부적합품률의 이항 신뢰구간 추정 및 응용

최 성 운* · 이 창 호**
*경원대학교 산업공학과 · **인하대학교 아태물류학부

Estimation and Application of Binomial Confidence Interval for Nonconforming Proportions

Sungwoon Choi* · Changho Lee**
*Department of Industrial Engineering, Kyungwon University
**Asia Pacific School of Logistics, Inha University

Abstract

This paper presents various interval estimation methods of binomial proportion for small n in multi-product small volume production and extremely small p like PPM or PPB fraction of defectives.

This study classifies interval estimation of binomial proportion into three categories such as exact, approximate, Bayesian methods.

These confidence intervals proposed in this paper can be applied to attribute process capability and attribute acceptance sampling plan for PPM or PPB.

Keywords : PPM, Interval Estimation, Binomial Proportions, Exact, Approximate, Bayesian Methods, Process Capability, Attribute Sampling

1. 서 론

가전, 휴대폰, 소형 자동차 등 경쟁기업 간 기술품질과 가격이 차이가 없을 경우 소비자는 디자인 감성품질과 고객만족을 위한 서비스 프로세스 품질에 따라 구매를 결정한다. 이를 품질통계 관점에서 보면 기술품질을 향상시키기 위해 고객이 요구하는 정밀, 정확도의 스펙(Specification)을 기준목표로 계측기를 이용하여 계량형 데이터(Data By Variable)로 개선을 추구한다.

디자인 감성품질을 만족하기 위해 고객 설문조사(Customer Survey)와 QFD(Quality Function Deployment)를 이용하여 설계품질과 한도견본으로 부적합(결점)과 부적합품(불량)등의 계수형 데이터(Data By Attribute)로 개선을 추구한다. 고객만족을 위한 서비스 프로세스의 품질향상을 위해 고객만족도 조사와 더불어 서비스 제공자는 목표업무시간 미달성 및 업무내용의 에러(Error, Mistake)율 등의 계수형 데이터로 혁신활동을 추구한다. 소품종 대량생산 형태 및 표준화된 서비스 업무인 경우 제품품질의 부적합품률과 서비스 품질의 에러율 등의 제거를 위한 품질개선 활동을 추구할 시 샘플의 크기(n)는 크고 부적합품률 또는 에러율(p)은 0.5의 대칭조건을 만족할 경우 계산의 효율성을 위해 이항분포의 정규근사 공식을 활용한다.[3]

그러나 다품종 소량생산 형태이거나 비정형화된 서비스 업무인 경우 기업의 제품 및 서비스 품질은 아주 작은 부적합품률과 에러율을 갖는다. 이렇듯 다품종 소량생산과 같이 비반복성으로 인해 n을 크게 취할 수 없거나 식스 시그마 활동과 같이 p가 zero에 근접해서 작게 나타나는 경우 혹은 새로운 설비도입시 초기 트러블에 의한 p가 1에 근접해서 크게 나타나는 경우 기존의 이항분포의 정규근사를 사용할 수 없다.

2007년 7월 접수; 2007년 8월 수정본 접수; 2007년 8월 게재확정

따라서 본 연구에서는 샘플의 크기(n)이 작은 다품종 소량생산이나 PPM(Parts Per Million) 또는 PPB(Parts Per Billion)의 아주 작은 부적합품률을 갖는 이항 신뢰구간 추정방법을 정확한(Exact) 방법, 근사화(Approximate) 방법, 베이지안(Bayesian) 방법 등으로 유형화하여 제시한다.

또한 포함확률과 기대길이 등 이항비율 신뢰구간 추정 시 고려해야 하는 다양한 수행평가 기준을 제안한다. 추정된 이항부적합품률의 신뢰구간은 PPM 또는 PPB의 계수형 공정능력지수와 계수형 샘플링검사에 적용된다.

2장에서는 정규근사의 조건과 정규근사의 구간추정 방안을 제시하고 3장에서는 정확한 이항비율 구간추정 방법을 기초로 근사화 구간추정 방법을 유형화하고 사후 확률에 의한 베이지안 구간추정 방법과 n과 $\mathcal{P}$의 감도분석을 위한 다양한 수행평가 기준을 제안한다.

4장에서는 이항공정능력지수와 이항비율 기초 계수형 샘플링 검사의 적용에 대하여 논의하고 5장에서 결론을 맺는다.

