

타원형 기어의 와이어커팅을 위한 설계

이성철*

인하공업전문대학, 기계과

Design of Elliptical Gears for Wire Cutting

Sungchul Lee*

Dept. of Mechanical Engineering, Inha Technical College

Abstract – The CAD model of a elliptical gear for wire cutting has been developed. The rolling contact of pitch ellipses whose rotation axes coincide with their focus has been analyzed, and the perimeter of the pitch ellipse has been divided into equal-length segments by the number of teeth. A master tooth profile, which is a composite curve of circular arcs that represents involute, has been introduced. The elliptical gear has been designed by imposing the master tooth on the divided points of the pitch ellipse, and a full fillet has been achieved between neighbour teeth. Thus, the whole profile of an elliptical gear is a composite curve of arcs only, and consequently NC codes for wire cutting can be easily generated. Furthermore, a computer simulation program is developed to verify the mesh of the elliptical gear.

Key words – Elliptical gear, Pitch ellipse, Involute, Full fillet, Mesh, Wire cutting.

1. 서 론

타원형 기어는 기어의 회전 운동과 캠의 부등속 운동을 동시에 구현할 수 있는 부등속 회전 전달 기구이다[1,2]. 타원형 기어는 일정한 구동속도에 대해서 출력 회전속도가 주기적으로 변동된다. 타원형 기어는 비원형 기어의 대표적인 예이며, 비원형 기어는 구동부의 각속도 특성을 전반적으로 변화시키기 위한 용도, 비선형 기능을 구현하기 위해 정밀한 각운동 변화를 필요로 하는 경우 등에 사용된다. 전자의 경우는 셰이퍼나 이송기구 등에 사용되는 급속귀환장치 및 간헐회전기구 등이 있으며, 후자는 기계적 계산기구나 캠 등이 그 예이다[3,4].

타원형 기어의 변속 속도비는 캠이나 링크기구에 의해서도 구현될 수 있다. 일반적으로 캠이나 링크기구의 제작비가 타원형 기어의 가공비용보다 저렴하나 캠은 회전속도가 빨라지면 캠과 피동절 간에 점프가 발생할 수 있으며, 링크기구는 드웰이나 역회전 등에 제약이

있다. 타원형 기어는 컴팩트하고 균형있게 기구가 구성되며, 큰 동력을 전달할 수 있고 속도비가 정확한 장점이 있다[5].

타원형 기어의 가공에는 CNC 밀링, 피니언 커터에 의해 인벌류트 곡선을 창성 절삭하는 CNC 치차형 선반 및 와이어커팅 등이 사용되고 있으며[1], 셰이퍼커터나 래크커터에 의한 가공에 따른 설계기술이 발표되어 있다[6,7].

타원형 기어의 수량이 많지 않거나 치형이 비표준 모델인 경우에는 와이어커팅에 의한 가공이 가장 주목받고 있다. 본 연구에서는 와이어커팅으로 타원형 기어를 가공하는 것을 대상으로 설계 방법을 확립하고자 한다.

2. 타원형 기어의 물림특성

타원형 기어는 구름운동을 하는 타원 위에 치를 가공한 것이다. 타원형 기어에서 구름운동을 하는 타원을 피치타원이라 하며, 기어의 회전운동 특성은 피치타원의 운동을 해석하면 구할 수 있다. Fig. 1과 같이 피치타원에서 장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$ 라고 하

*주저자 · 책임저자 : sclee@inhatc.ac.kr

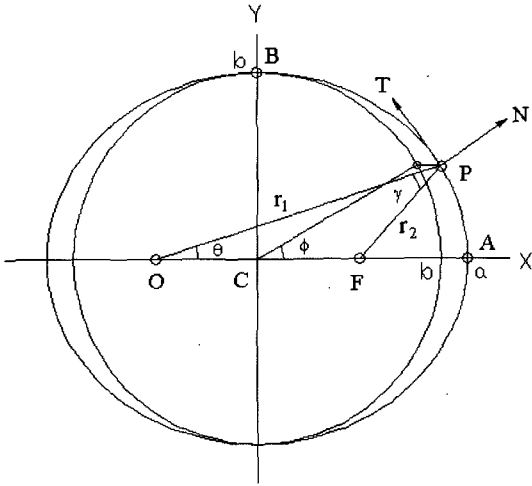


Fig. 1. Pitch ellipse.

