

# 컴프턴 카메라 영상재구성을 위한 타원 누적법

이미노<sup>1</sup>, 이수진<sup>1</sup>, 김수미<sup>2</sup>, 이재성<sup>2</sup>

<sup>1</sup>배재대학교 전자공학과, <sup>2</sup>서울대학교 의과대학 핵의학교실 및 방사선응용생명과학 협동과정

(Received February 20, 2007. Accepted June 7, 2007)

## Ellipse-Stacking Methods for Image Reconstruction in Compton Cameras

Mi No Lee<sup>1</sup>, Soo-Jin Lee<sup>1</sup>, Soo Mee Kim<sup>2</sup>, Jae Sung Lee<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Electronic Engineering, Paichai University, Daejeon, Korea

<sup>2</sup>Department of Nuclear Medicine and Interdisciplinary Program in Radiation Applied Life Science Major, Seoul National University College of Medicine, Seoul, Korea

### Abstract

An efficient method for implementing image reconstruction algorithms for Compton cameras is presented. Since Compton scattering formula establishes a cone surface from which the incident photon must have originated, it is crucial to implement a computationally efficient cone-surface integration method for image reconstruction. In this paper we assume that a cone is made up of a series of ellipses (or circles) stacked up one on top of the other. In order to reduce computational burden for tracing ellipses formed by the intersection of a cone and an image plane, we propose a new method using a series of imaginary planes perpendicular to the cone axis so that each plane contains a circle, not an ellipse. In this case the cone surface integral can be performed by simply accumulating the circles along the cone axis. To reduce the computational cost of tracing circles, only one of the circles in the cone is traced and the rest are determined by using simple trigonometric ratios. For our experiments, we used the three different schemes for tracing ellipses; (i) using the samples generated by the ellipse equation, (ii) using the fixed number of samples along a circle on the imaginary plane, and (iii) using the fixed sampling interval along a circle on the imaginary plane. We then compared performance of the above three methods by applying them to the two reconstruction algorithms - the simple back-projection method and the expectation-maximization algorithm. The experimental results demonstrate that our proposed methods (ii) and (iii) using imaginary planes significantly improve reconstruction accuracy as well as computational efficiency.

Key words : compton camera, emission tomography, image reconstruction, projections, expectation maximization

### I. 서론

**방**출전산화단층촬영술(Emission Computed Tomography, ECT)은 체내 대사와 장기 기능 등을 비침습적으로 2차원 단면영상 또는 3차원 영상을 통해 정량적으로 관찰할 수 있도록 하는 핵의학 영상 기법이다. 이는 인체 내의 해부학적 영상을 제공하는 자기공명영상(Magnetic Resonance Imaging, MRI) 또는 X-선 단층영상 등과는 달리 체내의 생리적 기능 영상을 제공한다. 즉, 인체에 방사성의약품을 투여하고 이것이 생화학적 특성에 따라 체내의 특정 위치에 분포된 뒤 방출되는  $\gamma$ -선을 체외에서 검출함으

로써 체내에 위치한 특정 방사성의약품의 화학적 특성에 따른 분포를 간접적으로 관찰할 수 있도록 하는 기본 데이터를 제공하게 된다. 여기서 사용되는 방사성의약품은 방사성동위원소에 관찰하고자 하는 장기나 병변에 도달할 수 있도록 여러 가지 물질을 결합시킨 방사성을 띤 약품으로 체내에 투여될 경우 방사성 핵종들이 붕괴되면서 60~550keV의 에너지 범위를 가지는  $\gamma$ -선을 방출한다. 대부분의 핵의학 영상장비에서는 이러한  $\gamma$ -선이 외부에 위치한 감마카메라의 섬광체를 통과하면서 섬광빛으로 변형되며, 이를 계수하여 방사선량을 측정함으로써 방사성의약품의 체내 분포를 영상화한다.[1, 2, 3] 현재 상용화 되어 있는 ECT는 사용되는 방사성의약품의 종류와 감마선의 검출방식에 따라 양성자방출단층촬영술(Positron Emission Tomography, PET)과 단일광자방출전산화단층촬영술(Single-Photon Emission Computed Tomography, SPECT)의 두 가지 형태로 구분되나 이들 모두 검출기를 향해 일직선상으로 방출되는  $\gamma$ -선의 누적 값을 통해 형성되는 투사데이터

이 연구는 과학기술부 및 과학재단의 지원을 받아 2007년도 원자력기초공동연구 (해상도 5mm급 컴프턴 카메라의 실증과 응용)를 통해 수행되었음.

Corresponding Author : 이수진

대전광역시 서구 연자 1길 14 배재대학교 전자공학과 (우) 302-735

Tel : 042-520-5711 / Fax : 042-520-5687

E-mail : sjlee@pcu.ac.kr

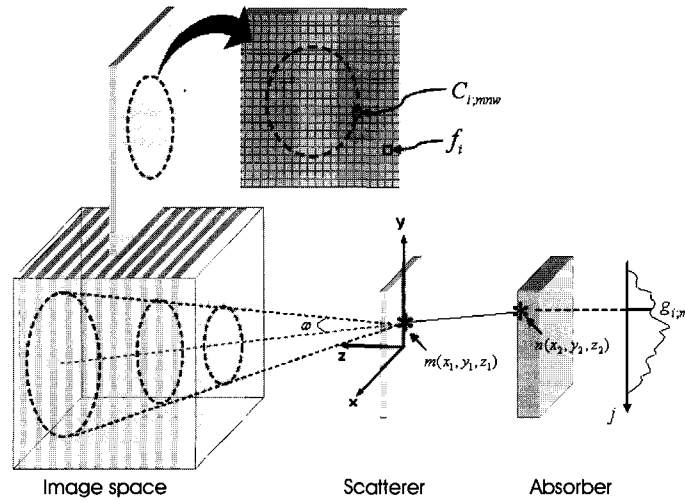


그림 1. 컴퓨터 카메라의 구성도 및 타원추적법(ESM)을 사용한 투사데이터의 계산.  
 Fig. 1. Geometry of Compton camera and calculation of projection data using the ellipse staking method (ESM).

를 360°에 걸쳐 획득하고 이를 역투사함으로써 방출원의 위치를 유추하는 점에서 영상재구성을 위한 기본원리는 동일하다.

