

<학술논문>

등가하중법을 이용한 비선형 반응 구조최적설계 사례연구

김 용 일* · 박 경 진†

(2006년 12월 26일 접수, 2007년 9월 17일 심사완료)

Case Studies of Nonlinear Response Structural Optimization Using Equivalent Loads

Yong-II Kim and Gyung-Jin Park

Key Words : Nonlinear Response Optimization(비선형 반응 최적설계), Equivalent Loads(EL, 등가하중), Structural Optimization(구조최적설계), Nonlinear Analysis(비선형 해석)

Abstract

Nonlinear response structural optimization is performed using equivalent loads (NROEL). Nonlinear response optimization is extremely cost because many nonlinear analyses are required. In NROEL, the external loads are transformed to the equivalent loads (EL) for linear static analysis and linear response optimization is carried out based on the EL in a cyclic manner until the convergence criteria are satisfied. EL is the load set which generates the same response field of linear analysis as that of nonlinear analysis. The primitive form of theory has been published. In this research, the theory is investigated with large scale example problems. Four examples are solved by using NROEL. Conventional optimization with sensitivity analysis using the finite difference method (FDM) is also applied to the same examples. Moreover, response surface optimization method is applied to the last two examples. The results of the optimizations are compared. In nonlinear response optimization of large scale problems, hundreds (or even thousands) of nonlinear analyses are expected to satisfy the convergence criteria. However, in nonlinear response optimization using equivalent loads, only tens of nonlinear analyses are required. The results are discussed and the usefulness of NROEL is presented.

1. 서론

실제 자연현상에서 발생하는 많은 문제들은 비선형성을 갖고 있으며 이러한 비선형성을 예측하고 묘사하기 위한 많은 유한요소이론들이 개발되어 왔다.⁽¹⁻³⁾ 하지만 비선형성을 갖는 시스템의 민감도 기반 구조최적설계 적용 예는 거의 찾아보기 힘들다. 그 이유는 비선형 민감도 계산이 매우 어렵고 고가의 비용을 요구하기 때문이다.^(4,5) 민감도 정보는 최적설계 시 개선된 설계값을 찾기 위한

방향과 거리 탐색에서 반드시 필요한 정보이다.⁽⁶⁻⁸⁾ 비선형성을 갖는 구조물의 강성행렬은 재료의 물성뿐만 아니라 변위에 대한 함수로 구성되며 재료 비선형성을 갖는 문제에서 변위와 응력의 관계 역시 비선형적인 관계를 갖고 있다.⁽¹⁻³⁾ 민감도 계산은 설계변수의 변화에 대한 반응의 변화율을 의미하며 선형 시스템에서는 민감도 정보를 선형적으로 예측할 수 있지만, 비선형 시스템에서는 그것이 불가능하다. 이러한 이유로 전통적인 구조최적설계 분야에서 선형 시스템을 가정한 연구가 많았다.⁽⁶⁻⁸⁾ 또한 민감도 정보를 필요로 하지 않는 최적설계 방법이 이용되기도 한다.^(9,10) 대표적인 방법이 반응표면법을 이용한 최적화 방법이다. 하지만 이러한 근사적인 방법들은 설계변수가 많아지면 비선형 해석의 횟수가 비약적으로 증가하며

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계정보경영공학부

E-mail : gjpark@hanyang.ac.kr

TEL : (031)400-5246 FAX : (031)407-0755

* 한양대학교 대학원 기계공학과

반응표면모델의 구성 자체가 불가능 한 단점이 있다.⁽¹¹⁾

2006 년 박기종과 박경진은 민감도 정보를 기반으로 하는 비선형 반응 구조최적설계의 새로운 방법을 제안하였다.⁽¹²⁻¹⁵⁾ 등가하중법이라 불리는 이 방법은 선형 해석 시 비선형 해석으로부터 발생하는 반응장과 동일한 반응장을 유발시키는 등가하중을 계산하여, 이를 선형 구조최적설계 알고리즘에 적용하는 방법이다. 이 방법은 비선형 민감도를 직접 구하지 않고, 선형 민감도 정보를 이용해서 최적설계를 수행하기 때문에 민감도 정보의 계산 비용이 크게 감소한다. 선형 및 비선형 민감도의 차이는 설계 사이클이 반복되면서 감소하게 되며, 종료 조건을 만족하게 되면 설계과정이 종료된다.

본 논문에서는 기존에 접근하지 못했던 규모가 크고 실제적인 공학 예제들에 등가하중법을 적용하여 본다. 예제들은 트러스와 셸 요소들로 이루어져 있으며 모델의 규모가 크고 비선형성이 크다. 설계변수 및 제한조건의 수가 수백 개에 달하는 문제의 비선형 반응 구조최적설계 사례를 소개한다. 연구를 위해서는 상용 소프트웨어와 알고리즘의 효과적인 결합이 필요하므로 전 과정이 자동으로 이루어 질 수 있는 프로그램을 개발하였다. 처음 제안된 등가하중법 알고리즘을 실제적인 문제에 적용 하면서 예상치 못했던 문제점을 발견하였으며, 그에 대한 수정 및 보완을 하였다.

각 사례들은 재료 및 기하 비선형성을 갖고 있으며, 둘 다 고려한 최적설계 사례도 다루어 본다. 등가하중법을 이용한 최적설계 결과의 유용성을 비교해 보기 위하여 비선형성을 고려하지 않은 선형 구조최적설계의 결과와 유한차분법을 이용한 전통적인 민감도 기반 구조최적설계 방법이 같은 문제에 적용되었다. 일부 예제에는 반응표면법을 이용한 결과도 함께 비교하였다.