면 타원 위에 있는 임의의 점 P의 위치는 매개변수의 함수로 다음과 같이 표시된다[8].

$$\begin{aligned} x &= a \cos \phi \\ y &= b \sin \phi \end{aligned} \quad (1)$$

타원의 원점에서 초점까지의 거리 c와 타원의 편심률 e는 다음과 같다.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (2)$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a} \quad (3)$$

타원 위의 점 P와 타원의 두 초점 O와 F가 이루는 삼각형에서 초점 O에서의 각 θ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b \sin \phi}{a \cos \phi + c} \quad (4)$$

타원의 두 초점에서 점 P까지의 거리는 다음과 같이 계산된다.

$$r_1 = \overline{OP} = \frac{a + c \cos \theta}{\cos^2 \theta + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \theta} \quad (5)$$

$$r_2 = \overline{FP} = 2a - r_1 \quad (6)$$

그리고 P에서의 꼭지각 γ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - 4c^2}{2r_1 r_2} \right) \quad (7)$$

타원에서 AP 구간의 곡선길이 s는 변수 ϕ 의 함수로 다음과 같이 계산된다.

$$s(\phi) = \int_0^\phi a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \phi} d\phi \quad (8)$$

이 식은 2종의 타원적분방정식으로 수치적으로 해를 구할 수 있다.

타원 위의 점 P에서 접선벡터 T와 수직벡터 N은 다음과 같이 구해진다.

$$T = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} (-a \sin \phi i + b \cos \phi j) \quad (9)$$

접선벡터 T의 부호는 변수의 증분방향을 (+)로 잡으며, 수직벡터 N은 T를 시계방향으로 $\pi/2$ 회전시킨 면 구해진다.

타원형 기어의 물림은 두 가지 방식으로 설계할 수 있다. 첫 번째는 타원의 초점을 회전중심으로 하고 중심거리를 장축의 길이 2a로 구성하는 방법이며, 두 번째는 타원의 중심을 회전중심으로 하고 구동기어와 종동기어를 90도 위상차를 두어 중심거리를 (a+b)로 구성하는 방법이다. 전자의 경우는 두 타원이 동일한 형상이나 후자의 경우는 구동 타원에 대해 종동 타원은 타원형상에 매우 가까운 형상으로 고차타원이라 하며, 기본 타원과는 형상에 있어서 매우 작은 차이가 있다[4].

본 연구에서는 타원의 초점을 회전중심으로 타원형 기어를 구성하는 경우를 대상으로 한다. 타원형 기어의 회전중심인 초점에서 피치점까지의 최소 및 최대 거리는 다음과 같이 계산된다.

$$r_{\min} = a - c \quad (10)$$

$$r_{\max} = a + c \quad (11)$$

기어에서 피치점은 피치원이 만나는 점으로 피니언과 기어의 회전중심을 연결한 직선상에 위치한다. 타원형 기어에서는 피니언의 회전에 따라서 피치점의 위치가 변한다. 피니언에서 피치점이 r_{\max} 의 위치에 있을 때 기어는 r_{\min} 의 위치가 된다.

Fig. 2와 같이 피니언이 θ 회전하였을 때 피치점 P와 피니언 피치타원의 두 초점이 이루는 삼각형 PO_1F_1 과 피치점 P와 기어 피치타원의 두 초점이 이루는 삼각형 PF_2O_2 는 합동이므로 피치점에서 기어의 회전 중심까지의 거리 $r_1 (= PO_1)$ 는 피치점에서 피니언의 초점 F_1 까지의 거리 PF_1 과 같다. 따라서 피치점에서 피니언과 기어의 회전중심까지의 거리 r_1 과 r_2 는 식 (5)와 (6)에 θ 를 대입하면 구해진다. 그리고 식 (7)로

