한국정밀공학회지 제 24 권 제 11 호 (2007 년 11 월)
Journal of the Korean Society for Precision Engineering Vol. 24, No. 11, November 2007

제어입력 크기제한을 갖는 시스템에서 이득 스케줄 상태되먹임-외란앞먹임 제어 - 이론

강민식#

Gain Scheduled State Feedback and Disturbance Feedforward Control for Systems with Bounded Control Input - Theory

Min Sig Kang#

ABSTRACT

Abstract : A new optimal state feedback and disturbance feedforward control design in the sense of minimizing L_2-gain from disturbance to control output is proposed for disturbance attenuation of systems with bounded control input and measurable disturbance. The controller is derived in the framework of linear matrix inequality(LMI) optimization. A gain scheduled state feedback and disturbance feedforward control design is also suggested to improve disturbance attenuation performance. The control gains are scheduled according to the proximity to the origin of the state of the plant and the magnitude of disturbance. This procedure yields a stable linear time varying control structure that allows higher gain and hence higher performance controller as the state and the disturbance move closer to the origin. The main results give sufficient conditions for the satisfaction of a parameter-dependent performance measure, without violating the bounded control input condition.

Key Words : Input saturation (입력포화), Disturbance feedforward (외란앞먹임), State feedback (상태되먹임), Gain scheduled control (이득 스케쥴제어), Linear Matrix Inequality (LMI, 선형행렬부등식), L_2-gain (L_2-이득)

기호설명

$A, B_1, B_2, C_1, D_{11}, D_{12}$ = system matrices
K_k = k-th feedback gain
Q, F_k = controller variable matrices
V_k = Lyapunov function
x, u, w = state variable, control input, and disturbance input, respectively
$\bar{u}$ = magnitude of control input saturation
$\bar{w}$ = maximum Euclidian norm of w
z_∞ = control output
α, β = parameters used for control design

☞ 접수일: 2007년 3월 27일; 게재승인일: 2007년 8월 27일
교신저자: 경원대학교 기계자동차공학과
E-mail: mskang@kyungwon.ac.kr Tel: (031) 750-5524

1. 서론

제어계에서 사용되는 모든 액튜에이터는 용량의 제한을 갖는다. 액튜에이터의 용량이 사용 조건에서 충분할 경우 용량 제한을 고려하지 않고 제어기를 설계할 수 있지만, 충분하지 않은 경우 이 제한을 고려하여 제어기를 설계해야 된다. 그 동안 제한된 액튜에이터 용량 하에서 안정하고 우수한 제어성능을 얻을 수 있는 제어기 설계방법에 관한 다양한 연구가 진행되어 왔다.[1,2]

최근에는 제어입력의 제한조건을 직접 제어기 설계에 고려하여 계의 안정성과 제어성능을 보장하는 방법이 제시되었다.[3-7] 이 연구들에서는 수치해석적인 방법인 선형행렬부등식(LMI:Linear Matrix Inequality)을 이용하여 주어진 제한조건을 만족하고 제어성능을 최적화하는 제어기를 제시하고 있다. LMI 방법은 해석적으로 풀기 어려운 비선형 및 다중함수최적화 등의 다양한 분야에 적용되고 있으며[8], 또한 강인제어, 다중입출력계의 다중목적함수(multi-objective function) 최적제어, 이득 스케쥴제어(gain scheduling control)등에 이용되고 있다.[9-12] LMI는 MatLab을 이용하여 쉽게 풀 수 있다.

주어진 외란의 조건과 제어입력제한을 만족하는 제어기는 최대 외란 조건에서 설계되므로 강한 보존적(conservative) 특성을 갖게 되며, 결과적으로 가용한 제어입력을 충분히 사용하지 못하게 된다. 이득 스케쥴 제어는 이러한 단점을 보완하기 위해 제안된 방법으로 제어입력을 효과적으로 사용함으로써 제어성능을 향상시킬 수 있다.[9-12]

제어이득 스케쥴 방법은 일반적으로 계의 파라미터 변화에 따라 제어이득을 변화시키는 목적으로 사용하여 왔는데[13], 위의 이득 스케쥴 제어 방법은 상태되먹임제어를 이용하며, 계의 상태에 따라 제어 이득을 변화시키는, 즉 계의 상태가 원점에 가까울수록 더 큰 제어 이득을 사용함으로써 고정이득제어에 비해 더 많은 제어입력을 사용하며, 결국 제어성능을 개선하는 제어방법이다.