비선형 해석을 위해서는 Abaqus 6.4 가 이용되었고, 선형 해석 및 최적화를 위해서는 Optistruct 7.0 및 DOT 5.5 가 사용되었다. 반응표면법의 적용을 위해서는 Visual DOC 5.0 이 이용되었다.⁽¹⁶⁻¹⁹⁾

2. 등가하중의 계산과 오차의 보정

등가하중은 비선형 해석 시 발생하는 반응장과 동일한 반응장을 유발하는 선형 해석을 위한 하중으로 정의한다. 비선형 해석에 있어서 변위장을 일치시키는 등가하중은 응력장을 함께 일치시키지 못한다. 따라서 등가하중은 고려되는 반응장에 대

해 각각 산출되어 선형 최적화 단계에서는 다중 하중조건으로 처리된다. 변위장과 응력장을 일치시키기 위한 등가하중의 산출법을 소개한다. 또한 등가하중이 갖는 오차의 의미를 분석해보고 오차를 줄이기 위한 해결책을 제시한다.

2.1 변위장을 일치시키는 등가하중의 계산

유한요소이론에 의해 비선형 시스템의 평형 방정식은 식 (1)과 같다.

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N) \mathbf{z}_N = \mathbf{f} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{K} 는 강성행렬이고, 설계변수 \mathbf{b} 와 절점 변위벡터 \mathbf{z} 의 함수이다. 하침자 N 은 비선형 해석으로부터 얻은 값을 의미한다. \mathbf{f} 는 시스템에 외부로부터 가해지는 힘이다. 식 (1)의 비선형 해석을 수행하면 절점변위벡터 \mathbf{z}_N 을 얻을 수 있으며, 등가하중은 식 (2)와 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{f}_{eq}^z = \mathbf{K}_L(\mathbf{b}) \mathbf{z}_N \quad (2)$$

\mathbf{f}_{eq}^z 는 변위장을 일치시키는 등가하중을 의미한다. \mathbf{f}_{eq}^z 는 선형 강성행렬인 \mathbf{K}_L 과 절점변위벡터 \mathbf{z}_N 의 곱으로부터 구할 수 있다. 식 (2)에서 구한 등가하중 \mathbf{f}_{eq}^z 를 이용하여 식 (3)과 같은 선형 해석을 수행하면, 선형 절점변위벡터 \mathbf{z}_L 을 얻는다.

$$\mathbf{K}_L(\mathbf{b}) \mathbf{z}_L = \mathbf{f}_{eq}^z \quad (3)$$

여기서 선형 절점변위벡터 \mathbf{z}_L 은 식 (1)로부터 얻어진 비선형 절점변위벡터 \mathbf{z}_N 과 동일한 값을 갖게 된다. 따라서 등가하중 \mathbf{f}_{eq}^z 를 이용하여 선형 구조최적설계를 수행하면 비선형 변위장과 동일한 변위장을 고려할 수 있다. 이 과정은 Fig. 1 의 플로우 차트에서 나타내었다.

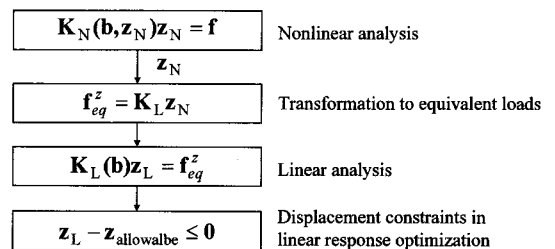


Fig. 1 Generation of equivalent loads for displacement constraints

2.2 응력장을 일치시키는 등가하중의 계산

비선형 해석은 선형 해석과 달리 내연적 방법을 사용하여 수행된다. 외연적 방법도 비선형 동적 해석에 사용되지만 오차를 줄이기 위하여 수많은 행렬 계산을 반복한다. 내연적 방법은 단위하중을 증가시키며 변위를 계산하는 방법으로 최종적인 변위장을 계산한다. 등가하중법을 이용한 변위장의 일치시키는 식 (2)와 식 (3)과 같이 관계가 명확하다. 즉, 비선형 해석에서 변위가 계산되는 과정과 상관없이 최종적인 변위값 만을 필요로 한다. 대부분의 유한요소이론들은 변위법에 기초하여 발달되었으며 응력은 변위의 변화율인 변형률로 계산되는 2 차적인 값이다. 비선형 해석에서는 응력과 변형률의 관계 역시 선형적이지 않으며, 변위장을 일치시키는 등가하중은 응력장을 일치시키지 않는다. 따라서 응력장을 일치시키기 위한 등가하중을 새롭게 계산 해야 한다.

변위법에 기초한 유한요소이론들은 $f \rightarrow u \rightarrow \sigma$ 의 순서로 계산이 진행된다. 반대로, 초기 잔류 응력의 개념을 사용하면 $\sigma \rightarrow u \rightarrow f$ 와 같이 반대의 계산이 가능하다. 식 (1)의 비선형 해석을 수행하면 비선형 응력벡터 σ_N 을 얻는다. 등가하중을 산출하는 기본적인 방법은 강성행렬에 절점변위벡터를 곱해서 산출한다. 그러므로 σ_N 을 유발시키는 선형해석을 위한 절점변위벡터의 생성을 위해서는 식 (4)와 같이 비선형 응력벡터 σ_N 을 초기 응력 조건으로 사용하여 선형 해석을 수행한다.

$$K_L(b)z_L^\sigma = -\bar{f}_l(\sigma) \quad (4)$$

$$f_{eq}^\sigma = K_L(b)z_L^\sigma \quad (5)$$

식 (4)의 선형 해석으로부터 선형 절점변위벡터 z_L^σ 을 얻는다. 이 절점변위벡터는 선형 해석 시 식 (1)로부터 얻은 비선형 응력벡터 σ_N 과 동일한 응력을 유발시키는 변위장이다. 따라서 식 (5)와 같이 절점변위벡터 z_L^σ 을 강성행렬과 곱하면 응력장을 일치시키는 등가하중 f_{eq}^σ 를 계산할 수 있다. f_{eq}^σ 를 이용하여 식 (6)과 같이 선형 해석을 수행하면 선형 응력벡터 σ_L 을 얻게 된다.

$$K_L(b)z_L = f_{eq}^\sigma \quad (6)$$

이때 σ_L 과 식 (1)로부터 얻어진 σ_N 은 동일한 값을 갖게 된다.