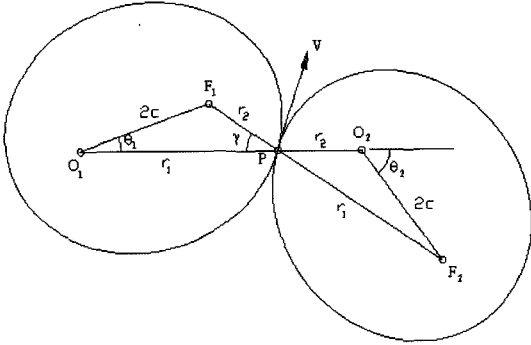


Fig. 2. Pitch ellipses in mesh.

피치점 P에서의 각 θ 가 계산되며, 기어의 회전각은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 + \gamma, \quad 0 \leq \theta_1 < \pi \\ &= \theta_1 - \gamma, \quad \pi \leq \theta_1 < 2\pi \end{aligned} \quad (12)$$

피니언의 각속도가 ω_1 일 때 피치점에서의 접선속도는 다음과 같이 계산된다.

$$V = \omega_1 r_1 \cos \frac{\gamma}{2} \quad (13)$$

피니언과 기어의 피치점에서의 접선속도는 동일하므로 기어의 각속도는 다음과 같이 구해진다.

$$\omega_2 = \frac{V}{r_2 \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{r_1}{r_2} \omega_1 \quad (14)$$

속도전달비 t_r 는 구동기어에 대한 피동기어의 각속도 비로 다음과 같다.

$$t_r = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (15)$$

타원형 기어에서는 회전에 따라 피치점에서 회전중심까지의 거리가 변하므로 속도전달비는 회전각의 함수가 된다. 속도전달비가 1이 되는 회전위치는 $r_1 = r_2 = a$ 이며, 이 때의 피니언 회전각 θ_a 는 다음과 같이 계산된다.

$$\theta_a = \sin^{-1} \frac{b}{a} \quad (16)$$

타원형 기어의 물림특성을 살펴보기 위하여 피치타원의 장축의 반길이를 $a = 40$ mm로 하고 단축의 반길

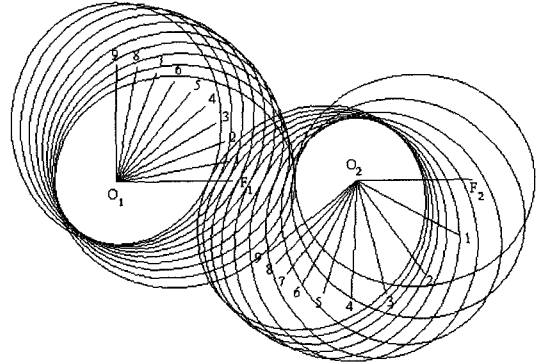


Fig. 3. Simulation of the rolling contact of pitch ellipses.

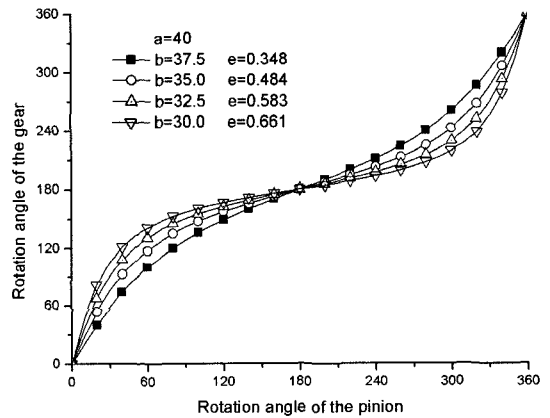


Fig. 4. Rotation angle of the pinion and gear.

이 b 를 변경시키면서 해석을 하였다. Fig. 3은 $b = 35$ mm 일 때 피치타원의 구름운동을 시뮬레이션 한 것이다. 그림에서 O_1 과 O_2 는 피니언과 기어의 회전중심이며, O_1 과 F_1 은 피니언의 피치타원에서의 두 초점, O_2 와 F_2 는 기어에서의 두 초점이다. 피니언의 회전중심에서 피치점까지의 거리가 r_{max} 일 때를 초기 위치로 하였으며, 피니언이 0° 에서 90° 까지 반시계방향으로 회전하는 것을 10° 등분으로 도시하였다. Fig. 4는 피니언 회전각에 대한 기어의 회전각을 나타낸 그림으로 편심률이 커지면 피니언의 일정한 회전에 대해 기어의 r_{min} 부근에서 물림 때 기어의 회전이 빨라짐을 알 수 있다.

