

교통망에서 다차종 통행을 고려하는 통행배정모형 수립*

박 구 현**

A Traffic Assignment Model in Multiclass Transportation Networks*

Koohyun Park**

■ Abstract ■

This study is a generalization of 'stable dynamics' recently suggested by Nesterov and de Palma[29]. Stable dynamics is a new model which describes and provides a stable state of congestion in urban transportation networks. In comparison with user equilibrium model that is common in analyzing transportation networks, stable dynamics requires few parameters and is coincident with intuitions and observations on the congestion. Therefore it is expected to be an useful analysis tool for transportation planners. An equilibrium in stable dynamics needs only maximum flow in each arc and Wardrop[33] Principle.

In this study, we generalize the stable dynamics into the model with multiple traffic classes. We classify the traffic into the types of vehicle such as cars, buses and trucks. Driving behaviors classified by age, sex and income-level can also be classes. We develop an equilibrium with multiple traffic classes. We can find the equilibrium by solving the well-known network problem, multicommodity minimum cost network flow problem.

Keyword : Stable Dynamics, Wardrop Principle, Multiclass, Class, Traffic Assignment, User Equilibrium, Art Travel Time, Transportation Networks

1. 서 론

1.1 이용자 균형 모형과 안정 동력학

도시 교통망에서의 혼잡과 관련된 대부분의 모형은 링크에서 정의되는 비용함수에 기초한다. 링크 비용함수는 통행량에 대한 함수로서 보통 링크 통행시간으로 정의되며, 증가함수(또는 비감소함수)를 가정한다. 수요가 출발지-목적지 노드 쌍별로 주어졌을 때 균형 통행은 Wardrop 원칙[33]에 의해서 표현된다. 즉, 어떤 출발지-목적지 노드 쌍에 대해서 이를 연결하는 하나의 경로에 통행이 할당된다면, 그 경로는 최단시간 경로가 된다는 것이다. 각 출발지-목적지 노드 쌍에 대해 이를 연결하는 경로집합이 주어졌을 때, Wardrop 원칙이 만족되는 균형 통행을 결정하는 문제는 변동부등식(Variational Inequality) 문제로 표현될 수 있다.[26] 또한 이는 Beckmann 모형[7]으로 알려진 최소화 문제로도 표현된다. 이용자 균형(user equilibrium)이란 한 운전자가 일방적으로 다른 경로로 변경할 때 전체 통행시간(링크 통행시간의 합)이 더 이상 감소될 수 없는 상태로 정의된다. 모든 링크 통행시간 함수가 연속이면 이용자 균형은 Wardrop 균형과 일치하게 된다[9, 20].

링크 통행시간 함수에 기초한 이용자 균형 모형의 결과는 도시 교통망에서 관찰되는 보통의 직관과 일치하지 않는 점들이 있다. 첫째, 직관에 의하면 어떤 기간동안 링크 통행량이 많다는 것은 통행이 빠르게 움직이고 있다는 것을 의미한다. 즉 통행의 링크 통행시간이 크지 않다는 것을 의미한다. 둘째, 어떤 링크가 혼잡하다면 통행량은 줄어들고 링크 통행시간은 매우 커진다. 그러나 이러한 관찰과는 달리 이용자 균형모형에서의 링크 통행시간 함수는 통행량이 커지면(링크 용량에 도달하면), 링크 통행시간이 큰 값(느린 움직임)을 가지며, 역으로 링크 통행시간이 큰 값이라면 통행량은 링크 용량에 가까운 큰 값이 되어야 한다. 이와 같이 관찰과 링크 통행시간 함수의 결과와의 차이를 생각

해 볼 때 이용자 균형 모형에서 링크 통행시간 함수는 인위적인 가정이라고 생각된다[28, 29].