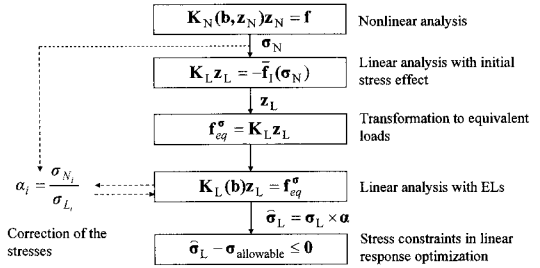


Fig. 2 Generation of equivalent loads for stress constraints

2.3 응력 등가하중의 오차와 보정계수의 계산

문제의 비선형성이 매우 크거나 비선형 해석기와 최적화에 사용되는 선형 해석기가 다른 경우 내부적인 유한요소식의 차이로 인해 σ_L 과 σ_N 이 정확히 일치하지 않을 수 있다. 또한, 식 (4)에는 식 (1)에서 얻어진 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$ 값들이 상수로서 입력되게 되는데, 식 (1)의 응력들이 계산 되는 적분점과 식 (4)에서 응력 계산을 위해 사용되는 적분점의 위치가 정확히 일치하지 않는 문제점이 발생한다. 이것은 구조물의 변형이 클수록 적분점의 위치 오차가 더 커질 수 있음을 의미한다. 이와 같은 원인들로 인해 등가하중이 유발한 응력장이 실제 비선형 해석에서의 응력장과 오차를 갖게 되면 등가하중을 이용한 선형 최적설계과정은 좋은 해를 얻을 수 없게 된다. 따라서 식 (7)과 같은 보정작업을 수행한다.

$$\bar{\sigma}_L = \sigma_L + \sigma_C \quad (7)$$

여기서 σ_C 는 응력보정벡터로서 식 (8)과 같이 계산한다.

$$\sigma_C = \sigma_N - \sigma_L \quad (8)$$

식 (7)의 $\bar{\sigma}_L$ 은 식 (1)의 σ_N 과 정확히 일치한다. 그러나 응력값들의 오차를 의미하는 응력보정벡터의 원소들 중 일부가 허용 응력 보다 큰 경우가 있을 수 있다. 예를 들어 비선형 해석 시 3 GPa의 최대응력이 발생한 요소가 등가하중을 이용한 선형 해석에서 2.7 GPa의 응력을 발생한다면, 300 MPa의 오차가 발생한다. 이 오차를 보정값으로 더하여 3 GPa을 일치시키는데 만약 문제의 허용응력이 250 MPa이라면 이 요소는 원천적으로 제한조건을 만족하지 못하게 된다. 따라서 본 연구에서는 응력장의 보정 과정을 아래 식 (9)와 같이 수정한다.

$$\hat{\sigma}_L^i = \sigma_L^i \times \alpha^i \quad (9)$$

$$\alpha^i = \frac{\sigma_N^i}{\sigma_L^i} \quad (10)$$

여기서 i 는 1 부터 전체 요소의 수까지이다. α 는 식 (10)과 같이 계산되는 보정벡터이며 식 (6)에서 얻어진 σ_L 에 곱해져 보정된 응력벡터 $\hat{\sigma}_L$ 을 계산한다. 이렇게 계산된 $\hat{\sigma}_L$ 은 언제나 비선형 응력벡터 σ_N 과 정확히 일치하게 되며 보정계수가 허용 응력보다 커서 응력 제한조건을 만족 못하는 일은 발생하지 않게 된다. 등가하중 f_{eq}^z 를 이용하여 선형 구조최적설계를 수행하면 비선형 응력장과 동일한 응력장을 고려할 수 있다. 응력장을 일치시키는 등가하중을 구하기 위한 플로우 차트를 Fig. 2에서 나타내었다.

3. 등가하중법을 이용한 비선형 반응 구조최적설계

3.1 등가하중법의 구조최적설계 적용

등가하중법을 이용한 비선형 반응 구조최적설계의 과정은 다음과 같다.

- 단계 1. 초기값과 종료조건의 판정을 위한 허용계수 ϵ 을 설정한다. ($k=0$)
- 단계 2. 현재 설계값 $\mathbf{b}^{(k)}$ 로 비선형 해석을 수행한다. 여기서 선형 강성행렬 \mathbf{K}_L 과 비선형 반응값들을 얻는다.
- 단계 3. 아래와 같이 등가하중을 계산한다.

$$\mathbf{f}_{eq}^{z,(k)} = \mathbf{K}_L(\mathbf{b})\mathbf{z}_N \quad (11a)$$

$$\mathbf{f}_{eq}^{\sigma,(k)} = \mathbf{K}_L(\mathbf{b})\mathbf{z}_L^\sigma \quad (11b)$$

- 단계 4. $k=0$ 이면 단계 5로 넘어가고, $k>0$ 이면 아래와 같이 종료조건을 검사한다.

$$\|\mathbf{f}_{eq}^{z,(k)} - \mathbf{f}_{eq}^{z,(k-1)}\| \leq \epsilon \quad (12a)$$

$$\|\mathbf{f}_{eq}^{\sigma,(k)} - \mathbf{f}_{eq}^{\sigma,(k-1)}\| \leq \epsilon \quad (12b)$$

종료조건을 만족하면 과정을 종료하고, 그렇지 않으면 단계 5로 넘어간다.

- 단계 5. 다음 정식화와 같이 선형 반응 구조최적설계를 수행한다.

Find $\mathbf{b}^{(k+1)} \quad (13a)$

to minimize $f(\mathbf{b}^{(k+1)}) \quad (13b)$

subject to $\mathbf{K}_L(\mathbf{b}^{(k+1)})\mathbf{z} - \mathbf{f}_{eq}^{z,(k)} = 0 \quad (13c)$

$$\mathbf{K}_L(\mathbf{b}^{(k+1)})\mathbf{z} - \mathbf{f}_{eq}^{\sigma,(k)} = 0 \quad (13d)$$

$$g_j(\mathbf{b}^{(k+1)}, \mathbf{z}, \hat{\sigma}) \leq 0 \quad (13e)$$

$$\mathbf{b}_{Li}^{(k+1)} \leq \mathbf{b}_i^{(k+1)} \leq \mathbf{b}_{Ui}^{(k+1)} \quad (13f)$$

식 (13c)과 식 (13d)의 등가하중 $\mathbf{f}_{eq}^{z,(k)}$, $\mathbf{f}_{eq}^{\sigma,(k)}$ 는 다중하중조건으로 최적화에 적용된다.