Fig. 5는 피치점에서의 접선속도를 나타낸 그림이다. 피니언의 장축 부근에서 물림 때 속도가 빠르며, 속도 변화가 크고, 단축 부근에서 물림 시에는 속도가 느리고 속도변화가 완만해짐을 알 수 있다. Fig. 6은 속도 전달비를 나타낸 그림이다. 속도전달비가 1 보다 작으

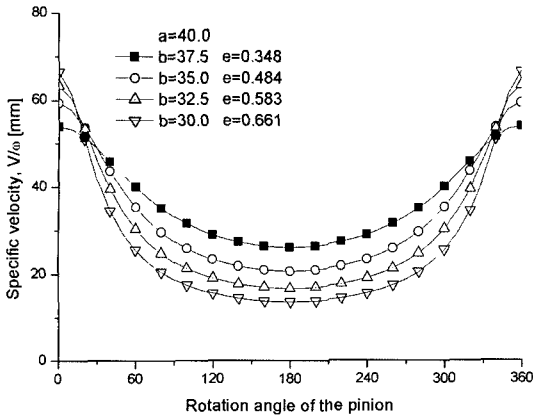


Fig. 5. Tangential velocity at the pitch points.

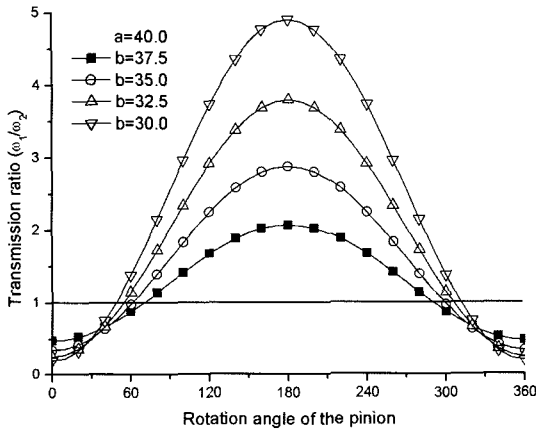


Fig. 6. Transmission ratio of the elliptical gears.

면 피니언보다 기어의 회전각속도가 빠른 것을 의미한다. 일반적인 기어장치에서는 속도전달비는 일정하나

타원형 기어에서는 회전에 따라 달라지게 된다. 편심률이 증가하면 피니언과 기어의 회전 속도차가 커지며, 기어의 속도가 빠른 구간은 작아지게 된다.

3. 타원형 기어의 치형설계

타원형 기어는 피치타원의 구름접촉이 기본운동이며, 피치타원 위에 치를 설계 제작하면 된다. 호빙이나 셰이핑으로 타원형 기어를 가공하는 경우에는 공구와 공작물의 상대운동에 의해서 치형이 창성되므로 치의 형상에 제약이 있을 수 있다. 그러나 와이어커팅으로 가공하는 경우에는 형상에 대해 특별한 제약이 없으며, 치형을 직선이나 원호의 조합으로 보간해서 치형 곡선의 NC데이터를 작성하면 된다.