본 연구에서 다루고자 하는 컴프턴(Compton) 카메라는 PET 또는 SPECT와 같은 기존의 ECT와는 달리 산란부(scatterer)와 흡수부(absorber)의 분리된 검출기로부터 측정된 에너지와 검출 위치 정보를 이용하여 입사된 광자의 방향 및 위치를 찾아내는 차세대 방사선 생체영상장비이다. 컴프턴 카메라는 기계적 집속방식을 사용하는 기존의 SPECT와는 달리 전기적 집속방식을 사용하므로 공간분해능과 관계없이 집속민감도가 획기적으로 높으며 컴프턴 산란공식에 의하여  $\gamma$ -선의 에너지를 구별하므로 고유 에너지마다 해당 추적자의 영상을 얻는 다중추적자 영상이 가능하다.[4, 5] 그러나 영상재구성에 있어서 일직선을 따라 방출된 광자를 통해 광자의 원위치를 유추하는 PET/SPECT와는 달리 산란부와 흡수부의 검출위치 및 산란각을 통해 정의된 타원추 표면으로부터 광자의 원위치를 유추해야 하므로 영상재구성을 위한 수학적 알고리즘의 유도와의 효율적 구현이 상대적으로 어려운 것으로 알려져 있다.

컴프턴 카메라에서는 그림 1에 나타난 바와 같이 타원추 표면에 놓인 모든 광자의 합이 흡수부에 검출된 에너지에 기여하므로 특정 방출원의 위치를 유추하기 위해서는 타원추 표면적분의 계산을 통한 투사과정과 이의 역투사를 통한 산란 데이터의 재구성 절차가 필요하다. 지금까지 문헌에 소개된 컴프턴 카메라를 위한 영상재구성법으로는 컴프턴 산란공식에 의해 영상 공간에 정의된 타원추들을 모두 더하여 가장 많이 겹쳐진 지점을 구함으로써 방출원의 위치를 추정하는 단순역투사[6] 방법과 급수전개 기법을 사용하여 수학적 해를 구하는 분석학적 방법[7-12] 그리고 방출되는 광자의 통계학적 특성을 모델링하여 영상재구성 알고리즘을 유도

한 통계학적 방법[13,14] 등이 있다. 본 논문에서는 컴프턴 카메라 영상재구성의 기존 방법을 개선하기 위한 첫 단계로 보다 정확하고 신속하게 영상재구성이 이루어질 수 있도록 효율적인 타원추 표면적분을 통한 투사기 및 역투사기를 구현하는 방법을 제안하고 이를 3차원 영상재구성 알고리즘에 적용하여 그 성능을 평가하고자 한다.

## II. 컴프턴 카메라의 투사기 및 역투사기 구현

컴프턴 카메라는 그림 1에 나타난 바와 같이 방사선의 방출원이 위치하는 영상공간과 방출된 광자가 컴프턴 산란을 일으키는 산란부 검출기 그리고 산란된 광자를 검출하는 흡수부 검출기로 구성되어 있다. 각각의 검출기는 산란부에서 광자의 산란위치와 산란 시간, 전자에게 양도된 운동에너지 기록하고 흡수부에서 산란된 광자의 흡수위치와 검출시간, 산란된 광자의 에너지를 기록한다. 식 (1)은 컴프턴 산란공식을 나타낸 것으로서 산란부 검출기에서 광자의 산란위치  $m(x_1, y_1, z_1)$  과 흡수부 검출기에서 광자가 검출되는 위치  $n(x_2, y_2, z_2)$ , 그리고 산란부 검출기에서 측정된 에너지  $E_1$  과 흡수부 검출기에서 측정된 에너지  $E_2$ 로부터 산란각  $\omega$  를 계산할 수 있음을 나타낸다.[15] ( $E_0 = E_1 + E_2$ )

$$\cos \omega = 1 - \frac{m_0 c^2 (E_0 - E_2)}{E_0 E_2} \quad (1)$$

식 (1)로부터 축  $mn$ , 정점  $m$ , 반각  $\omega$ 를 갖는 타원추가 정의되며 방출원에서 방출된 광자가 산란부 검출기  $m$ 에서  $\omega$ 만큼 산란하여 흡수부 검출기  $n$ 에서 검출 될 확률은 타원추 표면을 따라 모

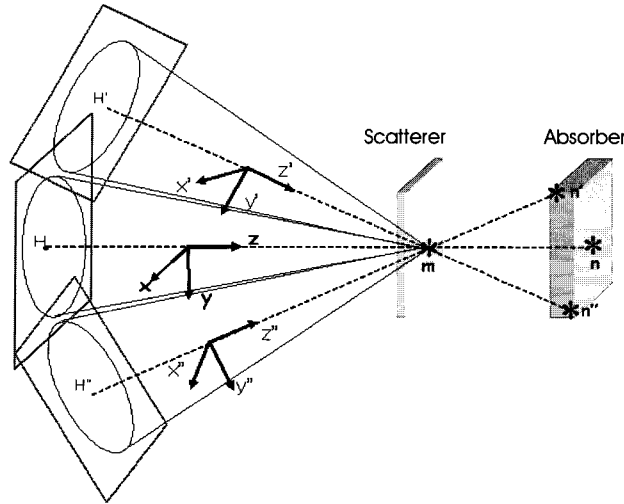


그림 2. 산란부와 흡수부의 좌표 쌍에 의해 정의되는 타원추 및 타원추의 대칭축에 수직인 가상평면.  
 Fig. 2. Illustration of imaginary planes perpendicular to the cone axes defined by scatterer-absorber interaction locations.

두 동일하므로 광자의 방출지점은 타원추 표면상의 한 점에 위치 하는 것으로 간주된다. 역으로 광자의 방출지점이 주어질 경우 산란부 검출기 위치  $m$ 에서 광자가  $\omega$ 의 각도로 산란을 하면 흡수부 검출기에서 광자가 검출되어질 위치  $n$ 은 타원 위의 어느 한 지점이 될 것이고 그 확률은 모두 동일한 것으로 간주된다.

컴프턴 카메라를 통해 얻어지는 투사데이터는 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$g_{mn\omega} = \sum_i H_{i;mn\omega} f_i \tag{2}$$

식 (2)에서  $f_i$ 는 재구성 될 3차원 영상의 한 화소를,  $g_{mn\omega}$ 는 컴프턴 투사데이터를,  $H_{i;mn\omega}$ 는 투사과정에 대한 시스템 행렬로써 화소  $i$ 에서 방출한 하나의 광자가 컴프턴 카메라의 산란부  $m$  위치에서  $\omega$ 의 각도로 산란한 후 흡수부  $n$  위치에서 검출되어질 확률을 각각 의미한다. 그러므로 한 광자의 방출에서 검출에 이르는 물리적 과정에 대한 모든 정보는 시스템 행렬  $H_{i;mn\omega}$ 에 축약되어 표현된다. 컴프턴 카메라의 투사 및 역투사 연산을 위해서는 타원추의 표면적분 계산이 필요한 바, 이를 위한 대표적인 방법에는 선추적법(ray-tracing method, RTM)과 타원누적법(ellipse-stacking method, ESM)을 고려할 수 있다[16]. 선추적법[17]은 기존의 ECT 영상재구성에 적용되어 효율적 구현을 위한 다양한 방법이 제시된 반면 타원누적법은 컴프턴 카메라의 영상재구성을 위해 유일하게 적용될 수 있는 방법이나 타원추 표면적분의 효율적 연산을 위한 체계적인 방법에 대하여 구체적으로 연구된 사례가 거의 없으므로 본 논문에서는 컴프턴 카메라의 영상재구성에 적합한 새로운 타원누적법에 대하여 고찰하고자 한다.