단계 6. 설계를 변경하고 사이클 번호는 $k=k+1$ 로 증가한다. 단계 2로 돌아간다.

3.2 알고리즘의 구현을 위한 프로그래밍

실제 설계 및 해석은 대부분 상용 소프트웨어를 사용하여 이루어진다. 특히, Abaqus 나 LS-Dyna와 같은 소프트웨어들은 대변형을 일으키는 비선형성이 큰 문제의 해석에서 널리 쓰이고 있다. 유한요소 해석과 함께 최적설계모듈이 장착된 소프트웨어로는 NASTRAN, GENESIS, Optistruct 등이 이용되고 있다.⁽¹⁶⁻¹⁹⁾ 등가하중법의 적용을 위해서는 강성행렬과 절점변위벡터의 곱 및 서로 다른 해석기 사이의 자료 교환 등 복잡한 과정을 거쳐야만 한다. 이러한 과정 중 많은 실수가 있게 되고 오차가 누적되면 뜻하지 않은 결과를 얻게 될 수도 있다. 등가하중법의 효율적 적용을 위해서는 모든 과정을 자동적으로 수행할 연결 프로그램이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 모든 과정의 자동화를 위한 프로그램을 개발하였다. Fig. 3은 개발된 프로그램이 외부 해석기들과 연동하여 등가하중법

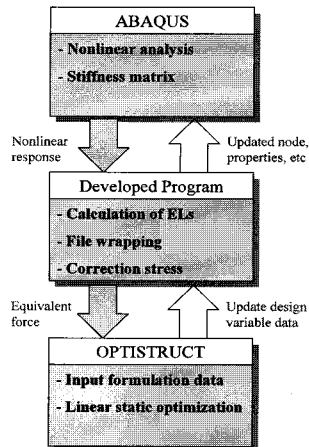


Fig. 3 NROELs Program

을 이용한 구조최적설계를 수행하는 구조를 나타낸다. 프로그램은 C 언어를 이용하여 개발되었다.⁽²⁰⁾

4. 사례연구

각 사례들은 기하 비선형 및 재료 비선형을 갖고 있으며, 둘 다 갖고 있는 문제도 있다. 사례들은 네 가지 방법으로 최적설계를 수행하여 결과를 비교하였다. 첫 번째 방법은 비선형성을 고려하지 않은 선형 구조최적설계 방법이며 Optistruct 7.0 을 사용하였다. 두 번째 방법은 등가하중법을 사용하였다. 등가하중법의 적용을 위해서 Abaqus 6.4 및 Optistruct 7.0 이 개발된 소프트웨어와 함께 사용되었다. 세 번째 방법은 유한차분법을 이용한 비선형 구조최적설계 방법이다. 이를 위해서 Visual DOC 5.0 및 DOT 5.5 가 사용되었다. 네 번째 방법인 반응표면법은 세 번째와 네 번째 사례에서 이용되었다. 이 방법은 설계변수가 수백 개인 문제에는 적용이 힘들기 때문에 설계변수의 수를 줄인 문제로 재 정의하여 결과를 비교하였다. 반응표면법을 이용한 최적화는 Visual DOC 5.0 을 이용하여 수행되었다.⁽¹⁶⁻¹⁹⁾

4.1 200 부재 평면 트러스

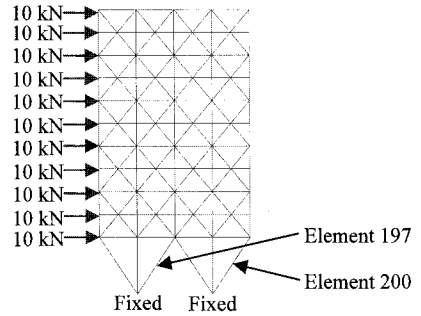
Fig. 4는 200부재 평면 트러스 구조물의 경계 및 하중조건을 나타낸다. 이 구조물은 좌우 대칭이며 설계변수는 96개의 서로 다른 단면적으로 설정한다. 기하 및 재료 비선형이 모두 고려되고, 응력 및 변위 제한조건이 적용된다. 목적함수는 질량을 최소화 하는 것이다. 구조물에 사용된 재료는 Fig.

Table 1 Nonlinearity of 200 truss structure

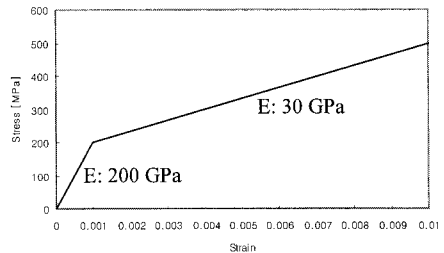
	Linear analysis	Nonlinear analysis
Max. stress	431.9 MPa	420.7 MPa
Max. displacement	200.6 mm	629.5 mm

Table 2 Optimum results for the 200 truss structure

	Linear optimization	Nonlinear optimization	
		NROEL method	Finite difference method
Number of iterations(cycles)	7	20	35
Optimum mass	2.207(initial) → 0.772	0.767	0.779
Maximum stress	256.7 MPa	250 MPa	250 MPa
Maximum displacement	478 mm	496 mm	500 mm
Maximum violation	2.68%	0.0%	0.0%
Total number of iterations for linear response optimization	7	53	0
Number of nonlinear analyses	0	20	3465
Violated constraint member	197, 200		
Active constraint member	196	148, 172, 197	126, 145, 148, 164, 172, 192, 197
CPU time	2 seconds	16 minutes	13 hours



(a) Boundary and loading conditions



(b) Stress-strain curve of the used material

Fig. 4 Structural shape and material of 200 Truss structure

4 와 같이 선형경화(linear hardening)곡선을 따르는 쌍일차(bilinear) 물성을 갖는 재료라 가정한다. 재료의 탄성계수는 200 GPa, 항복점 이후의 경화부분의 계수는 30 GPa, 항복강도는 200 MPa 이다. 이 문제의 비선형성을 확인해 보기 위해서 선형 해석 및 비선형 해석을 수행하였다. Table 1 에서 보는 바와 같이 이 문제는 응력 및 변위에서 큰 차이를 보인다. 문제의 정식화는 다음과 같다. 아래의 정식화를 이용해서 선형 구조최적설계 및 비선형 구조최적설계를 수행하였다.

