. 이것은 수학적 지식에 대한 체계화 및 상응하는 탐구활동이 수학적 발명에 얼마나 중요한가를 간접적으로 보여주는 예라고도 할 수 있을 것이다.

본 연구의 결과는 수준별 교육에서 수학심화 활동의 자료로 활용될 수 있을 것이며, 삼각형에 관련된 성질의 체계화 및 유추를 통한 사면체의 성질 탐구에 대한 모범적인 예가 될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육부(1999). 중학교 교육과정 해설(III), 서울: 대한교과서주식회사.

민수분(2005). 삼각형과 사면체 사이의 유추에 관한 연구, 경상대학교 교육학석사 학위논문.

유익승 · 한인기 · 신현용(2006). 삼각형의 높이와 방접원의 개념유추에 대한 연구, 수학교육논문집 **20(1)**, pp.9-18.

한인기(2003). 헤론 공식에 대한 교수학적 분석 및 확장, 한국수학사학회지 **16(2)**, pp. 43-54.

한인기 외 4인(2005). 헤론의 공식과 유사한 사면체의 부피 공식에 대한 연구, 수학교육논문집 **19(3)**, pp. 517-526.

한인기 · 에르든예프(2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

한인기(2006). 수학교육학의 기초와 실제, 경남: 경상대출판부.

Sharygin I.F.(1994). *Reshenie zadach*, Moskva: Prosveshenie.

A Study on Investigating Various Properties of Triangle's Escribed Circle and Tetrahedron's Escribed Sphere

Kim Kyeongsun
Changwon Bonglim High School, 641-823, Korea
posassi@hanmail.net

Han Inki[1)]
Dept. of Math. Education Research Institute, Gyeongsang National University, 660-701, Korea
inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we study on various properties of triangle's escribed circle and tetrahedron's escribed sphere. In order to accomplish our study we extract some base problems related with investigating these properties. Using the base problems we are able to prove various properties of triangle's escribed circle, and to systemize these properties. And we succeed in drawing an analogy related with tetrahedron's escribed sphere.

---

1) correspondent author
* ZDM Classification : E54
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C20
* Key Words : triangle's escribed circle, tetrahedron's escribed sphere, analogy, problem solving