만일 외란을 측정할 수 있을 경우 외란앞먹임 제어를 적용하면 외란응답을 보다 효과적으로 줄일 수 있다.

본 논문에서는 외란이 측정가능하고 외란과 제어입력이 제한을 갖는 계에서 L_2-이득을 최소화하는 관점에서 상태되먹임-외란앞먹임제어 설계방법을 제시한다. 또한 주어진 제어입력의 효과적 활용을 통해 제어성능 향상을 위해 상태되먹임-외란앞먹임 이득 스케쥴제어를 제안한다.

2. 제어기 이득 설계

다음 식으로 기술되는 선형계를 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \tag{1a}$$

$$z_\infty = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \tag{1b}$$

여기서 $x \in R^n$, $w \in R^{m_w}$, $u \in R^{m_u}$, z_∞은 각각 계의 상태변수벡터, 외란입력벡터, 제어입력벡터, 제어출력벡터이다. 행렬 A, B_1, B_2, C_1, D_{11}, D_{12}는 시스템 행렬이다. 이 계에서 제어입력과 외란은 다음과 같은 제한이 존재하는 경우를 고려한다. 단, 제어입력은 서술이 편의를 위해 단일입력계로 가정한다. 이 후 제시되는 제어기 설계 방법은 쉽게 다중입력계로 확장할 수 있다.

$$\| u(t) \| \le \bar{u}, \ \forall t \ge 0 \tag{2a}$$

$$\| w(t) \| \le \bar{w}, \ \forall t \ge 0 \tag{2b}$$

여기서 $\| * \|$는 $*$ 의 Euclidian 노옴(norm)을 나타낸다. 식 (2a)의 제어입력 크기 제한은 액튜에이터의 포화를 나타내며, 이미 주어진 값이다. 식 (2b)에서 외란의 최대크기 $\bar{w}$ 는 일반적으로 정확하게 주어지지 않으나, 적절히 큰 값으로 설정할 수 있다.

2.1 스케쥴 상태되먹임 제어이득 설계

식 (1)의 시스템을 상태되먹임제어를 할 경우, 즉 $u = Kx$ 를 적용할 경우 식 (2)의 조건을 만족하는 제어이득 K 는 식 (2b)를 만족하는 모든 외란을 고려하여 설계된다. 그러나 실제로 외란은 최대크기 $\bar{w}$ 보다 작은 시간영역이 대부분을 차지하기 때문에 고정제어이득 K 를 적용할 경우 가용한 제어입력을 충분히 사용하지 못하게 된다. 따라서 제어입력의 제한조건을 만족하는 한도 내에서 계의 상태가 원점에 가까울수록 더 큰 제어이득을 사용하는 스케쥴제어를 적용한다면 제어 성능을 향상시킬 수 있다. 본 절에서는 스케쥴 상태되먹임제어 방법을 간략히 소개한다.

우선 다음과 같이 상태변수의 영역을 정의한다.

$$\epsilon_k = \left\{ x : x^T Q^{-1} x < \frac{\bar{w}^2}{\beta_k^2} \right\}, \ \beta_1 = 1 \tag{3}$$

즉, ϵ_k 는 $x^TQ^{-1}x = \overline{w}^2/\beta_k^2$ 로 정의되는 타원체 내부의 상태변수영역을 나타낸다. 따라서 β_k 가 클수록 계의 상태는 원점에 가까워진다.

정리 1. 스케쥴 상태되먹임 제어[10]

식 (2)의 제한조건을 갖는 식 (1)의 계에서 변수 $\{\beta_m > \beta_{m-1} > \circ \circ \circ \beta_2 > \beta_1 = 1\}$ 에 대해 다음의 선형행렬부등식들을 만족하며 γ_k^2 를 최소화하는 양한정(positive definite) 대칭 행렬 $Q^T = Q > 0$ 와 행렬 $F_1, F_2, .., F_m$, 그리고 양의 변수 α가 존재하고,

$1 \le k \le m$ 일 때

$$\begin{bmatrix} Y_k & * & * \\ B_1^T & -\gamma_k^2 I & * \\ C_1Q + D_{12}F_k & D_{11} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{4a}$$

$$\begin{bmatrix} Q & * \\ F_k^T & \beta_k^2 \dfrac{\overline{u}^2}{\overline{w}^2} \end{bmatrix} > 0 \tag{4b}$$

$k = 1$일 때

$$\begin{bmatrix} Y_k + \alpha Q & * \\ B_1^T & -\alpha I \end{bmatrix} < 0,\ \alpha > 0 \tag{4c}$$

여기서 $Y_k = AQ + QA^T + B_2F_k + F_k^TB_2^T$ 이며, * 는 대칭행렬 요소를 나타낸다.