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & b_i \quad (i = 1, \dots, 96) & (14a) \\ \text{to minimize} \quad & \text{mass} & (14b) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N) \mathbf{z}_N - \mathbf{f} = 0 & (14c) \\ & |z_{Nj}| - 500 \leq 0 \quad (j = 1, \dots, 77) & (14d) \\ & |\sigma_k| - 250 \leq 0 \quad (k = 1, \dots, 200) & (14e) \\ & 78.5 \leq b_i \leq 1256.0 & (14f) \end{aligned}$$

Table 2는 최적설계의 결과 및 비교를 나타낸다. 선형 구조최적설계 방법을 사용하여 변경된 설계는 비선형 해석 시 응력 제한조건을 2.68% 위배하였다. 반면, 등가하중법과 유한차분법을 이용한 비선형 최적화 방법은 모든 제한조건을 만족하였다. 이것은 비선형성을 고려하지 않은 최적설계 결과가 실제적으로 뜻하지 않은 위험을 초래할 수 있음을 의미한다. 목적함수는 세 방법 모두 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 주목해야 할 점은 비선형 해석의 횟수이다. 등가하중법은 20번의 비선형 해석과 선형 반응 구조최적설계 시 총 53번의 반복과정을 통해 최적화된 값을 찾아내었다. 반면, 유한차분법을 이용한 방법은 3465번의 비선형 해석이 소요되었다. 이것으로부터 비선형 민감도 정보를 직접 구하는 과정에는 많은 해석이 요구됨을 알 수 있다. 반면, 등가하중법은 비선형 민감도 정보를 직접 구하지 않고 선형 민감도 정보를 이용하므로 비선형 해석의 횟수 및 소요 시간 면에서 효율적이다. 최적화 결과들의 제한조건 만족도를 살펴보면 선형 구조최적설계 결과에서는 197번과 200번 부재에서 응력 제한조건을 위배하였다. 반면 비선형 구조최적설계 결과에서는 제한조건을 위배한 부재가 존재하지 않았다. 대신 활성화 제한조건에 해당되는 부재들이 다수 발생하였으며 전반적으로 유한차분법을 이용한 최적설계 결과에서 더 많은 부재들이 응력 상하한치에 도달하였다. 최대 변위는 구조물의 좌측 최 상단에 위치한 1번 절점에서 발생하였으며, 세 방법 모두 변위 제한조건을 만족하는 결과를 얻었다. 이 문제에서 등가하중법은 다른 두 방법에 비해서 더 많은 무게를 줄이면서도 응력이 집중되는 부재의 수는 감소시켰다는 것을 알 수 있다. 최적화에 소요된 시간 면에서도 유한차분법을 이용한 방법보다 우수했다.

4.2 280 개 셀요소로 이루어진 외팔보형 구조물

Fig. 5는 280개의 셀요소로 이루어진 외팔보형 구조물의 경계조건 및 하중조건을 나타낸다. 이 구조물의 비선형성을 확인해 보기 위해 선형 및

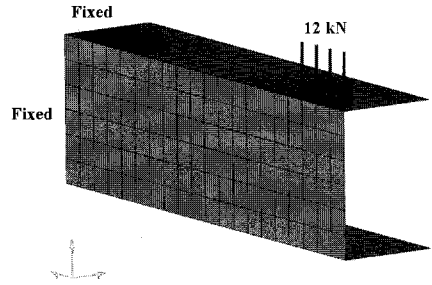


Fig. 5 Boundary and loading conditions of the cantilever type 280 shell structure

Table 3 Nonlinearity of 280 shell structure

	Linear analysis	Nonlinear analysis
Max. stress	91.0 MPa	93.7 MPa
Max. displacement	-0.7 mm	-0.9 mm

비선형 해석을 수행하였다. 비선형 해석은 기하학적 비선형성만을 고려하였다. Table 3은 해석 결과를 나타낸다.

설계변수는 모든 요소들의 두께들로 선정하였다. 총 설계변수의 숫자는 280개이며, 모든 요소들의 von-Mises 응력을 제한조건으로 선정하였다. 최적설계 정식화는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & b_i \quad (i = 1, \dots, 280) & (15a) \\ \text{to minimize} \quad & \text{mass} & (15b) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N) \mathbf{z}_N - \mathbf{f} = 0 & (15c) \\ & |\sigma_j| - 60 \leq 0 \quad (k = 1, \dots, 280) & (15d) \\ & 3.0 \leq b_i \leq 7.0 & (15e) \end{aligned}$$

Table 3 의 결과를 보면 이 문제는 비선형성이 크지 않은 것으로 판단할 수 있다. 하지만 Table 4 의 최적설계 결과를 보면 비선형 반응 구조최적설계가 반드시 필요한 문제임을 알 수 있다. 선형 구조최적설계 방법을 사용하여 변경된 설계는 목적함수인 질량이 다른 두 방법에 비해 크게 감소하였으나, 비선형 해석 시 응력 제한조건을 350.8% 위배하였다. 반면, 등가하중법과 유한차분법을 이용한 비선형 최적화 방법은 질량이 증가한 대신 비선형 해석 시 모든 제한조건을 만족하였다. 이 사례에서도 비선형성을 고려하지 않은 최적설계 결과가 실제적으로 뜻하지 않은 위험을 초래할 수 있음을 잘 볼 수 있다. 등가하중법과 유한요소법을 이용한 방법 모두 동일한 위치에서 활성화