**A. 타원누적법(Ellipse-Stacking Method)**

타원누적법은 타원추의 표면적분을 계산하기 위해 그림 1에 나타난 바와 같이 3차원 공간을 여러 개의 2차원 단면으로 나누어 각 단면에 나타나는 타원을 따라 존재하는 광자의 합을 구한 뒤 이를  $z$ -축 방향으로 누적하여 계산하는 방법이다. 이는 선추적법에 비해 타원추 표면적분의 정확도를 향상시킬 수 있으나 기하학적 대칭관계 등 연산의 효율성을 고려하지 않을 경우 두 검출기의 쌍과 산란각에 의해 정의되는 수많은 타원추의 타원궤적을 일일이 계산해야 하므로 더 많은 계산시간이 소요될 수 있다.

ESM의 경우 식 (2)의  $H_{i;mn\omega}$ 에 대응되는 시스템 행렬은 식 (3)과 같이 주어진다.

$$H_{i;mn\omega} \approx C_{i;mn\omega} P_\omega \tag{3}$$

여기서  $P_\omega$ 는 산란부에 도달한 광자가 산란각  $\omega$ 로 컴프턴 산란을 일으킬 확률을 나타내며  $C_{i;mn\omega}$ 는 산란부 검출기의 산란위치  $m$ , 흡수부 검출기의 검출위치  $n$ , 산란각  $\omega$ 에 의해 결정되는 타원추와  $k$ 번째 단면에 의해 형성되는 타원의 점확산함수(point spread function)이다. 즉, 제한된 2차원상의 해상도에 나타나는 타원의 궤적을 정확히 표현하기 위해서는 보간법의 적용이 필요하며, 이로 인해 타원궤적을 따라 한 개 이상의 화소가 분포할 수 있고 이 때 각 화소는 타원의 연속 값을 표현하기 위한 가중치를 포함하게 된다. 본 논문의 실험에서는 양방향 보간법을 적용하였으며 컴프턴 산란확률( $P_\omega$ )이 균일한 것으로 가정하였다.

**B. 타원궤적의 계산**

ESM에서 타원추의 효율적인 타원궤적을 계산하기 위해 본 연

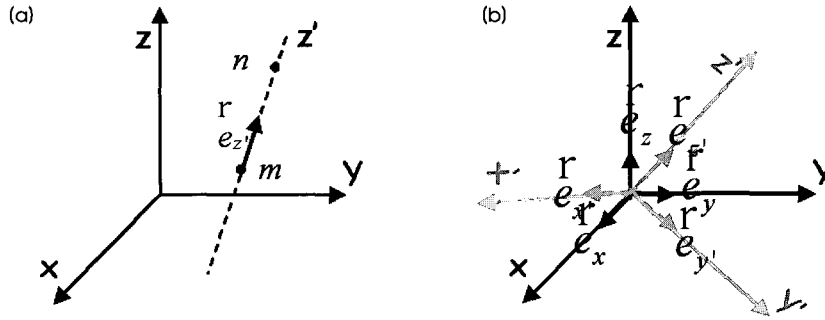


그림 3. (a) 두 검출기 위치  $m, n$ 에 의해 정의된 가상평면을 위한 좌표계의  $z'$ 축(점선), (b) 영상공간의 좌표계  $(x, y, z)$ 와 가상평면을 위한 좌표계  $(x', y', z')$ 의 관계 및 각각의 단위벡터

Fig. 3. (a) The  $z'$  axis (dotted line) of the coordinate system for imaginary planes defined by two interaction locations  $m, n$ , (b) Relation between the coordinate system of image space  $(x, y, z)$  and the coordinate system  $(x', y', z')$  for imaginary planes, and unit vectors for each coordinate system.

구에서는 다음의 두 가지 방법을 적용하였다. 첫 번째는 가장 기본적인 방법으로 컴프턴 산란 원리를 통해 유도된 타원방정식을 그대로 사용하는 것이고, 두 번째 방법은 첫 번째 방법보다 개선된 방법으로 그림 2에 나타난 바와 같이 타원추의 축  $\overline{mn}$ 에 수직인 가상평면을 설정하여 여기에 형성되는 원케적을 구한 뒤 이를 원래의 영상공간으로 변환하는 것이다. 이 방법을 사용할 경우 가상평면에 나타나는 타원추의 단면은 항상 원이 되므로 아래에 기술한 바와 같이 타원방정식을 사용하는 경우에 비해 많은 장점이 있다.

(1) 타원방정식 이용

영상공간의 물체의 좌표  $o(x, y, z)$ 와 산란부의 좌표  $m(x_1, y_1, z_1)$ 을 잇는 벡터  $\vec{r}$ 과  $m(x_1, y_1, z_1)$ 과 흡수부의 좌표  $n(x_2, y_2, z_2)$ 을 잇는 벡터  $\vec{r}'$ 의 내적은 식 (4)와 같이 주어지며 이를 이용하여 타원추를 이루는 타원들의 방정식을 유도할 수 있다.

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = |\vec{r}||\vec{r}'|\cos\omega \tag{4}$$

즉, 식 (4)의 양변을 제곱하여 정리하면, 식 (5)와 같은  $z$ 축을 따라 샘플 된 타원방정식이 유도 된다.

$$ellipse|_{z=z_k} : Ax^2 + By^2 + Dxy + (Fz_k + G)x + (Ez_k + H)y + Cz_k^2 + Iz_k + J = 0 \tag{5}$$

식 (5)에서 각각의 상수는 다음과 같이 정의된다.

$$A = \{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\} \cos^2\omega - (x_1 - x_2)^2 \sin^2\omega \tag{6}$$

$$B = \{(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\} \cos^2\omega - (y_1 - y_2)^2 \sin^2\omega \tag{7}$$

$$C = \{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\} \cos^2\omega - (z_1 - z_2)^2 \sin^2\omega \tag{8}$$

$$D = -2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \tag{9}$$

$$E = -2(y_1 - y_2)(z_1 - z_2) \tag{10}$$

$$F = -2(x_1 - x_2)(z_1 - z_2) \tag{11}$$

$$G = -2Ax_1 - Dy_1 - Fz_1 \tag{12}$$

$$H = -Dx_1 - 2By_1 - Ez_1 \tag{13}$$

$$I = -Fx_1 - Ey_1 - 2Cz_1 \tag{14}$$

$$J = Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + Dx_1y_1 + Ey_1z_1 + Fx_1z_1 \tag{15}$$

그러므로 식 (5)를  $x$  혹은  $y$ 에 대한 이차방정식으로 정리하여 이 이차방정식을 만족하는 해  $(x, y)$ 를 구함으로써 타원케적을 계산 할 수 있다.

