

Ritz법에 의한 비균일 단면 외팔보의 횡진동 해석

Lateral Vibration Analysis of a Nonuniform Beam by Ritz's Method

박 석 주*

Sok-Chu Park

(2007년 7월 18일 접수 ; 2007년 8월 28일 심사완료)

Key Words : Lateral Vibration of Beam(보의 횡진동), Ritz Method(Ritz 법), Shape Function(형상함수)

ABSTRACT

This paper discusses the lateral vibration of a beam with boundary condition of one end fixed and the other end free. The uniform beam has a solution by summation of some simple exponential functions. But if its shape is not uniform, its solution could be by Bessel's function or mathematical solution could not exist. Even if the solution of Bessel's function exists, as Bessel function is a series function, we must get the solution by numerical method. Author had proposed the solution of the matrix method by Ritz's method and a new mode shape function, and had earned the good results for a wedge beam. Hereby a vibration analysis for the tapered beam with circle cross section was executed, and so good results were showed.

1. 서 론

균일 단면보의 횡진동 해는 간단한 지수함수의 합으로 구할 수 있다. 그러나 단면이 균일하지 않으면 수학적 해를 구할 수 없는 경우가 많고, 구해지더라도 급수해의 형태로 구하여 진다. 급수해의 경우에는 결국 수치해석법에 의하여 그 값을 구하여야 하기 때문에 해를 구하는 과정이 번거롭고 또 수렴시키는데 시간이 많이 걸린다.

썰기형 보에 대하여서는 1879년 Kirchhoff⁽¹⁾가 Bessel함수의 형태로 고유진동수를 구한 바 있고, 저자는 Ritz법을 행렬로 간결하게 정리하고 진동형상함수를 제안하여⁽²⁾ 썰기형 보에 적용시켜 고차항까지 높은 정확도를 가진 고유진동수를 구한 바 있다.

단면이 원형이고 길이 방향이 원추형인 보의 횡진동 해는 1879년 Kirchhoff가 한쪽단은 고정되어 있

고, 다른 단은 자유인 경계조건에 대하여 처음 1차항을 구하였고, 1922년에 D. Wrinch⁽³⁾에 의하여 Bessel함수의 형태로 고유진동수를 구하였다. 또 W. Weaver⁽⁴⁾ 등은 1990년도 판의 저서에서 여전히 Kirchhoff와 Wrinch를 인용하고 있다. 이 논문에서는 저자가 제안한 형상함수를 원추형 보에 대하여 적용하여 고유진동수를 구하고자 한다.

2. Ritz법에 의한 보의 횡진동 고유진동수

보의 횡진동 운동방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

여기에서 x 는 보의 축방향, v 는 횡방향 변위, EI 는 강성, ρ 는 밀도, A 는 보의 단면적을 나타낸다.

보가 특정의 고유진동수로 진동한다고 가정하면 임의의 점에서의 변위는 정현파 진동으로 나타난다.

* 교신저자: 정희원 한국해양대학교 조선해양시스템공학부
E-mail : poseidon@hhu.ac.kr
Tel : (051) 410-4305, Fax : (051) 405-8305

$$v(x,t) = V(x)\cos(\omega t - \phi) \quad (2)$$

최대운동에너지와 최대위치에너지는 서로 같아야 한다는 에너지보존법칙으로부터 고유진동수를 구할 수 있다.

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \rho AV^2 dx$$

$$\omega^2 = \frac{E \int_0^l I \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)^2 dx}{\rho \int_0^l AV^2 dx} \quad (4)$$

Ritz의 근사해를 얻기 위하여 진동형을 다음과 같은 급수형태로 표시할 수 있다고 하자.

$$V = \sum_{k=1}^n a_k v_k(x) = \mathbf{a} \mathbf{v}^t \quad (5)$$

단,

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$$

여기에서 모든 함수 v_k 는 보의 경계조건을 만족해야 하고, a_k 는 임의의 상수이다. 식 (4)를 최소로 하는 a_k 를 구하면 고유진동수를 구할 수 있는데 이를 Ritz법이라 한다.