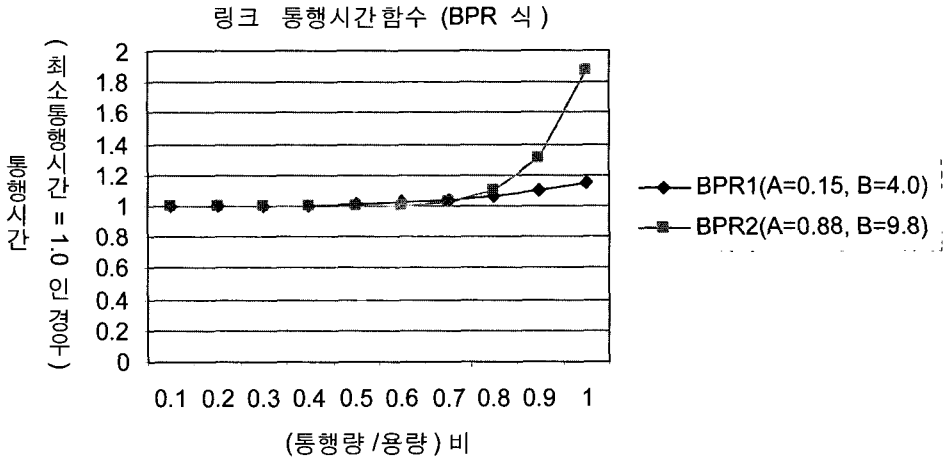
Nesterov and de Palma[29]는 물리적인 개념에 기초한 새로운 안정 동력학 모형을 제시하였다. 안정 동력학 모형은 인위적인 링크 통행시간 함수를 가정하지 않고, 링크(α)별로 아주 기본적인 2개의 물리량, 최소 통행시간(\bar{t}_α)과 최대 통행량(\bar{f}_α)만을 요구한다. 그리고 물리이론의 공리(axiom)에 해당되는 가정을 다음과 같이 하였다. “최대통행량 이하에서는 최소 통행시간으로 이동하고, 최대통행량에서는 최소 통행시간 이상으로 이동한다.” 즉, $f_\alpha < \bar{f}_\alpha$ 이면, $t_\alpha = \bar{t}_\alpha$ 이고, $f_\alpha = \bar{f}_\alpha$ 이면, $t_\alpha \geq \bar{t}_\alpha$ 이다. 이와 같이 간단한 물리량과 단순한 가정으로부터 세우진 안정 동력학 모형은 놀랍게도 Wardrop 원칙을 만족하는 균형 통행은 물론 브라이스 역설(Braess Paradox)과 같은 미묘한 문제들도 표현할 수 있다[29, 32].

1.2 이용자 균형모형에서의 링크 통행시간과 안정 동력학 가설

이용자 균형모형에서 링크 통행시간 함수로서 널리 적용되고 있는 미국 BPR(Bureau of Public Roads)에서 제안한 BPR식은 아래와 같다.

$$t_\alpha = \bar{t}_\alpha \left(1 + A \left(\frac{f_\alpha}{\bar{f}_\alpha} \right)^B \right) \quad (1-1)$$

여기서 \bar{t}_α 은 링크 α 에서의 최소 통행시간이고, \bar{f}_α 은 링크 α 에서의 최대 통행량(용량)을 의미하며, BPR은 $A = 0.15$, $B = 4.0$ 을 제시한 바 있다[37]. 그 후 파라미터 A, B에 대한 적합성 연구들이 국내외에서 많이 행하여졌으며, 최근의 한 연구결과[38]에 의하면, 프리웨이에서 제한속도에 따라 파라미터 A, B의 값을 달리 제시하고 있으며, 복수차선의 경우는 같은 제한속도라도 별도의 값들을 제시하고 있다. 예를 들어 70mph의 경우 $A = 0.88$, $B = 9.8$ 을 제시하고, 복수 차선의 경우는 $A = 1.0$,

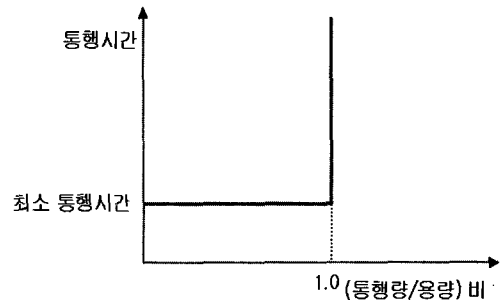


[그림 1-1] BPR식에 의한 링크 통행시간 함수 그래프(A=0.15,B=4.0 ; A=0.88,B=9.8)

B=5.4를 제시하고 있다. [그림 1-1]은 A=0.15, B=4.0 및 A=0.88, B=9.8인 링크 통행시간 함수를 그래프로 나타낸 그림이다.

그러나 실제 링크 통행시간 함수를 적용할 때는 주어진 식의 파라미터를 보정(calibration)하는 과정을 거친다. 즉, 신뢰할 만한 방법으로 자료를 측정 한 후 이에 맞게 링크 통행시간 함수의 파라미터 값들을 다시 조정하는 절차를 갖는다. 이와 같은 파라미터 값의 수정 및 조정 절차는 혼잡에 근접한 상황에서 링크 통행시간을 정확하게 반영하기 위한 과정이라고 이해할 수 있다.

이에 비해 안정 동력학에서는 (통행량/용량)<1.0 일 때는 통행시간=최소통행시간이 되고, (통행량/용량)=1.0일 때는 통행시간은 최소통행시간 이상의 어느 값이 될 것이라고 가정한다. 따라서 안정 동력학 모형에서의 링크 통행시간의 그래프는 [그림 1-2]와 같다. 이는 정확히 말해서 함수가 아니다. (통행량/용량)=1.0일 때 통행시간은 최소통행시간 이상의 무수히 많은 값을 취할 수 있기 때문이다. 그러나 실제 혼잡상황 즉, (통행량/용량)=1.0이 될 때, 링크 통행시간은 해당 링크의 통행량에 의해서 결정되지 않고, 모형에서 결정되는 값으로 전체 교통망의 통행 상황에 따라 달라진다.