제어기 $u = K_kx$ 의 이득 K_k 를 다음과 같이 선정한다면,

$$K_k = \begin{cases} F_kQ^{-1}\ when\ \dfrac{\overline{w^2}}{\beta_{k+1}^2} < V(x) \le \dfrac{\overline{w^2}}{\beta_k^2} \\ \qquad k = 1, 2, ..., m-1 \\ F_mQ^{-1}\ when\ \ V(x) \le \dfrac{\overline{w^2}}{\beta_m^2} \end{cases} \tag{5}$$

여기서 $V(x) = x^TQ^{-1}x$

1) 폐회로 안정성을 보장하며, 외란 w로부터 제어출력 z_∞까지의 L_2-이득은 γ_1보다 작다. 즉,

$$\int z_\infty^T z_\infty dt < \gamma_1^2 \int w^T w dt$$

2) 폐회로 상태벡터는 항상 ϵ_1에 존재하며, 제어입력은 식 (2a)의 제한조건을 만족한다.

3) 외란 w로부터 제어출력 z_∞까지의 L_2-이득은 $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \ldots\ldots \ge \gamma_m$의 관계를 갖는다.

이 정리의 증명은 참고문헌 [10]과 같으며, 이후 정리의 증명에 필요하므로 부록 A.1에 수록한다.

제어기 설계 순서는 α와 β_k를 선정한 뒤 $k = 1$ 일 때 식 (4a), (4b), (4c)에서 Q, K_1, γ_1을 얻은 다음, 이 α, β_k, Q와 식 (4a), (4b)를 이용하여 K_k, γ_k, $k \ge 2$를 설계한다. 실제 제어 시에는 측정된 상태변수 x를 이용하여 $x^TQ^{-1}x$를 계산하고, 식 (5)에서 이 값이 포함된 가장 작은 타원체 ϵ_k를 찾아 해당 제어이득 K_k를 제어기 이득으로 사용한다. 이 제어기의 특징은 참고문헌 [10]의 설명을 참조한다.

2.2 스케쥴 상태되먹임-외란앞먹임 제어이득 설계

외란을 측정할 수 있을 경우 외란 앞먹임 제어는 외란응답 감소에 효과적이다. 따라서 상태되먹임 제어에 외란 앞먹임 제어를 추가하면 상태되먹임 제어만을 적용한 경우에 비해 제어성능을 향상시킬 수 있다. 본 절에서는 2.1절에 소개된 스케쥴 제어의 장점을 적용하여 제어성능을 향상시키기 위해 외란을 측정할 수 있을 경우 계의 상태에 따라 상태되먹임제어이득과 외란앞먹임 제어이득을 결정하는 새로운 방법을 제시한다.

정리 2. 스케쥴 상태되먹임-외란앞먹임 제어

식 (2)의 제한조건을 갖는 식 (1)의 계에서 변수 $\{\beta_m > \beta_{m-1} > \cdot \cdot \cdot \beta_2 > \beta_1 = 1\}$ 와 상수 σ 에 대해 다음의 선형행렬부등식들을 만족하며 γ_k^2 를 최소화하는 양한정 대칭행렬 $Q^T = Q > 0$와 행렬 $F_1, F_2 .., F_m$, 행렬 $K_{f1}, K_{f2}, \ldots, K_{fm}$, 그리고 양의 변수 α가 존재하고,

$1 \le k \le m$ 일 때

$$\begin{bmatrix} Y_k & * & * \\ B_1^T + K_{fk}^TB_2^T & -\gamma_k^2 I & * \\ C_1Q + D_{12}F_k & D_{11} + D_{12}K_{fk} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{6a}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma Q & * & * \\ 0 & \dfrac{(1-\sigma)I}{\beta_k^2} & * \\ F_k & K_{fk} & \beta_k^2 \dfrac{\overline{u}^2}{\overline{w}^2} \end{bmatrix} > 0, 0 < \sigma < 1 \tag{6b}$$