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \frac{\int_0^l I \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l AV^2 dx} = 0 \quad (7)$$

이를 정리하면

$$\frac{\partial Z}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

단,

$$Z = \frac{\partial}{\partial a_k} \int_0^l \left[I \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right)^2 - \frac{\omega^2 \rho A}{E} V^2 \right] dx \quad (9)$$

여기에서 적분을 쉽게할 수 있도록 각 요소들을 구하여 보면 다음과 같다.

$$V^2 = \mathbf{v}_2 \mathbf{a}_2^t \quad (10)$$

단,

$$\mathbf{v}_2 = [v_1^2 \ v_1 v_2 \ \dots \ v_1 v_n \ v_2^2 \ v_2 v_3 \ \dots \ v_n^2] \quad (11)$$

$$\mathbf{a}_2 = [a_1^2 \ 2a_1 a_2 \ \dots \ 2a_1 a_n \ a_2^2 \ 2a_2 a_3 \ \dots \ a_n^2]$$

또 연산 D를 도입하면

$$\text{단, } D = \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dV}{dx} = D \mathbf{v} \mathbf{a}^t \quad (12)$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = D^2 \mathbf{v} \mathbf{a}^t \quad (13)$$

$$\left(\frac{dV}{dx} \right)^2 = \mathbf{v}_4 \mathbf{a}_2^t \quad (14)$$

단,

$$\mathbf{v}_4^t = \begin{Bmatrix} (D^2 v_1)^2 \\ (D^2 v_1 D^2 v_2) \\ \vdots \\ (D^2 v_1 D^2 v_n) \\ (D^2 v_2)^2 \\ (D^2 v_2 D^2 v_3) \\ \vdots \\ (D^2 v_n)^2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

식 (14), (10)을 식 (9)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$Z = \left[C - \frac{\omega^2 \rho}{E} D \right] \mathbf{a}_2^t \quad (16)$$

여기에서,

$$C = [k_{11} \ k_{12} \ \dots \ k_{1n} \ k_{22} \ \dots \ k_{mn}] \quad (17)$$

$$D = [m_{11} \ m_{12} \ \dots \ m_{1n} \ m_{22} \ \dots \ m_{mn}]$$

이고, 또,

$$k_{ij} = \int_0^l I \left(\frac{d^2 v_i}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 v_j}{dx^2} \right) dx \quad (18)$$

$$m_{ij} = \int_0^l A v_i v_j dx$$

이다.

식 (16)에 식 (8)을 적용하면 다음과 같은 고유값 문제로 귀결된다.

$$Ka - \omega^2 Ma = 0 \quad (19)$$

단,

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{1n} & m_{2n} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

이다.

3. 고정-자유단을 가진 보의 횡진동

균일 단면보의 횡진동은 식 (1)에 식 (2)를 대입하여 풀면 다음의 형태의 해가 얻어진다.

$$V(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} + C_3 e^{i\beta x} + C_4 e^{-i\beta x} \quad (21)$$

여기에서 상수 β 와 C_i 는 경계조건으로부터 구할 수 있다.

3.1 고정-자유단을 가진 균일 단면보의 횡진동
 왼쪽단($x=0$)이 고정되어 있고, 오른쪽단($x=l$)이 자유인 균일 단면보의 경계조건과 고유진동수 방정식은 다음과 같다.

$$(V)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (22)$$

$$(EI \frac{d^2 V}{dx^2})_{x=l} = 0, \quad \frac{d}{dx} (EI \frac{d^2 V}{dx^2})_{x=l} = 0$$

$$\cos \beta l \cosh \beta l = -1 \quad (23)$$

한편, Ritz의 방법을 적용하기 위하여 다음과 같이 잘 알려진 진동곡선을 적용하여 왔다.

$$V(x) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{x}{l} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{k-1} \quad (24)$$

그러나 이 함수의 단점은 n 의 값을 크게 취하면, 식에서 알 수 있듯이 차수가 높아져 $V(x)$ 의 값이 불안정하게 되고, 따라서 고차의 고유진동수와 고유진동형을 구하기 어렵게 된다. 그래서 저차는 다음과 같은 진동곡선을 제안한 바 있다.

$$V(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sinh px \sin \left(\frac{k\pi}{2} x \right) \quad (25)$$

위 두 곡선은 식 (22)의 경계조건을 만족한다. 이 함수를 이용하면 정해가 있는 균일 단면보에 대하여 기존의 다항식을 이용하는 경우보다 훨씬 정도 높게 고차까지 해석할 수 있음을 보인 바 있다.