(2) 가상평면 이용

그림 2에 나타난 바와 같이 타원추의 축  $\overline{mn}$ 에 수직인 가상평면을 설정할 경우 여기에 형성된 타원추의 단면은 항상 원이고 축을

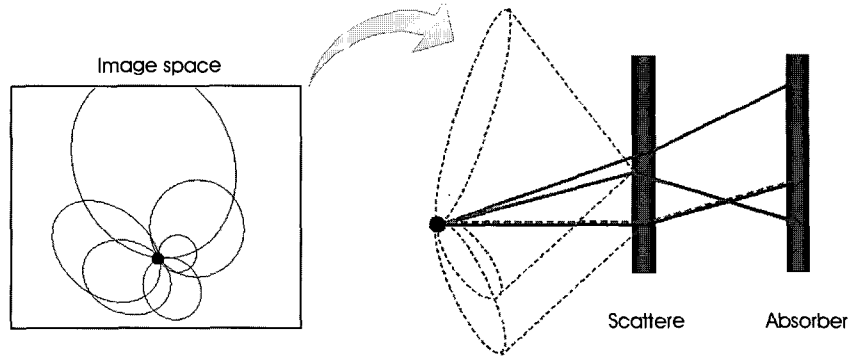


그림 4. 단순 역투사의 원리.  
Fig. 4. Principle of simple backprojection.

따라 자른 일련의 수직 단면들도 이와 평행한 원이 된다. 그리고 원의 반지름은 정점으로 갈수록 일정한 비율로 줄어든다. 그러므로 원주를 따라 등간격의 샘플을 설정할 수 있고, 정점을 향해 점차 감소하는 원의 반지름을 단순 비율에 의해 정확히 예측할 수 있으므로 이를 이용하여 원추에 존재하는 여러 개의 원계적을 식 (5)를 이용하지 않고도 쉽게 구할 수 있다. 또한 동일한 산란각을 갖는 원추들의 가상평면 상의 원계적은 모두 동일하므로 단 1회의 원계적 연산으로 다른 모든 원추들의 원계적을 구할 수 있다. 이러한 가상평면 상의 원계적 좌표들은 영상공간 상의 원계적 좌표들로 변환되어야 하며 두 좌표계의 관계 및 변환식은 다음과 같이 유도 된다.

가상평면을 위한 좌표계의  $z'$  축은 그림 3(a)에 나타난 바와 같이 두 개의 좌표로 정의 되는데, 이는 원추의 축에 해당되므로 축 벡터는 두 검출기의 검출 위치  $m(x_1, y_1, z_1), n(x_2, y_2, z_2)$ 에 의해 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\vec{V} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \tag{16}$$

그러므로  $z'$  축의 단위벡터  $\vec{e}_{z'}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{e}_{z'} = (a, b, c) = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \left( \frac{x_2 - x_1}{|\vec{V}|}, \frac{y_2 - y_1}{|\vec{V}|}, \frac{z_2 - z_1}{|\vec{V}|} \right) \tag{17}$$

$x', y', z'$  축은 상호 수직이므로  $d = \sqrt{c^2 + b^2}$  라 하면  $y'$  축의 단위벡터  $\vec{e}_{y'}$ 과  $x'$  축의 단위벡터  $\vec{e}_{x'}$ 은 식 (18)과 (19)와 같이 정의된다.

$$\vec{e}_{y'} = \frac{\vec{e}_{z'} \times \vec{e}_x}{|\vec{e}_{z'} \times \vec{e}_x|} = \left( 0, \frac{c}{d}, -\frac{b}{d} \right) \tag{18}$$

$$\vec{e}_{x'} = \vec{e}_{z'} \times \vec{e}_{y'} = \left( d, -\frac{ab}{d}, -\frac{ac}{d} \right) \tag{19}$$

그림 3(b)에서 영상공간의 좌표계의 단위벡터를 각각  $\vec{e}_x = (1, 0, 0), \vec{e}_y = (0, 1, 0), \vec{e}_z = (0, 0, 1)$ 라 하면, 영상공간상의 좌표와 가상평면상의 좌표 관계는 식 (20)과 같이 주어진다.

$$x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'} \tag{20}$$

식 (20)을 행렬식으로 나타내면 식 (21)과 같다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x'} & \vec{e}_{y'} & \vec{e}_{z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & a \\ -ab/d & c/d & b \\ -ac/d & -b/d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{21}$$

원 계적의 정확도는 원추상의 샘플 개수와 간격에 따라 결정되므로 샘플 각도를 일정하게 하는 경우와 샘플 길이(또는 호의 길이)를 일정하게 하는 두 가지 방법을 고려할 수 있으며 본 논문에서는 두 가지 방법을 각각 적용하여 실험하였다.

### III. 컴프턴 카메라를 위한 영상 재구성

컴프턴 카메라를 위한 영상재구성은 ECT와 같이 직선을 따라 방출된 광자의 합을 통해 투사값을 계산하는 대신 산란각을 반각으로 하는 타원추 표면에 존재하는 광자의 합을 통해 투사값을 계산하므로 기존의 ECT를 위한 여과후역투사(filtered backprojection)와 같은 재구성 알고리즘을 그대로 사용할 수 없다. 본 연구에서는 영상재구성법의 유형에 관계없이 컴프턴 카메라의 영상재구성을

위한 모든 알고리즘에 공히 적용되는 타원추 표면적분을 위한 ESM의 효율적 구현과 이의 성능을 평가하기 위해 일반적으로 쉽게 적용될 수 있는 단순역투사(simple backprojection, SBP)와 기대값 최대화(expectation maximization, EM) 알고리즘을 이용하여 영상을 재구성하였다.

단순역투사 방법은 그림 4에 나타난 바와 같이 산란부와 흡수부의 검출위치 및 산란각으로부터 정의된 영상공간상의 모든 타원추를 중첩시켜 방출원의 분포를 유추하는 것으로서 연산 방법이 단순한 반면 여러 타원의 누적으로 인해 결과영상이 심하게 번져 보이는 단점이 있다. 또한 이 경우 방출원의 위치에 대한 정보만 제공할 뿐 방출원의 정확한 세기는 알 수 없으며 방출원의 분포가 복잡할수록 배경잡음이 증가되어 재구성된 영상의 대조도가 낮아지므로 방출원의 위치에 대한 정확한 정보를 얻기 어렵다.