[그림 1-2] 안정 동력학에서의 링크 통행시간 그래프

안정 동력학 모형은 '주어진 통행수요가 계속 유지되고 동적인 통행 상태가 시간이 지나면서 안정 상태로 수렴하게 된다면, 안정상태에 대한 통행 상황은 안정 동력학 모형에 의해 표현될 것이다'는 것을 전제하고 있다. 이는 아직 증명되지 않은 하나의 가설이며, 안정 동력학 연구의 최종 목표가 될 것이다. 만일 이러한 가설이 사실이라면 안정

1) 안정 동력학 가설에 대해 구체적으로 위와 같이 표현한 참고문헌이나 '가설'이라는 표현을 사용한 참고자료는 없다. 그러나 안정 동력학을 제안한 Nesterov와 de Palma가 그들의 논문[29] 결론 부분에서 추후 연구로 언급한 내용이나 안정 동력학(stable dynamics)이라는 용어 자체가 이러한 가설을 전제하고 있다고 본 연구의 저자는 생각한다.

동력학 모형은 이론적이고 기본적인 분석모형이 될 것이다. 왜냐하면 링크 통행시간이 링크 통행량 함수의 어떠한 파라미터도 포함하고 있지 않기 때문이다. 그러나 안정 동력학 가설 증명과는 별도로 안정 동력학 모형 자체가 혼잡을 근사적으로 표현할 수 있는 유용한 모형임을 보이는 연구가 수행될 수 있다. 이와 같은 의도에서 안정 동력학 모형에 기초하여 다차종을 고려하는 통행배정 연구(본 연구)와 개인 자동차로 역까지 가서 주차하고 전철이나 버스를 타고 출퇴근하는 모형(park-and-ride model)[21] 연구가 수행되었다고 할 수 있다.

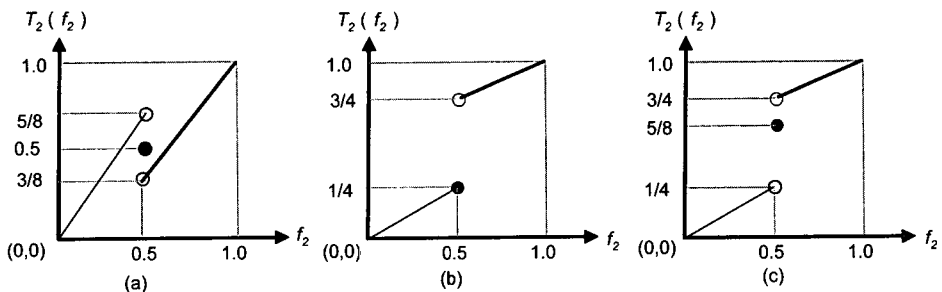
1.3 이용자 균형과 Wardrop 균형

안정 동력학 모형에서 제안하는 출발지-목적지 경로별 통행배정은 Wardrop 균형은 만족하나 이용자 균형은 만족한다고 할 수 없다. 이용자 균형 모형에서는 통행량에 따른 링크 통행시간 함수에 의해 균형이 표현되나 안정 동력학 모형에서는 엄밀하게 링크 통행시간 함수가 정의되지 않기 때문이다. 때문에 이용자 균형과 Wardrop 균형을 거의 동일시하는 많은 교통문제 전문가에게 안정 동력학이 이용자 균형은 아니면서 Wardrop 균형을 만족한다는 내용은 혼돈을 줄 수 있다. 참고문헌[20, 3.1절]에 의하면 Wardrop 균형과 이용자 균형의 차이를 다음과 같이 설명할 수 있다.

Wardrop 균형이란 ‘임의의 출발지-목적지에 대해 통행량이 배정된 경로들의 경로통행시간은 모두

같으며, 통행량이 배정되지 않은 경로로서 경로통행시간이 더 작은 경로는 존재하지 않는 경우의 통행’을 의미한다. 이에 반해 이용자 균형은 ‘임의의 출발지-목적지에 대해 통행이 할당된 경로에서 극미한 통행량을 다른 경로로 보낼 때 전체 통행시간(링크 통행시간의 합)이 더 이상 감소될 수 없는 상태’로 정의된다. 이용자 균형을 약간 다른 표현으로 한 운전자가 일방적으로 다른 경로로 변경할 때 전체 통행시간이 더 이상 감소될 수 없는 상태라고 표현할 수도 있다. Wardrop 균형과 이용자 균형은 모든 링크 통행시간 함수가 연속이면 일치하게 된다. 그러나 비연속 함수에 대해서는 Wardrop 균형과 이용자 균형의 일치는 보장되지 않는다.