Table 4 Optimum results for the 280 shell structure

	Linear optimization	Nonlinear optimization	
		NROEL method	Finite difference method
Number of iterations(cycles)	6	10	7
Optimum mass	7.59 (initial) → 6.94	7.89	7.76
Maximum stress	270.5 MPa	60 MPa	60 MPa
Maximum violation	350.8%	0.0%	0.0%
Total number of iterations for linear response optimization	6	30	0
Number of nonlinear analyses	0	10	1975
Violated constraint member	Total number of violated constraint member is 78.		
Active constraint member		96, 128, 208	96, 128, 208
CPU time	15 seconds	22 minutes	8 hours 16 minutes

제한조건에 해당하는 응력분포를 보이고 있다. 목적함수인 질량에서는 유한차분법을 이용한 방법이 더 좋은 이득을 얻고 있다. 비선형 해석의 횟수를 살펴보면 등가하중법은 단지 10번의 비선형 해석과 선형 반응 구조최적화 시 총 30번의 반복과정을 통해 최적화된 값을 찾아냈지만, 유한차분법을 이용한 방법은 1975번의 비선형 해석이 소요되었다. 최적설계에 소요된 시간도 등가하중법을 이용한 방법이 훨씬 효율적임을 볼 수 있다.

4.3 144 개 쉘요소로 이루어진 아치형 구조물

이 사례에서는 앞의 세가지 방법 외에 반응표면법을 추가로 적용하여 결과를 비교하였다. 반응표면법은 설계변수의 수가 수백 개에 달하는 문제에는 적용이 곤란하므로 설계변수 3개의 문제로 재정의하여 최적화를 수행하였다. 설계변수 144개의 문제에 대해 먼저 설명한다.

Fig. 6은 144개의 쉘요소로 이루어진 아치형 구조물의 경계조건 및 하중조건을 나타낸다. 이 구조물은 기하학적 비선형성을 고려하였다. 구조물의 비선형성을 확인해 보기 위해 선형 및 비선형 해석을 수행하였다. Table 5은 해석 결과를 나타낸다. 설계변수는 144개 모든 요소들의 두께들로 하였으며, 응력 제한조건을 선정하였다. 최적화를 위한 정식화는 아래와 같다.

$$\text{Find } b_i \quad (i = 1, \dots, 144) \quad (16a)$$

$$\text{to minimize mass} \quad (16b)$$

$$\text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N)\mathbf{z}_N - \mathbf{f} = 0 \quad (16c)$$

$$|\sigma_j| - 300 \leq 0 \quad (k = 1, \dots, 144) \quad (16d)$$

$$1.0 \leq b_i \leq 5.0 \quad (16e)$$

Table 6 을 보면 선형 최적설계의 결과는 비선형 해석 시 13.3%의 응력 제한조건 위반을 보이고 있다. 등가하중법과 유한차분법에 의한 비선형 최

Table 5 Nonlinearity of 144 shell structure

	Linear analysis	Nonlinear analysis
Max. stress	611.2 MPa	558.0 MPa
Max. displacement	18.6 mm	17.4 mm

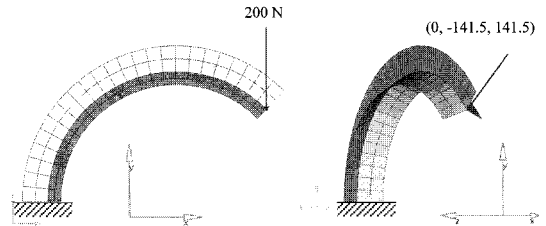


Fig. 6 Boundary and loading conditions of the arch type 144 shell structure

적설계 결과는 모두 제한조건을 만족하였지만 목적함수인 질량에서는 큰 차이를 보이고 있다. 그 이유는 이 구조물의 비선형성이 매우 크기 때문이다.

등가하중법은 16번의 비선형 해석과 93번의 선형 최적화 반복 과정을 거쳐서 설계를 완료하였다. 반면, 유한차분법은 6번의 반복과정 동안 888번의 비선형 해석이 수행되었다. 설계변수의 수가 총 144개 이므로 유한차분법은 설계 방향의 계산을 위해서 한 반복과정 동안 최소 144번의 해석과 같이 탐색을 위한 추가적인 해석이 수행되었음을 의미한다. 두 방법의 결과 모두 최대 응력은 구조물의 하단부에서 발생하였다. 해석 횟수 및 시간 효율 면에서 등가하중법이 우수한 결과를 얻을 수 있었다.

설계변수의 수를 3개로 재 정의하여 비선형 구조최적설계를 수행하여 보았다. Fig. 7에서 보이는 바와 같이 호의 길이방향 단면을 이루는 세 개

의 날개 두께를 각각 설계변수로 선정하였다. 이 용된 반응표면법은 Visual DOC 5.0에 탑재되어 있는 RSAO(Response surface approximation optimization) 방법을 사용하였고, 회귀함수는 2차 근사식의 대각 항만을 사용 하였다.(Mixed-Quadratic)^(11,19) Table 7에서 결과를 비교하였다. 앞의 144개 설계변수를 사용했을 때와 마찬가지로 등가하중법은 제한조건을 만족하면서 가장 좋은 해를 얻었다. 유한차분법과 반응표면법의 결과 역시 제한조건은 만족하였으나,

목적함수인 질량에서 큰 차이를 보였다. 비선형 해석 횟수를 살펴보면 등가하중법은 10번, 유한차분법은 61번, 반응표면법은 18번이 소요되었다. 반응표면법은 유한차분법보다는 해석 횟수에서 이득을 갖지만, 질량 최소화에서는 가장의 나쁜 결과를 얻었다. 이것은 등가하중법과 유한차분법이 민감도 기반 최적화 기법인데 반해, 반응표면법은 민감도를 직접 구하지 않는 근사화 기법이기 때문인 것으로 판단된다.