한편 기대값 최대화 알고리즘[18,19]은 광자의 방출에서 검출에 이르는 모든 물리적 절차를 통계학적 차원에서 모델링하는 것으로서 정성적/정량적 차원에서 매우 우수한 영상을 제공하는 대표적인 통계학적 방법으로 잘 알려져 있다.[20,21] 이 알고리즘은 원래 ECT 영상재구성을 위해 고안되었으나 영상 시스템을 표현하는 시스템 행렬을 주어진 컴프턴 카메라에 맞도록 정의할 경우 컴프턴 카메라의 영상재구성에도 쉽게 적용될 수 있다. ECT 영상재구성을 위한 EM 알고리즘의 이론적 배경은 참고문헌[18,19]에 상세히 서술되어 있으므로 본 절에서는 EM 알고리즘을 컴프턴 카메라 영상재구성에 적용할 경우 아래에 주어진 최종식의 물리적 의미를 간략히 분석하기로 한다.

$$\hat{f}_i^{k+1} = \frac{\hat{f}_i^k}{\sum_{mn\omega} H_{i;mn\omega}} \sum_{mn\omega} \frac{H_{i;mn\omega} g_{mn\omega}}{\sum_j H_{t;mn\omega} \hat{f}_j^k} \quad (22)$$

식 (22)에서  $\hat{f}_i$ 는 복원하고자 하는 영상 내의  $i$ 에 위치한 화소이고  $\hat{f}_i^k$ 는  $\hat{f}_i$ 의  $k$ 번째 추정치이다.  $g_{mn\omega}$ 는 컴프턴 투사데이터를 의미하며,  $H_{i;mn\omega}$ 는 시스템 행렬을 의미한다. 근사적으로 시스템 행렬은 방출원이 두 검출기 좌표 쌍과 산란각에 의해 정의되는 타원추 위에 있을 확률로 식 (3)에 의해 계산된다. 식 (22)에서  $g_{mn\omega}$ 는 관측된 투사데이터인 반면  $\sum_j H_{t;mn\omega} \hat{f}_j^k$ 는 추정된 투사값의 평균치이므로 이를  $\hat{g}_{mn\omega}^k = \sum_i H_{i;mn\omega} \hat{f}_i^k$ 로 정의할 수 있다.

즉 EM 방법은  $\bar{g}_{mn\omega}$ 를 구하기 위한 투사과정과

$$\sum_{mn\omega} \{H_{i;mn\omega} g_{mn\omega} / \hat{g}_{mn\omega}^k\}$$

항을 계산하기 위한 역투사 과정으로 요약되며 컴프턴 카메라 영상재구성 시 구현된 투사기와 역투사기의 효율성이 전체 알고리즘의 성능에 직접적인 영향을 미치게 된다.

#### IV. 실험 및 결과

##### A. 모의실험 환경 및 소프트웨어 모형

실험에서 사용된 두 검출기는 모두 5cm의 너비와 길이를 가지며 16×16개의 격자로 샘플링 되었다. 또한 산란부-흡수부 사이의 거리와 산란부-시물간의 거리는 모두 5cm로 설정하였고 산란각은 10°~90° 범위에서 2.5° 간격으로 총 32개의 이산 각을 고려하였다. 실험에 사용된 소프트웨어 모형은 그림 5와 같으며 10×10×10cm<sup>3</sup> 크기의 64×64×64로 샘플링 된 3차원 모형이다. 그림 5에서 (a)는 영상공간의 중심에 위치한 3차원 포인트 모형을 나타낸 것이고, (b)는 평행하게 놓인 동일 화소 값을 갖는 3개의 원기둥 모형으로서 각 원기둥의 지름이 1cm, 길이가 5cm이며 간격은

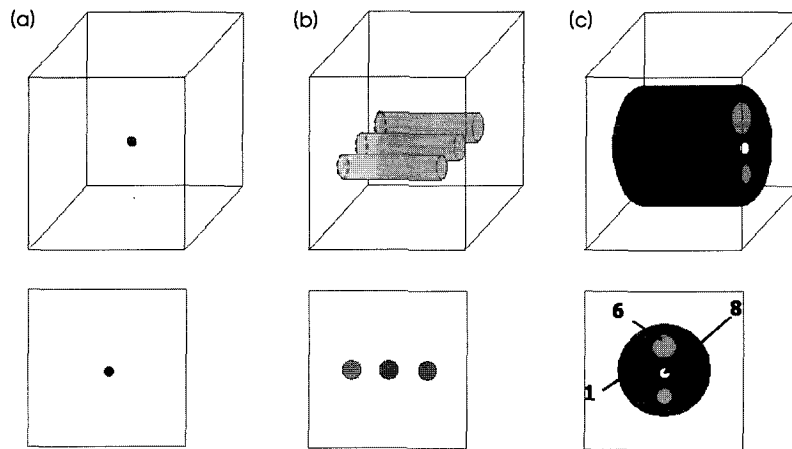


그림 5. 실험에 사용된 3차원 소프트웨어 모형. (a) 포인트 모형, (b) 3-실린더 모형, (c) 6-실린더 모형.  
 Fig. 5. 3-D software phantoms used in experiments. (a) point phantom, (b) 3-cylinder phantom, (c) 6-cylinder phantom.

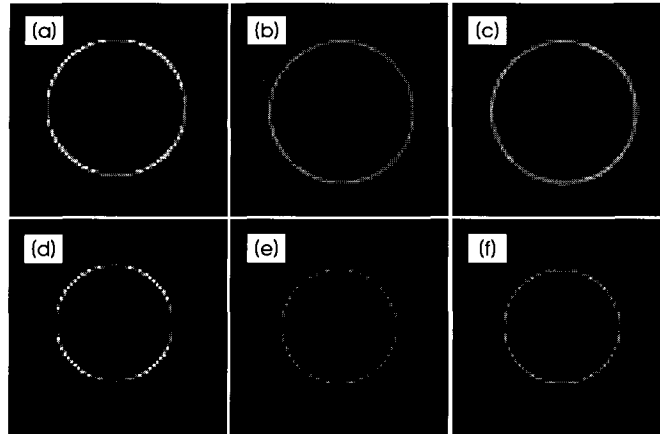


그림 6. (a)~(c) 포인트 모형의 투사데이터(산란각 15°, 산란부 중심에서 산란), (d)~(f) 영상공간에 정의되는 원추 중앙의 원궤적 ((a),(d) 타원방정식 적용 (b),(e) 가상평면 적용 - 샘플 개수 일정(120개) (c),(f) 가상평면 적용 - 호의 길이 일정(1.5625mm)).

Fig. 6. (a)~(c) Projection data obtained from the point phantom (scattered with the angle of 15° at the center of the scatterer), (d)~(f) Circles defined at the center of the cone in image space ((a),(d) Using ellipse equation (b),(e) Using imaginary planes and fixed number of samples(120) (c),(f) Using imaginary planes and fixed arc length(1.5625mm)).

1cm이다. (c)는 지름이 4.8cm, 길이가 5cm인 원기둥 안에 각기 지름이 4mm인 원기둥 한 개와 지름이 8mm, 12mm인 원기둥이 두 개씩 있는 총 6개의 원기둥으로 이루어진 모형이며 바깥의 비율은 그림에 나타난 바와 같이 1:4:6:8 이다.