2. 정규근사 조건 및 구간추정

이항분포는 n이 크고 $\mathcal{P}$의 값이 0 또는 1에 가깝지 않고 $\frac{1}{2}$일 경우 정규근사된다. n이 클 경우 중심극한정리(Central Limit Theorem)에 의해 부적합품률의 신뢰구간(Confidence Interval : CI)은

$$CI=\mathcal{P}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\mathcal{P}(1-\mathcal{P})}{n}}$$ 이다.

여기서 $\mathcal{P}=\frac{x}{n}$, x=부적합품수, n=샘플의 크기, $Z_{\frac{\alpha}{2}}=1-\alpha$ 명목(Nominal) 신뢰수준에 해당되는 표준 정규분포 값이다. 위의 CI는 Wald에 제시된 신뢰구간으로 다음과 같은 정규근사조건을 만족할 경우 사용될 수 있다는 언급으로 통계학에 관련된 모든 저서에서 서술하고 있다.

정규근사 조건 1 : $n\mathcal{P}(1-\mathcal{P})\geq 20$

정규근사 조건 2 : $n\mathcal{P}>15$
$n(1-\mathcal{P})>15$

정규근사 조건 3 : $n\mathcal{P}(1-\mathcal{P})\geq 10$

정규근사 조건 4 : $n\mathcal{P}(1-\mathcal{P})>9$

정규근사 조건 5 : $n\mathcal{P}>10$
$n(1-\mathcal{P})>10$

정규근사 조건 6 :
$$n>9\max\left(\frac{1-\mathcal{P}}{\mathcal{P}},\frac{\mathcal{P}}{1-\mathcal{P}}\right)$$

정규근사 조건 7 : $n\mathcal{P}(1-\mathcal{P})\geq 5$

정규근사 조건 8 : $n\mathcal{P}\geq 5$, $n(1-\mathcal{P})\geq 5$

정규근사 조건 9 : $n\mathcal{P}\geq 4$, $n(1-\mathcal{P})\geq 4$

정규근사 조건 10 : n이 클 경우

정규근사 조건 11 : $\mathcal{P}$가 매우 작지 않고
$n\geq 50$ [3]

정규근사조건 12 : $\mathcal{P}\pm 3\sqrt{\frac{\mathcal{P}(1-\mathcal{P})}{n}}$이 0과 1을 포함하지 않을 경우

정규근사조건 13 : 추정 부적합품률 $\mathcal{P}$대신 모 부적합품률 P로 위의 12가지 정규근사 조건을 대치

위의 13가지 정규근사 조건을 사용하는 이유는 사람이 이항분포로 신뢰구간을 구할 경우 부적합품수에 따른 이산적인누적값의 계산의 단조로움과 시간의 비효율성을 피하기 위한 방법이다.

그래서 대부분의 통계학 교재는 수식이 이해하기도 쉽고 효율적으로 계산가능한 Wald의 공식을 표준(Standard)화된 신뢰구간 CI_S으로 일정한 조건을 만족할 경우 사용할 것을 공통적으로 제안하고 있다.

특히 품질통계에서는 위의 조건 중 $n\mathcal{P}\geq 5$, 또는 $n(1-\mathcal{P})\geq 5$를 만족시 $\mathcal{P}$의 특별한 언급없이 사용하고 있으나 PPM 또는 PPB와 같이 아주 작은 부적합품률($\mathcal{P}$)을 갖고 있거나 제품샘플의 크기(n)가 큰 식스 시그마 추진 기업에서 정규근사 조건이 만족하다고 CI_S를 무조건적으로 사용할 경우 통계적 품질개선 평가에서 큰 오류를 가질 수 있다. n과 $\mathcal{P}$를 변화시키면서 명목 신뢰수준 $1-\alpha$=95%, 99%를 실제 만족하는 포함확률(Coverage Probability)값의 추이를 시뮬레이션을 통해 관찰해 볼 경우 $\mathcal{P}$=0.5일 경우를 제외하고 대부분의 $\mathcal{P}$값의 범위에서 포함확률이 명목 신뢰수준보다 작게 나왔으며 0 또는 1에 값에서는 큰 스파이크(Spike) 형상을 지닌다.[6]

특히 고정된 n에 대해 $\mathcal{P}$의 크기를 증가시키거나 고정된 $\mathcal{P}$에 대해 n의 크기를 증가시키면서 포함확률의 변화를 관찰해 보면 n과 $\mathcal{P}$의 증가에 따라 진동(Oscillation)의 불규칙적 양상을 지니어 예측이 불가능하며 n이 큰 경우도 작을 때보다 포함확률이 적게 나

왔다. 특히 $\mathcal{P}$가 0과 1에 가까울 경우 큰 진동의 스파이크 즉 포함확률의 변화가 심해져 CI_s의 값을 신뢰할 수 없다.