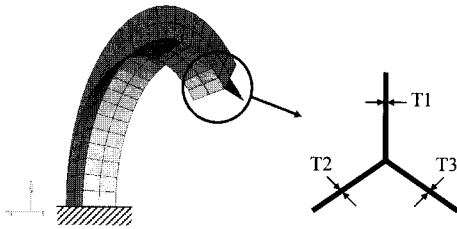


Fig. 7 3 design variables of the arch type 144 shell structure

4.4 평면 커넥팅 로드의 형상최적설계

Fig. 8은 평면 커넥팅 로드의 경계조건 및 하중조건을 나타낸다. 이 문제는 총 377개의 쉘 요소로 이루어져 있으며, 중심점으로부터 내벽을 이루는 요소들까지의 거리를 일정하게 유지하기 위한 32개의 갭 요소(gap element)가 사용되었다. 사용된 재료는 Fig. 9과 같이 쌍일차 곡선을 갖는 선형경화 재료이다. 재료 비선형 이외의 비선형 조건은 고려되지 않았다. Table 8은 초기 모델의 선형 및 비선형 결과를 나타낸다.

Table 6 Optimum results for the arch type 144 shell structure (144 design variables)

	Linear optimization	Nonlinear optimization	
		NROEL method	Finite difference method
Number of iterations(cycles)	14	16	6
Optimum mass	2.295 (initial) → 1.786	1.855	2.312
Maximum stress	339.9 MPa	301.1 MPa	299.8 MPa
Maximum violation	13.3%	0.4%	0.0%
Total number of iterations for linear response optimization	14	93	0
Number of nonlinear analyses	0	16	888
Violated constraint member	49, 52, 53, 130, 133, 137, 139, 140, 141		
Active constraint member	60, 62, 138	68	60
CPU time	11 seconds	21 minutes	6 hours 31 minutes

Table 7 Optimum results for the arch type 144 shell structure (3 design variables)

	Linear optimization	Nonlinear optimization		
		NROEL method	Finite difference method	Response surface method
Number of iterations(cycles)	8	10	4	11
Optimum mass	2.295 (initial) → 2.451	2.293	2.589	2.940
Maximum stress	356.3 MPa	298.7 MPa	300.2 MPa	290.4 MPa
Maximum violation	18.8%	0.0%	0.0%	0.0%
Total number of iterations for linear response optimization	8	29		
Number of nonlinear analyses		10	61	18
Violated constraint member	49, 141		49	
Active constraint member			141	
CPU time	3 seconds	4 minutes	7 min. 56 sec.	2 min. 19 sec.

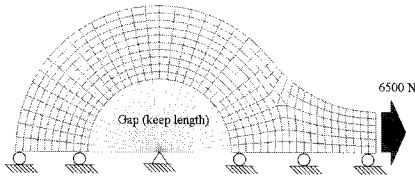


Fig. 8 Boundary and loading conditions

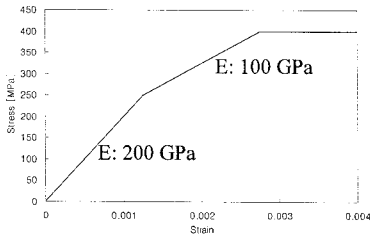


Fig. 9 Stress-strain curve of used material

Table 8 Nonlinearity of planar connecting rod

	Linear analysis	Nonlinear analysis
Max. stress	274.5 MPa	240.8 MPa

형상의 변화 방향을 유도하기 위한 세 개의 섭동벡터가 사용되었다. 설계변수는 각 섭동벡터들의 크기를 결정하는 계수로 선정하였다. 응력 제한조건이 적용되었으며 정식화는 아래와 같다.

$$\text{Find } b_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17a)$$

$$\text{to minimize mass} \quad (17b)$$

$$\text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{b}, \mathbf{z}_N)\mathbf{z}_N - \mathbf{f} = 0 \quad (17c)$$

$$|\sigma_j| - 230 \leq 0 \quad (k = 1, \dots, 377) \quad (17d)$$

이 사례에 대해서 선형 구조최적설계와 등가하중법, 유한차분법, 반응표면법의 네 가지 방법을 사용하여 최적화를 수행하였다.

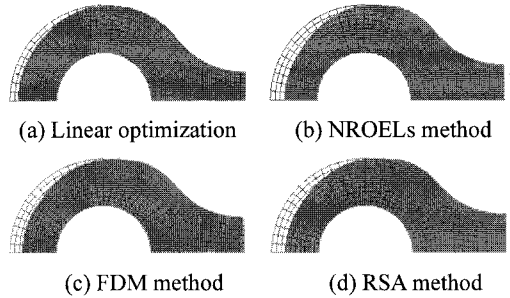


Fig. 10 The result shape of optimization

Table 9은 최적설계의 결과 및 비교를 나타낸다. 선형 최적화 방법을 사용한 결과는 응력 제한조건을 4.04% 위배하였으나, 비선형성을 고려한 다른 방법들은 응력 제한조건을 만족하였다. 유한차분법을 이용한 구조최적설계 방법이 목적함수인 질량에서 가장 작은 값을 얻었다. 최적화에 사용된 비선형 해석의 횟수에서 등가하중법은 유한차분법과 반응표면법을 이용한 방법에 비해 보다 효율적이었다. 하지만, 전체 최적화 시간에서는 더 오래 걸렸음을 알 수 있다. 그 이유는 등가하중법의 적용 시 발생하는 선형 최적설계에서 25번의 반복과정에 걸린 시간이 비교적 크기 때문이다. 이 사례와 같이 비선형 해석 시간과 선형 최적화 시간의 차이가 크지 않거나 오히려 선형 해석 시간이 더 오래 걸리는 경우에는 등가하중법이 더 비효율적일 수 있음을 의미한다. 그리고 설계변수의 수가 적은 경우 유한차분법의 특성상 민감도 정보의 계산 시간이 많이 감소하기 때문에 등가하중법보다 더 효율적일 수 있다. Fig. 10은 네 가지 방법을 통해 최적화 된 형상을 나타낸다. 그림에서 볼 수 있듯이 선형 최적설계 결과는 비선형성을 고려한 다른 방법들이 얻은 최적설계 결과와 다른 형상을 갖게 됨을 알 수 있다.