### B. 투사데이터

본 실험에서는 그림 1에 표현된 투사과정을 모사하기 위해 다음과 같은 세 가지 방법을 사용하여 투사데이터를 형성하였다. (i) 타원방정식에 의해 형성되는 타원궤적 사용, (ii) 가상평면에 형성되

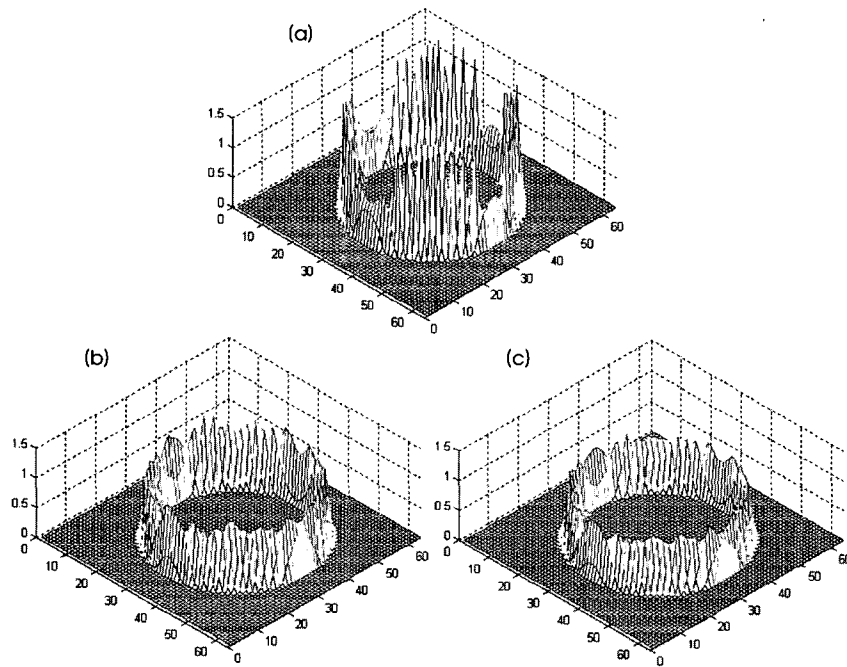


그림 7. 그림 6(a-c)의 3차원 표현. (a) 타원방정식 적용, (b) 가상평면 적용 - 샘플 개수 일정(120개), (c) 가상평면 적용 - 호의 길이 일정(1.5625mm)

Fig. 7. Surface plots of Fig. 6(a-c). (a) Using ellipse equation, (b) Using imaginary planes and fixed number of samples(120), (c) Using imaginary planes and fixed arc length(1.5625mm)

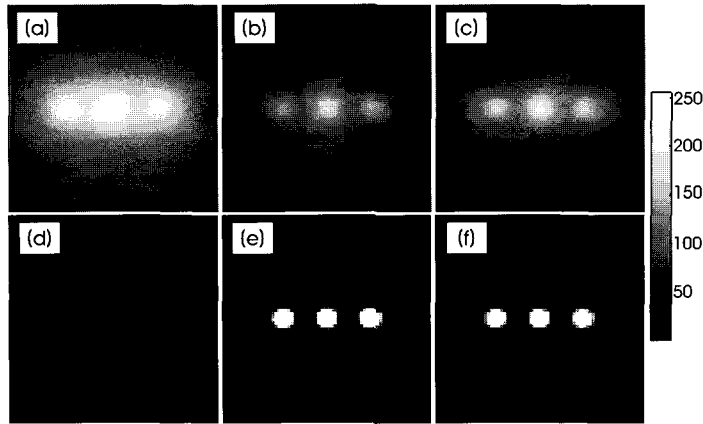


그림 8. 3-실린더 모형의 재구성 된 영상. (a)~(c) SBP, (d)~(f) EM  
 Fig. 8. Reconstructions of 3-cylinder phantom. (a)~(c) SBP, (d)~(f) EM

는 원계적(원주 상의 샘플 개수 일정) 사용, (iii) 가상평면에 형성되는 원계적(원주 상의 호 길이 일정) 사용. 이 세 가지 방법에 따른 투사데이터를 비교하기 위해 그림 5(a)와 같이 방출원이 정중앙에 위치한 포인트 모형을 사용하여 방출된 광자가 산란부 검출기의 중심에서 특정 각도로 산란 된 뒤 흡수부 검출기에 기록되는 과정을 관찰하였다. 이 경우 투사데이터는 그림 6(a-c)와 같이 동일한 산란각을 갖는 투사점들에 의해 원 형태의 궤적을 형성하게 된다. 방출원의 위치가 정중앙이 아닌 경우 투사점들의 궤적은 일반적인 타원 형태가 된다. 그림 6에서 (a)는 (i)의 방법을 통해 얻은 투사영상이고, (b)는 (ii)의 방법에서 샘플 개수를 120개로 한 결과이며 (c)는 (iii)의 방법에서 호의 길이를 영상공간의 한 화소의 크기 (10cm/64)에 해당되는 1.5625mm로 하여 얻은 투사영상이다. 그림 6(d-f)는 산란부 검출기와 흡수부 검출기의 중심을 잇는 직선을 중심축으로 하여 영상공간에 형성되는 타원추의 타원궤적을 나타

낸 것으로서 (d)는 (i)의 방법, (e)는 (ii)의 방법, (f)는 (iii)의 방법을 각각 적용하여 얻은 결과를 나타낸 것이다. 그림 7은 그림 6(a-c)의 투사데이터를 3차원 그래프로 나타낸 것이다.

(i)의 방법을 적용하여 타원궤적을 계산 할 경우 원주 상의 샘플 간격이 불규칙하여 접선의 기울기가 큰 부분에서 샘플 개수가 많아지므로(그림 6(d) 참조) 투사데이터도 그림 6(a)와 7(a)에 나타난 바와 같이 접선의 기울기가 큰 부분에서 화소 값이 부분적으로 크게 나타남을 알 수 있다. 한편, (ii)와 (iii)의 방법을 적용하여 타원궤적을 계산을 할 경우 균일한 샘플링이 가능하므로(그림 6(e,f) 참조) 그림 6(b, c)와 그림 7(b, c)에 나타난 바와 같이 균일한 투사데이터를 얻을 수 있다. 그러나 (ii)의 방법을 사용한 경우 (iii)의 방법을 한 사용한 경우 보다 투사값이 다소 크게 나타났는데 이는 주어진 검출기의 위치에서 이론적으로 정해지는 타원추가 산란각이 작을 때와 z축이 타원추의 중간 정도일 때 포인트 모형과 교차