타원형 기어의 치형 설계를 위해서 우선 피치타원의 둘레를 계산하여야 한다. 타원의 둘레는 엄밀해가 없으며 근사해가 제시되어 있으나, 본 연구에서는 정확하게 계산하기 위하여 Simpson's rule로 식 (8)을 수치적분 하였다. 피치타원의 둘레 S_p 가 계산되면 타원형 기어의 모듈은 다음과 같이 결정한다.

$$m = \frac{S_p}{\pi z} \tag{17}$$

그리고 피치타원의 둘레를 잇수로 등분한 원주피치는 다음과 같이 계산된다.

$$c_p = \frac{S_p}{z} = \pi m \tag{18}$$

압력각은 인벌류트 치형에서 표준 압력각인 20°를

Table 1. Design parameters of elliptical gears

Item	A	B	C	D
Semi-major axis, a	40			
Semi-minor axis, b	37.5	35.0	32.5	30.0
Focus distance, c	13.919	19.365	23.318	26.458
Eccentricity, e	0.348	0.484	0.583	0.661
Perimeter, S_p	243.537	235.881	228.375	221.035
Number of teeth, z	31			
Pressure angle, α	20 deg.			
Module, m	2.501	2.422	2.345	2.270
Circular pitch, c_p	7.856	7.609	7.367	7.130
Pitch circle diameter, d_p	77.520	75.083	72.694	70.358
Tip circle diameter, d_a	82.521	79.927	77.384	74.897
Base circle diameter, d_b	72.845	70.555	68.310	66.115
Root circle diameter, d_f	71.269	69.028	66.832	64.684

사용하기로 한다. 식 (17)로 계산되는 모듈은 비표준이 나 와이어커팅의 경우에는 문제가 없다. 표준 모듈로 치형의 설계가 가능하지만 여기서는 설계과정의 일관성을 위해 식 (17)로 계산한 모듈을 사용하기로 한다.

기어의 모듈, 압력각, 잇수가 주어지면 인벌류트 치형이 결정되며, 이 치형을 타원형 기어의 마스터치형으로 사용한다. Table 1은 장축의 반길이를 $a=40.0$ 로 일정하게 하고 단축의 반길이는 4가지 경우에 대해 마스터치형의 모듈을 계산한 결과이다. 단축의 반길이가 감소하면 타원의 둘레가 작아져서 모듈도 약간 작아진다.

타원형 기어에서 치는 피치타원을 잇수로 등분하는 피치점을 기준으로 설계하여야 한다. 피치타원의 둘레는 다음과 같은 방법으로 등분하였다. Fig. 8에 나타낸 바와 같이 타원에서 피치점 사이의 거리가 c_p 이므로 k 번째 피치점은 피치곡선의 길이가 kc_p 이며, 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$f(\phi) = \int_0^\phi a\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}d\phi - kc_p = 0 \quad (19)$$

이 식의 수치해는 Newton's method를 사용하여 구하였으며, 10^{-6} 의 오차 이내로 계산하였다.

$$\phi_{i+1} = \phi_i - \frac{f(\phi_i)}{f'(\phi_i)}, \quad i=0,1,2,\dots(20)$$

여기서

$$\phi_0 = \frac{2\pi}{z}k \quad (21)$$

$$f'(\phi) = a\sqrt{1-e^2\cos^2\phi} \quad (22)$$

계산 시 원을 잇수로 등분한 각을 초기값으로 사용하였다. Fig. 7은 피치타원의 둘레를 등분하는 각 ϕ 를 계산한 결과이며, 초기값에 대한 편위로 계산 결과를 나타냈다. 편심률이 커지면 각도의 편위량이 커짐을 알 수 있다. Fig. 8은 Table 1의 타원형 기어 B의 피치타원을 등분한 결과이며, 각 피치점 사이의 곡선거리는 원주피치로 동일하다.

인벌류트 곡선은 NC가공 시 직선이나 원호의 조합 곡선으로 근사화해서 가공할 수 있다. 본 연구에서는 저자에 의해 제안된 방법으로 인벌류트 곡선을 원호의 조합곡선으로 근사화한다[9]. Fig. 9는 Table 1의 B

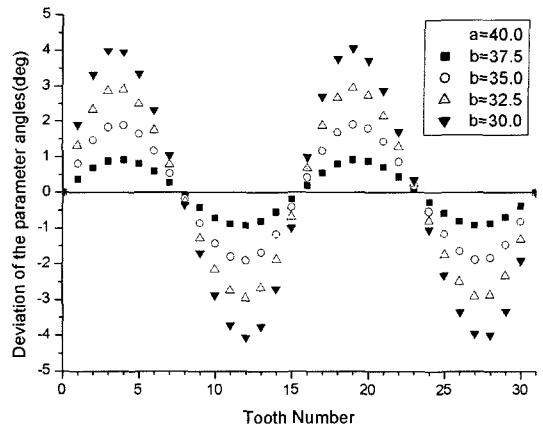


Fig. 7. Parameter angles for dividing perimeter into equal-length segments.