$k=1$ 일 때

$$\begin{bmatrix} Y_k+\alpha Q & * \\ B_1^T+K_{fk}^TB_2^T & -\alpha I \end{bmatrix} < 0,\ \alpha>0 \tag{6c}$$

여기서 $Y_k = AQ+QA^T+B_2F_k+F_k^TB_2^T$

제어기를 다음과 같이 선정한다면,

$$u=\begin{cases} F_kQ^{-1}x + K_{fk}w & when\ \dfrac{\overline{w^2}}{\beta_{k+1}^2} < V(x) \le \dfrac{\overline{w^2}}{\beta_k^2}, \\ & k=1,2,\dots,m-1 \\ F_mQ^{-1}x + K_{fm}w & when\ \ V(x) \le \dfrac{\overline{w^2}}{\beta_m^2} \end{cases} \tag{7}$$

1) 폐회로 안정성을 보장하며, 외란 w로부터 제어출력 z_∞까지의 L_2-이득은 γ_1보다 작다. 즉,

$$\int z_\infty^T z_\infty dt < \gamma_1^2 \int w^T w dt$$

2) 폐회로 상태벡터는 항상 ϵ_1에 존재하며, 제어입력은 식 (2a)의 제한조건을 만족한다.

3) 외란 w로부터 제어출력 z_∞까지의 L_2-이득은 $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \dots\dots \ge \gamma_m$의 관계를 갖는다.

증명

1) 제어기 $u=F_kQ^{-1}x+K_{fk}w$를 식 (1)의 시스템에 적용한 폐회로 상태공간방정식은 다음과 같다.

$$\dot{x} = A_cx + B_cw \tag{8a}$$

$$z_\infty = C_cx + D_cw \tag{8b}$$

여기서

$$\begin{aligned} A_c &= A+B_2F_kQ^{-1} \\ B_c &= B_1+B_2K_{fk} \\ C_c &= C_1+D_{12}F_kQ^{-1} \\ D_c &= D_{11}+D_{12}K_{fk} \end{aligned} \tag{8c}$$

식 (8a)의 선형계에서 다음 행렬부등식을 만족하며 γ_k를 최소화하는 양한정대칭행렬 $Q=Q^T$와 행렬 F_k, K_{fk}가 존재하면

$$\begin{bmatrix} A_cQ+QA_c^T & * & * \\ B_c^T & -\gamma_k^2 I & * \\ C_cQ & D_c & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

폐회로는 안정하며 w로부터 z_∞까지의 L_2-이득은 γ_k보다 작다.[10]

식 (9)에 식 (8c)의 관계를 대입하면 식 (6a)가 되므로 따라서 식 (6a)를 만족하면 폐회로 안정성을 보장되며, 또한 정리 3에서 $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \dots\dots \ge \gamma_m$이므로 w로부터 z_∞까지의 L_2-이득은 γ_1보다 작게 된다.

2) 식 (6c)에서 폐회로 상태벡터가 항상 내부에 존재하는 타원체 ϵ_1을 정할 수 있으며, 식 (7)의 제어기는 식 (6b)로부터 제어입력에 대한 제한조건의 만족성을 보장할 수 있다. 즉, 식 (6b)에서

$$\begin{bmatrix} \sigma Q & 0 \\ 0 & \dfrac{(1-\sigma)I}{\beta_k^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_k^T \\ K_{fk}^T \end{bmatrix} \frac{\overline{w^2}}{\beta_k^2 \overline{u^2}} \begin{bmatrix} F_k & K_{fk} \end{bmatrix} > 0 \tag{10}$$

식 (10)에서 행렬 $\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$를 앞과 뒤에 곱하면

$$\begin{bmatrix} \sigma Q^{-1} & 0 \\ 0 & \dfrac{(1-\sigma)I}{\beta_k^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{bk}^T \\ K_{fk}^T \end{bmatrix} \frac{\overline{w^2}}{\beta_k^2 \overline{u^2}} \begin{bmatrix} K_{bk} & K_{fk} \end{bmatrix} > 0 \tag{11}$$

여기서 $K_{bk}=F_kQ^{-1}$이다.