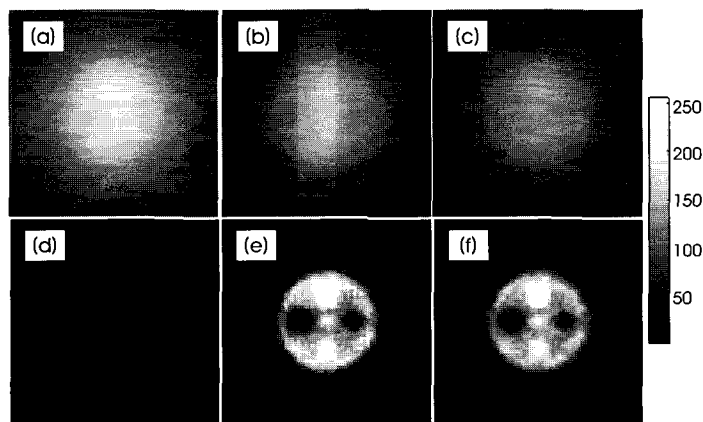


그림 9. 6-실린더 모형의 재구성 된 영상. (a)~(c) SBP, (d)~(f) EM  
 Fig. 9. Reconstructions of 6-cylinder phantom. (a)~(c) SBP, (d)~(f) EM



할 확률이 높으므로 이 때 (ii)의 방법이 (iii)의 방법 보다 샘플 개수가 상대적으로 많기 때문이다. 반면에 포인트 모형과 검출기 사이의 거리를 증가시키면 큰 타원일 때 포인트 모형과 교차 될 확률이 커지므로 (iii)의 방법을 적용한 경우 더 큰 투사값을 나타낼 것이다.

**C. 영상재구성 결과**

그림 8과 9는 그림 5(b, c)에 대한 투사데이터를 위의 (i), (ii), (iii) 방법을 이용하여 SBP 및 EM 알고리즘을 적용하여 재구성한 영상을 나타낸 것이다. 모든 실험에서 공통적으로 사용된 컴프턴 투사데이터는 ESM에 의한 영상재구성의 정확성을 측정하기 위해 특정 카메라의 구조와 검출기의 성분배에 의해 좌우될 수 있는 물리적 현상에 의한 효과를 배제하고 단순한 광자방출 과정에 의한 포아송(Poisson) 잡음만을 모사하여 (iii)의 방법으로 생성된 것이다. (iii)의 방법에서 호의 길이는 1.5625mm로 하였다. 그림 8은 그림 5(b), 그림 9는 그림 5(c)에 대한 재구성된 결과이며 (a-c)는 SBP, (d-f)는 EM 알고리즘을 적용한 결과영상이다. 그림 8과 9에서 (a)와 (d)는 (i)의 방법, (b)와 (e)는 (ii)의 방법, (c)와 (f)는 (iii)의 방법을 적용한 결과이다.

그림 8과 9에 나타난 바와 같이 SBP 방법에 비해 EM 방법의 결과들이 현저하게 우수함을 육안으로 쉽게 확인할 수 있으며 (i)의 방법을 적용한 결과 보다 (ii), (iii)의 방법을 적용한 결과들이 월등히 정확함을 알 수 있다. 또한 소프트웨어 모형이 3-실린더인 경우(그림 8(e,f)) 정성적인 측면에서 (ii)와 (iii) 방법에 따른 차이는 거의 없는 것으로 간주된다. 그러나 소프트웨어 모형이 6-실린더인 경우(그림 9(e, f))에는 (iii)의 방법을 적용하여 얻은 결과 영상이 정성적으로 가장 우수한 것으로 나타났다.

표 1은 각 방법을 사용한 SBP 및 EM 알고리즘의 연산시간과 아래에 정의된 퍼센트 오차 (percentage error)  $\epsilon$ 를 나타낸 것이다.

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_i (f_i - \hat{f}_i)^2}{\sum_i f_i^2}} \times 100 (\%) \quad (23)$$

식 (23)에서  $f$ 는 원영상,  $\hat{f}$ 은 재구성된 영상을 의미한다. 표 1에

있는 퍼센트 오차의 결과를 보면 가상평면을 사용하지 않는 (i) 방법의 경우 오차가 가장 크고 가상평면을 사용하는 (ii)와 (iii) 방법의 경우 오차가 크게 감소함을 알 수 있다. 3-실린더 모형의 경우 (ii) 방법은 (i) 방법에 비해 SBP에서 약 60%, EM에서 약 50%로 감소되었으며 (iii) 방법은 SBP에서 약 80%, EM에서 약 40%로 감소되었다. 6-실린더 모형의 경우 (ii) 방법은 SBP에서 약 60%, EM에서 약 40%로 감소되었으며 (iii) 방법은 SBP에서 약 80%, EM에서 약 50%로 감소되었다. 주어진 알고리즘에 대한 연산소요시간은 검출기 쌍과 산란각에 의해 정의되는 타원추 상의 샘플 개수에 비례하는데 본 실험에서 SBP의 경우 (i), (iii), (ii) 방법의 순으로, EM의 경우 (iii), (i), (ii) 방법의 순으로 나타났다. 이와 같이 SBP와 EM의 결과가 다른 이유는 SBP의 경우 영상공간에 타원추가 겹쳐지는 부분만 고려함으로써 연산시간을 단축시킬 수 있는 반면 EM의 경우 시스템 행렬의 특성 상 영상공간의 모든 화소를 고려하기 때문이다. SBP와 EM 알고리즘의 퍼센트 오차 면에서의 성능은 이미 알려진 대로 EM이 SBP에 비해 월등히 우수함을 보였다.

**V. 고찰 및 결론**

본 논문에서는 컴프턴 카메라의 효율적인 투사기 및 역투사기의 구현을 위해 타원누적법(ESM)을 적용 하였고 컴프턴 산란공식으로부터 유도된 타원방정식을 이용하여 타원궤적을 구하는 방법과 가상평면을 이용하여 타원궤적을 구하는 방법을 제안하였다. 또한 이를 SBP 방법 및 3차원 EM 영상재구성 알고리즘에 적용하여 그 성능을 평가한 결과 가상평면을 사용하여 재구성한 방법이 타원방정식을 통해 타원궤적을 구하고 이를 사용하여 재구성한 방법 보다 연산속도 및 영상재구성의 정확도 면에서 월등히 향상됨을 확인할 수 있었다.

가상평면을 이용한 방법에서 원궤적을 형성하기 위한 두 가지 샘플링 방법 중 샘플 개수를 일정하게 하는 경우 원추 상에 존재하는 여러 개의 원 중에서 하나의 원에 대한 샘플 좌표만 구하면 나머지 원에 대한 샘플 좌표는 원추 측면의 삼각비율을 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 그러나 이 경우 반지름의 변화에 따라 원추 상의 샘플

표 1. 연산시간 및 퍼센트 오차.

Table 1. Computation times and percentage errors.