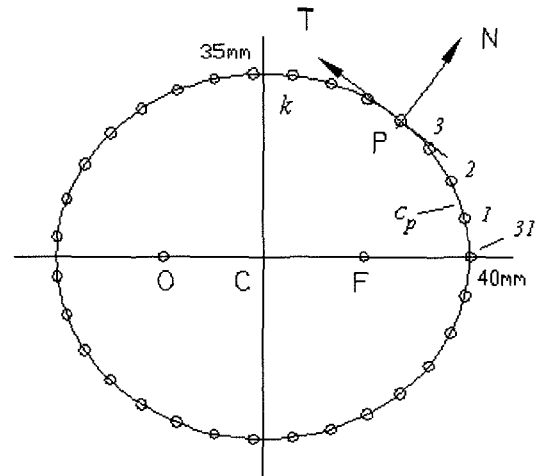


Fig. 8. Equally divided pitch points of the pinion.

데이터로 설계한 마스터치형이다. 그림에서 P는 피치점이며, T는 피치점에서 피치원 접선벡터, N은 수직벡터를 나타낸다. Fig. 9의 치형에서 AB는 이뿌리 구간, BC는 필릿 구간 CD는 인벌류트 치형 구간, DE는 이끝 구간을 나타낸다. 인벌류트 구간은 그림의 오른쪽 치형에 도시한 바와 같이 7개의 원호조합으로 근사화하였는데, 이는 $1\mu\text{m}$ 이내의 형상오차를 만족하도록 설계한 것이며, 원호접점에서는 기울기 연속을 만족한다. 스퍼기어에서는 각피치(angular pitch)에 따라 치형이 반복되므로 A~H를 각피치만큼 회전시키면 치형이 연속적으로 연결된다. 마스터치형의 설계에서는 백래시를 설계변수로 하여 표준 이두께에서 백래시만큼 이두께를 감소시킬 수 있기 때문에 타원형 기어에서 곡률반경이 작은 단축부에서도 충분한 백래시를 확보할

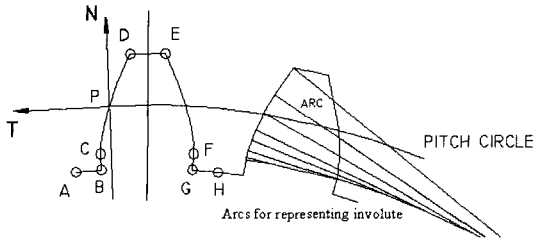


Fig. 9. Master tooth for elliptical gears.

수 있어 원활한 물림이 이루어지도록 할 수 있다. 타원형 기어에서는 피치타원의 둘레를 잇수로 등분한 점 즉, 피치타원을 따라 원주피치가 동일한 위치에 치형을 설계하면 타원의 구름운동을 만족시킬 수 있다. 피치타원을 등분한 점을 기준으로 여러 가지 방법으로 치형을 설계할 수 있다. 본 연구에서는 피치타원을 등분한 점에서 피니언과 기어의 치형 상에 있는 피치점이 서로 접촉을 하고 있는 형상을 설계 대상으로 한다. 즉, Fig. 9의 마스터치형 상에 위치한 피치점에서의 피치원 접선벡터와 수직벡터가 Fig. 8에 도시한 바와 같이 타원의 등분점에서의 접선벡터와 수직벡터에 일치하도록 마스터치형을 좌표 변환하여 타원형 기어의 치형으로 설계한다.