3.2 고정-자유단의 원형 단면을 가진 경사진 보의 횡진동

여기에서는 Kirchhoff가 해석한 바 있는 원추형 보의 진동해석에 대하여 살펴본다.

Fig. 1과 같이 왼쪽단이 고정되어 있고, 오른쪽단이 자유로운 경계조건을 가지며, 왼쪽단의 반지름이 r 이고 오른쪽단의 반지름이 0인 원추형 보의 횡진동에 대하여 마찬가지로 식 (24)과 (25)의 진동형 방정식을 사용하여 다음 식 (26)과 같은 형식으로 고유진동수를 표시하고, 여러 방법에 의하여 구한 β_k 를 Table 1에 보인다.

$$\omega_k = \frac{\beta_k r}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (26)$$

Table 1에서 hsin은 저차가 제안한 식 (25)를 이용하여 Ritz법을 적용한 것이고, poly는 전통적으로

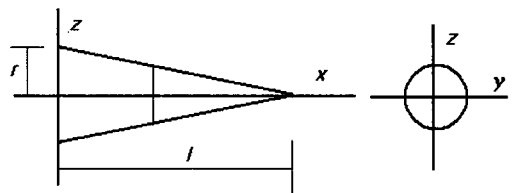


Fig. 1 A cone type beam

Table 1 β_k for the various deflection functions

Or	hsin-12	Poly-11	Err.	hsin-11	Err.	Wrinch.	Err.
1	8.7194	8.7192	0.00	8.7196	0.00	8.7180	-0.02
2	21.1456	21.1456	0.00	21.1456	0.00	21.1400	0.00
3	38.4528	38.4526	0.00	38.4528	0.00	38.4600	-0.01
4	60.6730	60.6712	0.00	60.6736	0.00	60.6800	0.01
5	87.7962	87.7892	-0.01	87.7966	0.00	87.8400	0.05
6	119.763	119.800	0.03	119.778	0.01	119.920	0.12
7	156.484	158.383	1.21	156.494	0.01	N.A.	N.A.
8	197.766	216.984	9.72	198.745	0.49	N.A.	N.A.
9	244.926	335.394	36.9	249.650	1.93	N.A.	N.A.

사용한 다항식 (24)를 이용하여 Ritz법을 적용한 것이며 뒤의 숫자는 식에서의 n 을 의미한다.

저자가 발표한 논문⁽²⁾에서 균일 단면보에 대한 정해와 제안한 식 (25)를 이용한 결과를 비교하여 고차의 3항 정도를 버리면 신뢰성이 높다는 것을 확인한 바 있다. 여기에서는 12차까지 계산하였으므로 마지막 3개항을 버린 hsin-12의 9차까지를 정해로 보기로 하고, 다른 여러 경우의 β_k 값과 비교한 것을 Table 1에 표시하였다.

Table 1에서 Wrinch가 Bessel함수의 형태로 구한 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한 $n=11$ 인 경우 고전적인 다항식의 형상함수를 사용한 것보다 저자가 제안한 형상함수를 이용한 것이 훨씬 정확도가 좋은 것을 알 수 있다.

4. 결 론

이 논문에서는 보의 횡진동에 대한 Ritz법을 행렬을 이용하여 일목요연하게 정리하였다. 이를 이용하면 차수가 높아져도 간결한 고유값 문제로 표시된다. 여기에서는 1922년에 D. Wrinch에 의하여

Bessel함수의 형태로 고유진동수를 구한 이래로 거의 논의된 바가 없는 단면이 원형이고 길이 방향이 원추형인 보에 저자가 제안한 형상 함수인 식 (25)를 적용하여 고차까지 정확도 높은 고유진동수를 구하였다.

참 고 문 헌

- (1) Kifchhoff, G. R., 1882, Gesammelte Abhandlungen, Leipzig, Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veranderlichem Querschnitt, p. 339.
- (2) Park S. C, 2005, Vibration Analysis of Wedge Type Bar by Ritz Method, J. of Korean Society of Marine Engineering, Vol. 29, No. 8, p. 493.
- (3) Wrinch, D., 1922, Proc. Roy. Soc. London, p. 493.
- (4) Weaver, JR, W., Timoshenko, S. P., Young, D. H., 1990, Vibration Problems in Engineering, pp. 467~472.