식 (11)에 $[x\ \ w]^T$를 앞에 $[x\ \ w]$을 뒤에 곱하고 $u=K_{bk}x+K_{fk}w$의 관계를 이용하여 다시 쓰면

$$\sigma x^TQ^{-1}x + \frac{(1-\sigma)}{\beta_k^2} w^Tw > \frac{\overline{w^2}}{\beta_k^2 \overline{u^2}} u^Tu \tag{12}$$

와 같다. 제어입력은 식 (7)에 의해 결정되므로, $x^TQ^{-1}x \le \overline{w^2}/\beta_k^2$ 이고, 또한 $w^Tw < \overline{w^2}$ 이므로 식 (12)에서 제어입력은 식 (2a)의 제한조건을 만족한다.

3) 식 (10)을 다시 쓰면

$$\begin{bmatrix} \sigma\beta_k^2 Q^{-1} & 0 \\ 0 & (1-\sigma)I \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} K_{bk}^T \\ K_{fk}^T \end{bmatrix} \frac{\overline{w^2}}{\overline{u^2}} \begin{bmatrix} K_{bk} & K_{fk} \end{bmatrix} > 0 \tag{13}$$

이고, $\beta_m > \beta_{m-1} > \bullet\ \bullet\ \bullet\ \beta_2 > \beta_1$이므로 k가 증가할수록 제어기 이득 K_{bk}와 K_{fk}의 설계영역이 확장되어 식 (6a)에서 얻는 L_2-이득 γ_k은 작아진다. 즉, $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \dots\dots \ge \gamma_m$의 관계를 갖는다. β_k가 커질수

록 식 (3)에서 정의되는 타원체 ϵ_k는 작아져 계의 상태는 원점에 가깝게 되며, 따라서 주어진 입력제한을 만족하는 제어기 이득의 설계 영역이 커져 고이득의 제어기가 설계됨을 의미한다. 또한 계의 상태가 ϵ_k에서 설계된 제어기 이득은 γ_k보다 작은 L_2-이득을 갖게 된다.

논의

1) 상수 σ는 상태되먹임 제어입력과 외란앞먹임 제어입력에 대한 가중치에 해당한다. 즉, $\sigma \to 1$이면 상태되먹임 제어입력은 커지고 외란앞먹임제어입력은 작아지며, 반대로 $\sigma \to 0$이면 상태되먹임 제어입력은 작아지고 외란앞먹임제어입력이 상대적으로 커진다. 자세한 설명은 부록 A.2를 참조한다.

2) σ는 설계자가 정하는 상수로 계의 응답 특성을 보고 적절한 값을 선정하여 제어이득을 결정한다. 이 때 결정되는 제어이득은 σ에 의해 정해지는 되먹임제어입력과 앞먹임제어입력의 분배 비율 하에서 w로부터 z_∞까지의 L_2-이득을 최소화 한다.

3) β_k와 γ_k의 관계는 선형행렬부등식을 통해 결정되므로 정량적 분석은 어렵다. 그러나 β_k가 클수록 L_2-이득은 작아진다. 결과적으로 L_2-이득이 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots\ldots \geq \gamma_m$의 관계를 가지므로 스케쥴제어를 적용하면 w로부터 z_∞까지의 L_2-이득 γ_k의 최소화 측면에서 제어성능을 향상시킬 수 있다.

4) 타원체 개수를 나타내는 m과 β_k의 최대값인 β_m은 식 (6)의 행렬부등식을 풀어 얻은 γ_m의 크기를 보고 결정하거나, 또는 응답을 보고 결정할 수 있다. 즉, γ_m이 원하는 수준에 비해 큰 경우 β_m을 증가시키면 작은 γ_m을 얻을 수 있다. 그러나 m이 너무 큰 경우 실시간 스케쥴 제어를 위해 컴퓨터 메모리에 저장해야 될 제어기 이득 개수가 증가하며, 실시간 이득의 선정에 더 많은 시간이 필요하게 된다. 응답을 시뮬레이션을 통해 분석하여 m의 크기를 선정하는 것이 추천된다.