따라서 본 연구에서는 계산의 효율성, n과 $\mathcal{P}$에 따른 명목 신뢰수준 $1-\alpha$값에 대한 효과성 관점에서 추천할 만한 신뢰구간 추정 방법 등을 유형화 하여 제시한다

3. 이항비율 구간추정

이항분포를 이용하여 신뢰구간 CI를 구하는 경우 정확하게 이산분포 적용절차를 사용한다고 해서 정확한(Exact) 신뢰구간추정[8]이라 한다.

Wald의 CI_S의 단점을 보완하기 위해 정규근사(Approximate) 신뢰구간 추정[5, 6]을 사용하며, 사후(Posterior)분포와 공액(Conjugate)된 사전(Prior)분포의 결합으로 신뢰구간을 추정[1]하는 베이지안 방법이 있다.

3.1 정확한(Exact) 구간 추정

Clopper-Pearson 구간(CI_{CP})은 이항분포를 사용하여 구하기 때문에 정확한 구간추정 방법이라 한다.

CI_{CP}는 베타분포 혹은 F분포로 표시되며 불완비(Incomp-lete) 베타분포 B에 의한 신뢰수준 $1-\alpha$의 하한 CI_{CP}와 상한 CI_{CP}는 다음과 같다.[9]

하한 CI_{CP} : 0, x=0일 경우

$(\frac{\alpha}{2})$, x=n일 경우

$B(x,\ n-x+1;\frac{\alpha}{2})$, $0<x<n$ 일 경우

상한 CI_{CP} : $1-(\frac{\alpha}{2})^{1/n}$, x=0일 경우

1 , x=n일 경우

$B(x+1,\ n-x : 1-\frac{\alpha}{2})$, $0<x<n$ 일 경우

CI_{CP}는 n이 크지 않을 경우 실제 포함확률은 명목 신뢰수준보다 항상 크게 나와 부정확하며 실용적이 아니다.

두개의 불완비 베타함수의 가중평균으로 나타내는 방법을 Mid-P 신뢰구간 CI_{Mid-P}라 하며 CI_{CP}의 하한과 상한의 $\frac{1}{2}$가중치의 평균값으로 $\frac{1}{2}B(x,\ n-x+1 : \frac{\alpha}{2})+\frac{1}{2}B(x+1,\ n-x : 1-\frac{\alpha}{2})$로 표현된다.

이외에 Blaker 신뢰구간, Blyth-Still-Casella(BSC) 신뢰구간 추정방법이 있다.[7]

3.2 근사(Approximate) 구간추정

근사구간 추정은 정규분포를 이용하여 구하는 방법으로 Score를 이용한 Wilson 구간추정 CI_W가 있으며 연속성을 수정하지 않은 경우, 연속성을 수정한 경우로 나눌 수 있다.

연속성을 수정하지 않은 경우 :

$$CI_W=\frac{2x+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}+4x(1-x/n)}}{2(n+Z^2_{\frac{\alpha}{2}})}$$

연속성을 수정한 경우 :

$$CI_W=\frac{2x+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\pm 1\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{Z^2_{\frac{\alpha}{2}}\pm 2-1/n+4x(1-(x\pm 1)/n)}}{2(n+Z^2_{\frac{\alpha}{2}})}$$

CI_W는 비율의 표준오차(Standard Error)가 통계량 대신 모수로 표현되며 2차식에 의한 해로 구해지나 $\mathcal{P}$=0과 1의 근처에서 포함확률값이 큰 스파이크가 발생되어 부정확해진다.

Agresti-Coul 신뢰구간 CI_{AC}는 CI_W을 중심으로 놓는 방법으로 다음과 같이 표현된다.

$$CI_{AC}=\frac{x+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}/2+Z_{\frac{\alpha}{2}}((x+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}/2)(n+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}-(x+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}/2))/(n+Z^2_{\frac{\alpha}{2}})^{1/2}}{n+Z^2_{\frac{\alpha}{2}}}$$

CI_{AC}는 n이 작아도 $\mathcal{P}$=0 또는 1근처에서 포함확률의 큰 스파이크가 발생하지 않아 CI_W의 적절한 부분구간으로 평가된다.