Table 9 Optimum results for a planar connection rod structure

	Linear optimization	Nonlinear optimization		
		NROEL method	Finite difference method	Response surface method
Number of iterations(cycles)	5	6	4	13
Optimum mass	8.02 (initial) → 7.68	7.80	7.67	7.91
Maximum stress	239.3 MPa	229.1 MPa	230.5 MPa	230.3 MPa
Maximum violation	4.04%	0.0%	0.2%	0.0%
Total number of iterations for linear response optimization	5	25	0	0
Number of nonlinear analyses		6	28	20
Violated constraint member	209			
Active constraint member	208	209	202, 209	202, 209
CPU time	3 seconds	6 minutes	4 minutes	5 min. 13 sec.

5. 결 론

등가하중은 비선형 해석 시 발생하는 반응장과 동일한 반응장을 유발 할 수 있는 선형 해석에서의 하중으로 정의한다. 등가하중법의 주요한 특징은 설계 방향의 결정을 위한 민감도 정보 계산에서 비선형 해석을 직접 이용하지 않는다는 것이다. 대신 등가하중을 이용하여 비선형 반응장과 동일한 반응장을 고려하는 선형 해석으로부터 민감도 정보를 계산한다.

등가하중법의 효율성을 보이기 위해 보다 실제적인 사례에 적용하여 보았다. 복잡한 알고리즘과 상용 소프트웨어들간의 연동을 원활히 할 수 있는 프로그램을 개발하여 전 과정을 자동화 하였고 원래 알고리즘에서 실제 문제 적용 시 오차가 유발될 수 있는 보정벡터를 수정 보완하였다. 효율성의 비교를 위하여 각 문제들을 선형 최적설계 방법과 유한차분법을 이용한 기존의 방법으로 같이 풀어보았다. 결과를 비교해 보았을 때, 선형 최적설계로부터 얻은 결과들은 비선형 해석 시 제한조건을 만족하지 못하는 것을 알 수 있었고, 비선형 구조최적설계의 필요성을 알 수 있었다. 등가하중법은 유한차분법을 이용한 방법과 같이 모든 제한조건을 만족하면서도 비선형 해석의 횟수 및 소요시간에서 더 효율적임을 알 수 있었다. 그러나 설계변수의 수가 적고 비선형 해석 시간이 짧은 문제인 경우, 오히려 등가하중법이 다른 방법들에 비해 비효율적일 수도 있다.

이 연구를 통해 등가하중법은 민감도 기반 비선형 반응 구조최적설계 방법으로서 유용하며 특히, 비선형 해석의 소요 시간이 크고 설계변수의 수가 많은 문제에서 더욱 효율적임을 알 수 있었다.

후 기

이 논문은 2007년도 2 단계 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Reddy, J. N., 2004, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press Inc., New York, U.S.A.
- (2) Bathe, K. J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U.S.A.
- (3) Robert, D. C., David, S. M., Michael, E. P., Robert, J. W., 2002, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons. Inc., New York, U.S.A.
- (4) Ryu, Y. S., Haririan, M., Wu, C. C. and Arora, J. S., 1985, "Structural design sensitivity analysis of nonlinear response," *Computers and Structures*, Vol. 21, No. 1/2, pp. 245~255.
- (5) Wu, C. C. and Arora, J. S., 1987, "Design sensitivity analysis and optimization of nonlinear structural response using incremental procedure," *AIAA Journal*, Vol. 25, No. 8, pp. 1118~1125.
- (6) Park, G. J., 2007, *Analytic Methods in Design Practice*, Springer-Verlag, Germany. (will be published)
- (7) Haftka, R. T. and Gürdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- (8) Arora, J. S., 2004, *Introduction to Optimum Design*, Elsevier Inc., U.S.A.
- (9) Thomas, H., 1996, "Optimization of structures designed using nonlinear FEM analysis," *Proceedings of the 37th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conf.*, AIAA-96-1385-CP, pp. 604~608.
- (10) Suleman, A. and Sedaghati, R., 2005, "Benchmark case studies in optimization of geometric nonlinear structures," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 30, pp. 273~296.
- (11) Raymond, H. M. and Douglas, C. M., 2002, *Response Surface Methodology*, John Wiley & Sons. Inc., New York, U.S.A.
- (12) Park, K. J. and Park, G. J., 2004, "Structural optimization of truss with nonlinear response using equivalent linear loads," *Transactions of the KSME (A)*, Vol. 28, No. 4, pp. 467~474.
- (13) Park, K. J. and Park, G. J., 2005, "Structural optimization for nonlinear behavior using equivalent static loads (I)," *Transactions of the KSME (A)*, Vol. 29, No. 8, pp. 1051~1060.
- (14) Park, K. J. and Park, G. J., 2005, "Structural optimization for nonlinear behavior using equivalent static loads (II)," *Transactions of the KSME (A)*, Vol. 29, No. 8, pp. 1061~1069.
- (15) Shin, M. K., Park, K. J. and Park, G. J., 2007, "Optimization of structures with nonlinear behavior using equivalent loads," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. (will be published)
- (16) ABAQUS/Standard Version 6.4, *User's Manual*, 2004, Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, RI, U.S.A.
- (17) Optistruct Version 7.0, *User's Manual*, 2004, Altair Engineering, Inc., U.S.A.
- (18) DOT Version 5.x *User's Manual*, 2001, Vanderplaats Research & Development, Inc., Colorado Springs, U.S.A.
- (19) Visual DOC Manuals, <http://www.vrand.com>, 2004, Vanderplaats Research & Development, Inc., Colorado Springs, U.S.A.
- (20) Stroustrup, B., 2000, *The C++ programming language*, Addison Wesley, U.S.A.