정리 2의 제어기 설계 방법을 요약하면, 우선 α, σ, β_k를 정한 후 $k=1$일 때 부등식 (6a), (6b), (6c)를 풀어 Q, γ_1와 제어기 이득 $K_{b1} = F_1 Q^{-1}$, K_{f1}을 얻은 다음, 이 α, σ, β_k, Q와 식 (6a), (6b)를 이용하여 제어기 이득 $K_{bk} = F_k Q^{-1}$, K_{fk}와 γ_k를 얻게 된다. 실제 제어 시에는 측정된 상태변수 x를 이용하여 $V(x) = x^T Q^{-1} x$를 계산하고, 식 (7)에서 제어이득 K_{bk}, K_{fk}를 선정하여 제어하게 된다.

3. 결론

외란의 영향을 받는 계에서 외란의 앞먹임제어는 되먹임제어에 비해 외란응답 최소화에 효과적이다. 본 연구에서는 시스템에 가해지는 외란의 최대크기를 알고 있고 측정가능하며, 제어입력의 크기 제한을 갖는 계에서 외란으로부터 제어변수 사이의 L_2-이득을 최소화하는 상태되먹임+외란앞먹임제어기 설계방법을 제안하였다. 설계에는 선형행렬부등식이 이용되었다.

또한 고정이득제어에 비해 스케쥴 이득제어가 갖는 제어성능 향상 효과를 응용하여 상태되먹임+외란앞먹임 이득 스케쥴 제어 설계방법을 제안하였다. 스케쥴 제어는 계의 상태와 외란이 원점에 가까워질수록 고이득의 제어기를 적용하여 주어진 제어입력 조건을 만족하면서도 더 작은 L_2-이득을 얻는 방법으로 고정이득제어에 비해 더 우수한 제어성능을 기대할 수 있다.

제안된 방법은 후속 논문에서 적용성과 성능을 입증할 예정이다.

참고문헌

1. Bernstein, D. S. and Michel, A. N., "A Chronological Bibliography on Saturating Actuators," Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Vol. 5, Issue 5, pp. 375-380, 1995.
2. Stoorvogel, A. A. and Saberi, A., "The Challenge of Constraint," Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Vol. 14, Issues 13-14, pp. 1085, 2004.
3. Lin, Z. and Saberi, A., "A Semi-global Low-and-High Gain Design Technique for Linear Systems with Input Saturation - Stabilization and Disturbance Rejection," Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Vol. 5, Issue 5, pp. 381-398, 1995.
4. Lin, Z., Saberi, A. and Teel, A. R., "Simultaneous L_p-stabilization and Internal Stabilization of Linear Systems Subject to Input Saturation - State Space Feedback Case," Systems and Control Letters, Vol. 25, Issue 3, pp. 219-226, 1995.
5. Nguyen, T. and Jabbari, F., "Disturbance Attenuation for LPV Systems with Bounded Inputs," Proc. of the American Control

Conference, pp. 1543-1547, 1998.
6. Nguyen, T. and Jabbari, F., "Disturbance Attenuation for Systems with Input Saturation: An LMI Approach," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, No. 4, pp. 852-857, 1999.
7. Nagpal, K., Abedor, J. and Poolla, K., "An LMI Approach to Peak-Peak Gain Minimization: Filtering and Control," Proc. of the American Control Conference, Vol. 1, pp. 742-746, 1994.
8. Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V., "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," SIAM Books, pp. 1-35, 1994.
9. Srivastava, S. and Jabbari, F., "Scheduled Controllers for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Inputs," Proc. of the American Control Conference, Vol. 2, pp. 735-739, 2000.
10. Kose, I. E. and Jabbari, F., "Scheduled Controllers for Linear Systems with Bounded Actuators," Automatica, Vol. 39, No. 8, pp. 1377-1387, 2003.
11. Kang, M. S., "Gain Scheduled Control for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Control Input - Theory," J. of KSPE, Vol. 23, No. 6, pp. 81-87, 2006.
12. Kang, M. S., "Gain Scheduled Control for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Control Input - Application to Stabilization Control," J. of KSPE, Vol. 23, No. 6, pp. 88-95, 2006.
13. Leith, D. J. and Leithead, W. E., "Survey of Gain-scheduling Analysis and Design," Int. J. of Control, Vol. 73, No. 11, pp. 1001-1025, 2000.