분산을 안정화시키는 방법으로 Arcsine 신뢰구간 CI_{Arc}방법이 있으며 연속성을 수정하지 않는 경우와 연속성을 수정한 경우로 나눌 수 있다.[8]

연속성을 수정하지 않은 경우 :

$$CI_{Arc}=\sin^2(\arcsin\sqrt{\frac{x-0.5}{n}}\pm\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}})$$

연속성을 수정한 경우 :

$$CI_{Arc}=\sin^2(\arcsin\sqrt{\frac{3/8+x\pm 0.5}{n+3/4}}\pm\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{3+1/2}})$$

Logit 신뢰구간 CI_L은 CI_S를 log *Odds*

$\log \frac{p}{1-p}$ 로 응용하는 방법으로 연속성을 수정하지 않은 경우와 연속성을 수정한 경우로 나눌 수 있다.

연속성을 수정하지 않은 경우 :

$$CI_L = 1-(1+\frac{x}{n-x}\exp(\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}(\frac{n}{x(n-x)})^{1/2})^{-1}$$

연속성을 수정한 경우 :

$$CI_L = 1-(1+\frac{x+0.5}{n-x+0.5}\exp(\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}(\frac{(n+1)(n+2)}{n(x+0.5)(n-x+0.5)})^{1/2})^{-1}$$

이외에 우도비(Likelihood Ratio) 신뢰구간 추정방법, 이항분포와 F분포의 근사공식에 의한 정규근사 신뢰구간 추정방법, Bootstrap에 의한 신뢰구간 추정방법등이 있다.

3.3 베이지안(Bayesian) 구간추정

Jeffrey 베이지안 신뢰구간 CI_J는 CI_{CP}를 포함하는 방법으로 불완비 베차분포에 의한 하한 CI_J와 상한 CI_J는 다음과 같다.

하한 CI_J : 0, x=0 인 경우

$\alpha^{1/(n+1)}$, x=n 인 경우

B(x+1, n- x+1 : $\frac{\alpha}{2}$), 0< x<n 인 경우

상한 CI_J : 1- $(\frac{\alpha}{2})^{1/n}$, x=0 인 경우

1 , x=n 인 경우

B(x+1, n- x : 1- $\frac{\alpha}{2}$), 0< x<n 인 경우

CI_J는 다양한 방법으로 응용되어 구할 수 있으나 포함확률은 쉽게 구하기가 어렵거나 계산이 어려운 비효율적인 단점이 있다.

3.4 수행평가기준 구간추정

본 연구에서 제시한 정확한 신뢰구간 추정, 근사 신뢰구간 추정, 베이지안 신뢰구간 추정 방법등의 성능은 실제 포함확률 관점에서만 언급되었다.

그러나 n과 p의 다양한 조건에 따른 신뢰구간 추정방법별 성능을 비교평가하기 위한 기준으로는 기대 길이(Expected Length), 평균 기대 길이(Average Expected Length), 평균 절대 오차(Mean Absolute Error)등이 있다.

이외에 일양 Neyman 최단 불편 신뢰구간, 포함확률의 일양 가중 제곱근 오차, GLB(Greated Lower Bound), 네스팅(Nesting)조건 등이 있다.

4. 이항 신뢰구간 적용

4.1 이항 공정능력지수

3.1절에서 구한 CI_{CP}, CI_{Mid-P}와 3.2절에서 구한 CI_W, CI_{AC}, CI_{Arc}, CI_L, 3.3절에서 구한 CI_J는 이항분포를 가정한 공정능력분석에서 $Z\sigma$를 구할 경우 사용된다. Minitab[2] 에서는 CI_{CP}를 F분포 근사화한 방법을 사용하고 있으나 다음과 같은 절차에 의해 다양한 신뢰구간 추정 방법에 의한 $Z\sigma$를 계산할 수 있다.

단계 1 : 3절에서 제시한 이항비율 신뢰구간 추정방법을 선택하여 신뢰구간의 하한 CI_L과 상한 CI_U 값을 구한다.