4. 타원형 기어의 설계 예

본 연구에서 제안한 방법에 의하여 Table 1의 B 데이터로 설계한 타원형 기어의 피니언은 Fig. 10과 같다. 여기에 사용한 마스터치형은 Fig. 9에 도시한 바와 같으나 타원형 기어에서는 각 피치점에 마스터치형을 매핑하였을 때 이뿌리 부분이 연속되지 않는다. 따라서 본 연구에서는 Fig. 9의 치형에서 기초원 윗부분인 C~F구간만 사용하여 타원형 기어의 피치점에 매핑하고 이뿌리 부분은 인접한 치와 완전 필릿이 되도록 반원호로 설계하였다. Fig. 9에 나타낸 바와 같이 치형의 인벌류트 구간은 7개 원호의 조합으로 이루어져 있으며, 이결과 이뿌리 부분 각 1개의 원호로 치 한개는 16개의 원호로 구성된다. 따라서 잇수 31개의 타원형 기어의 윤곽은 총 496개 원호로 구성되며, Fig. 10은 Auto CAD에서 arc 명령으로만 그린 타원형 피니언의 형상이다. 피니언은 CCW회전을 대상으로 설계하였기 때문에 타원 중심에서 보면 피치타원 등분점 오른쪽에 치형이 매핑되어 있는 것을 알 수 있다. 기어도 피니언과 마찬가지로 방법으로 설계된다.

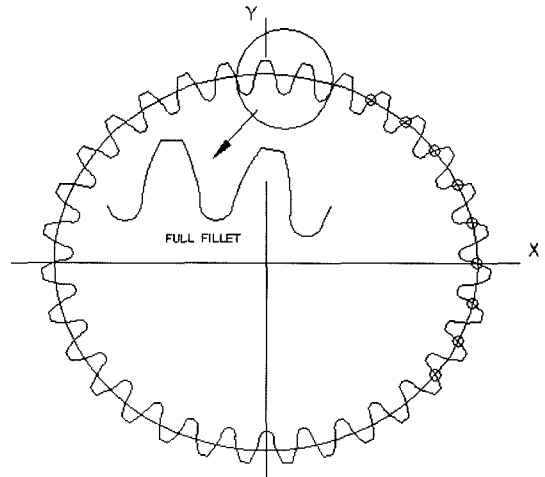


Fig. 10. Elliptical gear with a composite curve of arcs.

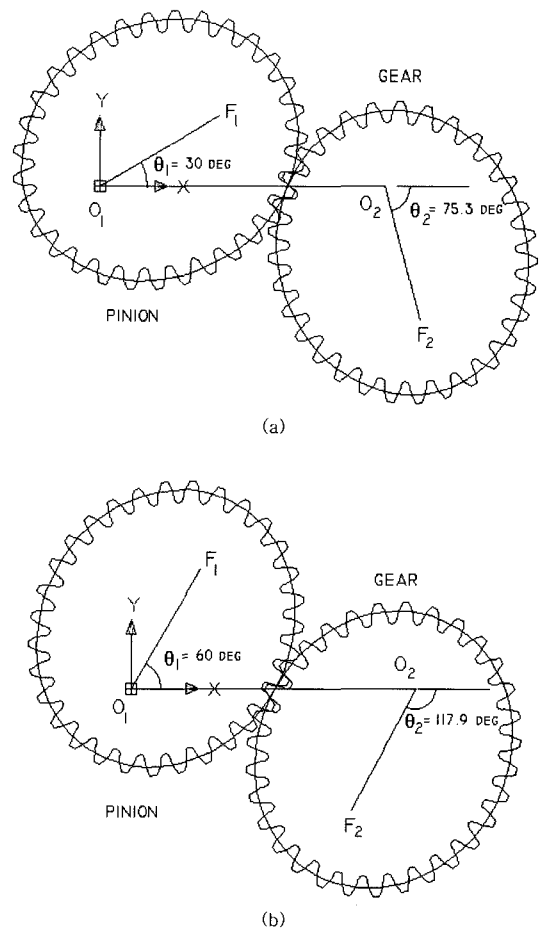


Fig. 11. Elliptical gear in mesh.