부 록

A1. 정리 1의 증명[10]

1) 식 (4a)는 w로부터 z_∞까지의 L_2-이득이 γ_k보다 작은 안정한 상태되먹임제어기가 존재할 필요충분조건이다. 따라서 식 (4a)를 만족하는 제어이득 $K_k = F_k Q^{-1}$는 폐회로 안정성을 보장하며, w로부터 z_∞까지의 L_2-이득은 γ_k보다 작다.

2) 폐회로에서 함수 $V(x) = x^T Q^{-1} x$를 정의했을 때, 식 (4c)는 다음 식을 의미한다.

$$\dot{V}(x) + \alpha(V(x) - w^T w) < 0 \tag{A-1}$$

식 (A-1)을 만족하는 양의 α가 존재하면, 폐회로 상태벡터는 다음을 만족한다.

$$V(x) < \overline{w^2} \tag{A-2}$$

즉, 식(A-1)과 (A-2)로부터 만일 계의 상태벡터가 $x^T Q^{-1} x = \overline{w^2}$로 정의되는 타원체 내부에 존재하는 경우 상태벡터는 항상 내부에 존재하게 되며, 타원체 외부에 있을 경우에는 $\dot{V}(x) < 0$이므로 타원체 내부로 들어온다. 즉, 이 타원체의 내부는 주어진 외란 조건에서 계의 상태벡터가 존재할 수 있는 도달영역을 나타낸다. 즉, 폐회로 상태벡터는 항상 ϵ_1에 존재한다. 이 때 α는 영과 허수축에서 가장 가까운 폐회로 극점의 실부수의 두 배 사이에 존재한다.

3) 식 (4b)는 Schur Complement[9]에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q - \frac{\overline{w^2}}{\beta_k^2 \overline{u^2}} F_k^T F_k > 0 \tag{A-3}$$

이 식을 다시 쓰면

$$Q^{-1} - \frac{\overline{w^2}}{\beta_k^2 \overline{u^2}} Q^{-1} F_k^T F_k Q^{-1} > 0 \tag{A-4}$$

상태변수 x가 타원체 ϵ_k 내에 존재하는 경우 선정되는 제어는 식 (5)에서 $u = F_k Q^{-1} x$이므로, 식 (A-4)에서 $u^T u < \overline{u^2}$이 되며, 따라서 주어진 제어입력 제한조건을 만족하게 된다.

식 (4b)에서 $\beta_k^2 Q > \frac{\overline{w^2}}{\overline{u^2}} F_k^T F_k > 0$ 이므로 β_k가 클수록 F_k의 설계범위가 넓어지므로 식 (4a)에서 결정되는 γ_k는 작아진다. 즉, $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_m$이 된다. 따라서 정리 1의 제어계에서 w로부터 z_∞까

지의 L_2-이득은 γ_1보다 작다.

A2. 정리 2에서 σ에 따른 입력 특성

식 (11)에서 벡터 $[x^T\ 0]$을 앞에, $[x^T\ 0]^T$를 뒤에 곱하고 정리하면 다음과 같다.

$$\sigma x^T Q^{-1} x > \frac{\overline{w^2}}{\beta_k^2 \overline{u^2}} u_{bk}^T u_{bk} \tag{A-5}$$

여기서 $u_{bk} = K_{bk} x$는 상태되먹임제어입력이다.

식 (6c)에서 $x^T Q^{-1} x < \overline{w^2}/\beta_k^2$이므로 식 (A-5)는

$$\sigma \overline{u^2} > u_{bk}^T u_{bk} \tag{A-6}$$

가 된다.

유사한 방법으로 식 (11)에서 벡터 $[0\ w^T]$을 앞에, $[0\ w^T]^T$를 뒤에 곱하고 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{(1-\sigma) w^T w}{\beta_k^2} > \frac{\overline{w^2}}{\beta_k^2 \overline{u^2}} u_{fk}^T u_{fk} \tag{A-7}$$

여기서 $u_{fk} = K_{fk} w$ 는 외란앞먹임제어입력이다.
$w^T w < \overline{w^2}$이므로 식 (A-7)은

$$(1-\sigma)\overline{u^2} > u_{fk}^T u_{fk} \tag{A-8}$$

식 (A-6)과 (A-8)에서 $\sigma \to 1$이면 상태되먹임 제어입력은 커지고 외란앞먹임제어입력은 작아지며, 반대로 $\sigma \to 0$ 이면 상태되먹제어입력은 작아지고 외란앞먹임제어입력이 상대적으로 커진다.