단계 2 : 부적합품률을 PPM 또는 PPB로 변환해 주기 위해 10^6, 10^9를 신뢰구간의 값에 곱한다.

단계 3 : $Z\sigma = \Phi^{-1}$(1-부적합품률)의 표준 정규분포 관계식에 의해 신뢰구간의 시그마 수준을 다음과 같이 계산한다.

신뢰수준 $1-\alpha$의 $Z\sigma$ 신뢰구간 = $\Phi^{-1}(1-CI_L)$~$\Phi^{-1}(1-CI_U)$

4.2 이항비율 기초 샘플링검사

PPM 부적합품률의 샘플링 검사[4]단계 중 프로세스 품질수준 p_M을 신뢰구간 상한이 50% 즉 부적합품률의 제 50백분위수(Percentiles)를 만족하는 값에서 결정한다. 따라서 p_M을 구할 경우 3절에서 제시한 다양한 CI의 상한 값을 0.5로 놓고 부적합품률을 산출하면 p_M이 측정된다.

5. 결 론

본 연구에서는 다품종 소량생산과 같이 샘플의 크기(n)가 작거나 식스시그마 추진기업과 같이 PPM 또는 PPB가 아주 작은 부적합품률 또는 에러율을 목표로 하는 경우 또는 새로운 설비도입시 초기 트러블에 의한 부적합품률이 크게 나타나는 경우 사용될 수 있는

이항 신뢰구간 추정방법을 유형화하였다.

3가지로 유형화된 추정방법을 이항분포를 정확히 계산하는 신뢰구간 추정방법, 정규분포를 근사화하는 신뢰구간 추정방법, 사전, 사후분포를 사용하는 베이지안 신뢰구간 추정방법 등으로 PPM 또는 PPB 부적합품률 또는 에러율에 대한 이항 공정능력지수와 계수형 샘플링검사에 응용하는 방안을 제시하였다.

향후 연구로는 이항 신뢰구간 추정의 적용 및 모니터링을 위한 효율적이고 효과적인 수행성능 평가기준의 개발에 있다.

6. 참 고 문 헌

[1] 류제복, 이승주, " 낮은 이항 비율에 대한 신뢰구간," 응용통계연구, 19(2)(2006):217-230.

[2] 이승훈, Minitab을 이용한 공학통계 자료분석, 이레테크, 2006.

[3] 장대홍, "이항분포의 정규근사에 대한 고찰," 응용통계연구, 12(2) (1999) : 671-681.

[4] KSA ISO 14560 : 2006, "계수치 합격판정 샘플링검사 절차 - 백만개당 부적합품수로 지정된 품질수준," 한국표준협회, 2006.

[5] Blyth C.R., "Approximate Binomial Confidence Limits," Journal of the American Statistical Association, 81(395)(1986) : 843-855.

[6] Brown L.D., Cai T.T., DasGupta A.D., "Interval Estimation for a Binomial Proportion," Statistical Science, 16(2) (2001) : 101-133.

[7] Zhao S., "Statistical Inference On Binomial Properties," Unpublished Ph.D. Dissertation, University of Cincinnati, 2005.

[8] http://lejpt.academicdirect.ro

[9] http://www.math.ist.utl.pt

저 자 소 개

최 성 운

현 경원대학교 산업공학과 교수. 한양 대학교 산업공학과에서 공학사, 공학석사, 공학박사 학위를 취득하고, 1994년 한국과학재단 지원으로 University of Minnesota에서 1년간 Post-Doc을 수행했으며, 2002년부터 1년 반동안 University of Washington에서 Visiting Professor를 역임하였음. 주요 관심분야는 자동화 생산 및 장치 산업에서의 품질관리이며, 컴퓨터, 정보시스템의 신뢰성 설계 및 분석, 서비스 사이언스, RFID시스템에서도 관심을 가지고 있음.

주소: 경기도 성남시 수정구 복정동 산65번지 경원대학교 산업공학과 ☏031)750-5366

이 창 호

현재 인하대학교 아태물류학부 교수로 재직 중. 인하대학교 산업공학과 학사, 한국과학기술원 산업공학과 석사, 한국과학기술원 경영과학과 공학박사 취득. 주요 연구 관심분야는 인천항의 물류관리, RFID를 활용한 응용시스템, 항공산업 관련 스케줄링과 중소기업의 ERP 개발 등이다.

주소: 인천광역시 남구 용현동 253 인하대학교 아태물류학부