		CPU 시간(min)			퍼센트 오차(%)	
		투사	SBP	EM	SBP	EM
타원방정식 적용	3-실린더	57	5.8	1692	988×106	95.5
	6-실린더	61	16.5	1754	2581×106	93.3
가상평면 적용 (개수일정)	3-실린더	10	2.3	920	582×106	51.8
	6-실린더	15	7	1162	1480×106	41.3
가상평면 적용 (호길이일정)	3-실린더	46	4.7	2142	776×106	33.8
	6-실린더	47	13.5	2337	1980×106	48.6

폴 간격이 변하게 되므로 반지름이 큰 원의 경우 샘플 간격이 상대적으로 증가하여 투사데이터의 해상도가 저하될 수 있다. 한편, 호 길이를 일정하게 하는 경우 반지름이 증가할수록 상대적으로 원추 상의 샘플 개수도 함께 증가하므로 샘플 개수를 일정하게 하는 경우에 발생할 수 있는 투사데이터의 해상도 저하 문제를 극복할 수 있다. 그러나 이 경우 샘플 개수에 비례하여 연산량도 증가할 뿐 아니라 삼각비를 이용한 좌표 계산도 용이하지 않으므로 원추 상의 모든 원의 샘플 좌표를 일일이 계산해야 하는 단점이 있다. 따라서 위에 언급된 연산의 효율성과 정확도 측면에서의 장단점을 토대로 각 방법에 적합한 적용 분야를 선택하여야 한다. 즉 균일한 해상도가 중요시 되는 환경 하에서는 호 길이를 일정하게 하는 방법을 사용하는 것이 유리할 것이고, 사물의 주요 부분이 검출기 가까이에 위치하여 거리에 따른 투사데이터의 해상도 저하 문제를 무시할 수 있는 경우에는 샘플 개수를 일정하게 하는 방법을 사용하는 것이 효율적일 것이다.

현재 본 연구결과를 토대로 선추적법과 타원누적법의 각 장점을 취한 복합적 방법에 의한 새로운 컴프턴 카메라 영상재구성 방법에 관한 연구를 진행 중이며, 이 연구에서는 본 논문에서 제안된 가상평면을 선추적법의 투사공간에 적용함으로써 타원추에 의한 투사과정을 평행 투사(parallel projection)로 변환한 뒤 기존의 PET/SPECT를 위한 우수한 영상재구성 알고리즘을 그대로 컴프턴 카메라에 적용할 수 있도록 하고 있다. 이 경우 여과후역투사 방법과 같은 단 1회의 역투사 연산에 의한 영상재구성도 가능하게 되어 필요에 따라 EM 알고리즘에 비해 영상재구성을 위한 연산시간을 획기적으로 단축시킬 수 있을 것으로 기대된다.

## 참고문헌

- [1] R. J. Jaszczak, "Tomographic radiopharmaceutical imaging," in *Proc. the IEEE*, Sep. 1988, 76, pp. 1079-1094.
- [2] J. T. Bushberg, J. A. Seibert, E. M. Leidholdt, J. M. Boone, *The Essential Physics of Medical Imaging*, Philadelphia, PA, Lippincott Williams & Wilkins, 2002.
- [3] S. R. Cherry, J. A. Sorenson, M. Phelps, *Physics in nuclear medicine*, Philadelphia, PA, Saunders, 2003.
- [4] Y. F. Yang, Y. Gono, S. Motomura, S. Enomoto, and Y. Yano, "A Compton camera for multi-tracer imaging," *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol. 48, pp. 656-661, 2001.
- [5] S. Motomura, H. Takeici, R. Hirunuma, H. Haba, K. Igarashi, S. Enomoto, Y. Gono, Y. Yano, "Gamma-ray Compton imaging of multitracer in bio-samples by strip germanium telescope," *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference Record*, Rome, Italy, Oct. 2004, vol. 4, pp. 2152-2154.
- [6] R. W. Todd, J. M. Nightingale, and D. B. Everett, "A proposed Gamma camera," *Nature*, 251, pp. 132-134, 1974.
- [7] R. Basko, G. L. Zeng, and G. T. Gullberg, "Application of spherical harmonics to image reconstruction for the Compton camera," *Phys. Med. Biol.*, vol. 43, pp. 887-894, 1998.
- [8] L. C. Parra, "Reconstruction of cone-beam projections from Compton scattered data," *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol. 47, pp. 1543-1550, 2000.
- [9] T. Tomitani and M. Hirasawa, "Image reconstruction from limited angle Compton camera data," *Phys. Med. Biol.*, vol. 47, pp. 1009-1026, 2002.
- [10] M. Hirasawa and T. Tomitani, "An analytical image reconstruction algorithm to compensate for scattering angle broadening in Compton cameras," *Phys. Med. Biol.*, vol. 48, pp. 1009-1026, 2003.
- [11] B. Smith, "Reconstruction methods and completeness conditions for two Compton data models," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, no. 3, pp. 445-459, 2005.
- [12] D. Xu, Z. He, "Filtered back-projection in  $4\pi$  Compton imaging with a single 3D position sensitive CdZnTe detector," *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol. 53, no. 5, pp. 2787-2793, 2006.
- [13] T. Hebert, R. Leahy, and M. Singh, "Three-dimensional maximum-likelihood reconstruction for an electronically collimated single-photon-emission imaging system," *J. Opt. Soc. Am.*, A7, pp. 1305-1313, 1990.
- [14] A. C. Sauve, A. O. Hero III, W. L. Rogers, S. J. Wilderman, and N. H. Clinthorne, "3D image reconstruction for Compton SPECT camera model," *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol. 46, pp. 2075-2084, 1999.
- [15] A. H. Compton, "A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements," *Phys. Rev.*, vol. 21, pp. 483-502, 1923.
- [16] S. M. Kim, J. S. Lee, M. N. Lee, J. H. Lee, C. S. Lee, C. H. Kim, D. S. Lee, S. J. Lee, "Two approaches to implementing projector-backprojector pairs for 3D reconstruction from Compton scattered data," *Nuclear Instruments & Methods in Physics Research A*, vol. 571, pp. 255-258, 2007.
- [17] R. Siddon, "Fast calculation of the exact radiological path for a 3D CT array," *Med. Phys.*, vol. 12, pp. 252-255, 1985.
- [18] L. A. Shepp and Y. Vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography," *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 1, pp. 113-122, 1982.
- [19] K. Lange and R. Carson, "EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography," *J. Comput. Assist. Tomog.*, vol. 8, pp. 306-316, 1984.
- [20] J. M. Ollinger and J. A. Fessler, "Positron emission tomography," *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 43-55, Jan. 1997.
- [21] R. M. Lewitt and S. Matej, "Overview of methods for image reconstruction from projections in emission computed tomography," in *Proc. the IEEE*, 2003, 91(10), pp. 1588-1611.