Fig. 11은 타원형 기어의 회전에 따른 물림을 시뮬레이션 한 결과로 (a)는 피니언이 30도 회전한 경우, (b)는 피니언이 60도 회전한 위치이다. 피니언과 기어의 피치타원을 등분한 점에서 피니언과 기어의 치형 상에 있는 피치점이 물리게 설계하였기 때문에 타원형 기어의 물림은 피치점에 근접한 지점에서는 원통형 기어의 물림과 동일하다. 피치점을 벗어나면 중심거리가 변경된 효과가 생기게 되나 인벌류트 곡선은 중심거리 변경을 허용하므로 물림에는 별다른 영향을 미치지 않는다.

본 연구에서는 피니언이 CCW로 회전하는 경우를 대상으로 설계하였지만, 역회전의 경우도 피치타원에서 피니언과 기어의 접하는 점이 치형 상의 피치점이 아니지만 피치점 부근의 점으로 물림에는 큰 영향을 미치지 않는다.

5. 결 론

본 연구에서는 와이어커팅을 위한 타원형 기어의 설계 방법을 확립하였다. 피치타원의 장축과 단축의 길이를 설계변수로 하였으며, 피치타원의 구름접촉 운동을 해석하고 피치타원의 둘레 길이를 구한 후 모듈과 잇수를 결정하였다. 기어의 기본 설계 제원으로부터 마스터치형을 설계하고 마스터치형의 피치점에서의 접선 벡터와 법선벡터를 구하고 이 벡터들이 피치타원의 등분점에서 접선벡터와 법선벡터가 되도록 치형을 매핑하여 타원형 기어를 설계하였다.

마스터치형의 인벌류트 곡선은 $1\mu\text{m}$ 이내의 형상오차를 갖는 원호의 조합곡선으로 설계하였고 타원형 기어에서 인접한 치의 이뿌리는 완전필릿이 되도록 설계하여 타원형 기어의 치형 윤곽은 원호의 조합만으로 구성하였으며, 이는 와이어커팅으로 쉽게 가공할 수 있다.

피치타원의 피치점과 피니언과 기어 치형에서의 피치점을 일치시켜 설계하였기 때문에 피치점 근처에서의 물림은 원통형 기어와 동일하다. 피치점을 벗어난 부근에서는 중심거리가 약간 변경된 효과가 나타나지

만 물림에 별다른 영향을 미치지 않는다. 마스터치형에서는 백래시를 설계변수로 하여 표준 이두께에서 백래시만큼 이두께를 감소시킬 수 있다. 따라서 타원의 단축부근의 치에서도 충분한 백래시를 확보할 수 있어서 물림을 원활하게 할 수 있다.

설계 예로 피치타원 장축과 단축의 반길이가 40 mm와 35 mm이며, 잇수가 31개인 타원형 기어를 설계하였으며, 물림과정의 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 원활하게 작동함을 확인하였다.

후 기

이 논문은 2006년도 인하공업전문대학 교내연구비 지원에 의하여 수행한 “타원형 기어의 가공기술에 관한 연구”의 결과이며, 연구지원에 감사드립니다.

참고 문헌

1. 香取英男, 非円形齒車, 日刊工業新聞社, 2001.
2. Townsend Dennis P., Gear handbook, McGraw-Hill, 1991.
3. Litvin F. L., Gear geometry and applied theory, Prentice Hall, 1994.
4. Maitra G. M., Handbook of Gear Design, McGraw-Hill, New Delhi, 1985.
5. Bair B., “Computer aided design of elliptical gears”, ASME J. of Mechanical Design, Vol. 124, pp. 787-793, 2002.
6. Figliolini G. and Angeles J., “The synthesis of elliptical gears generated by shaper-cutters”, ASME J. of Mechanical Design, Vol. 125, pp. 793-801, 2003.
7. Wu L., “Mathematical model and undercutting analysis of elliptical gears generated by rack cutters”, Mech. Mach. Theory, Vol. 31, No. 7, pp. 879-890, 1996.
8. Rutter J., Geometry of curves, Chapman & Hall/CRC, 2000.
9. 이성철, 권오관, “NC가공을 위한 인벌류트 곡선의 원호 근사화에 대한 연구”, 대한기계학회논문집, 제 19권, 제10호, pp. 2475-2483, 1995.