Wardrop 균형과 이용자 균형의 차이를 보이기 위한 간단한 예로서 출발지와 목적지 두 노드만 존재하고, 이를 연결하는 평행한 두 개의 링크만 있는 네트워크를 고려한다. 또한 출발지에서 목적지까지의 통행수요는 1.0으로 두 경로(링크)에 적절히 배정하려 한다. 이제 링크 1의 통행시간은 $t_1(f_1) = f_1$ 라고 가정한다. 그러나 링크 2의 통행시간은 [그림 1-3]과 같이 3가지 함수의 경우를 고려한다. (참고로 링크 1의 통행시간 그래프는 [그림 1-3]에서 (0,0)과 (1,1)을 연결하는 직선에 해당된다). 그러면 링크 2의 통행시간이 [그림 1-3(a)] 함수의 경우, Wardrop 균형은 $f_1 = f_2 = 0.5$ 으로 존재하나, 이용자 균형은 존재하지 않는다. 링크 2의 통행시간이 [그림 1-3(b)] 함수와 같다면, Wardrop 균형은 존재하지 않고, 이용자 균형은 $f_1 = f_2 = 0.5$ 이 된다.



[그림 1-3] 링크 2의 링크 통행시간 함수의 3가지

링크 2의 통행시간이 [그림 1-3(c)] 함수와 같다면, Wadrop 균형 및 이용자 균형 모두 존재하지 않게 된다.

안정 동력학 모형은 앞으로 소개될 제 2장과 제 3장의 가정 2-1 및 가정 3-1과 같이 Wadrop 균형은 보장하도록 통행을 배정한다. 그러나 안정 동력학 모형에서는 링크 통행시간이 통행량의 함수가 아니기 때문에 이용자 균형과는 구별된다.

1.4 이용자 균형 관점에서 다차종 통행배정 관련연구

다차종 통행을 고려하는 통행배정모형은 1970년 대부터 수행되었다. 여기서 다차종이란 승용차, 버스, 트럭 등의 자동차 종류(multiple vehicles)를 의미하며, 연령, 성별 및 소득수준 등으로 인한 운전양태에 따른 분류(multiclass)를 포함할 수도 있다. Wardrop의 두 원칙을 시스템 균형과 이용자 균형으로 모형화한 Dafermos는 두 가지 측면에서 통행배정모형을 일반화하였다. 그녀는 기존의 연구에서 링크 통행시간이 해당 링크 통행량만의 함수인 것을 극복하여 모든 링크의 통행량들의 함수가 되는 일반적인 통행배정모형을 처음으로 제안하였으며[13], 다른 한편으로 단일 차종의 통행배정모형을 다차종 모형으로 확장하였다[14]. 그녀의 다차종 통행배정모형에서 차종 u 의 운전자들에게 부과되는 링크 α 에서의 통행시간의 합은 $c_\alpha^u = c_\alpha^u(f_\alpha^1, \dots, f_\alpha^K)$ 으로 표현되며, 차종 u 의 운전자 각 개인의 링크 α 에서의 통행시간은 $t_\alpha^u = c_\alpha^u / f_\alpha^u$ 로 표현된다. 그녀는 차종 수(K)만큼 원 네트워크를 복사하고 그들을 합한(union) 네트워크에서 단일차종 통합배정모형의 결과를 적용하여 다차종의 균형 통행을 계산하는 방법을 개발하였다. 이와 같이 다차종 모형에 단일차종 모형의 결과가 적용되기 위해서는 링크 통행시간 함수가 차종간 통행량에 대한 Jacobian 행렬이 대칭이고 양정치(positive definite)이어야 하였다.

Braess와 Koch[10]는 ‘Jacobian 행렬의 대칭성

조건이란 느린 속도의 트럭과 빠른 속도의 승용차 차종간 통행량에 대한 한계비용이 같다는 가정이 다’라고 문제점을 지적하였다. 그들은 통행시간 함수의 차종간 대칭성을 극복하여 비대칭성 하에서 균형 통행의 존재를 증명하였다. 대칭성 조건이 최적화 문제 해집합의 볼록성을 보장함으로 균형통행의 존재 조건이 성립되었기 때문에, 그들은 최적화 문제를 포기하고 Kakutani의 부동점정리(fixed point theorem)를 이용하여 통행시간 함수의 Jacobian의 비대칭성 하에서 균형 통행의 존재를 증명하였다. 후에 Dafermos[16]도 다차종 균형 문제를 변동부동식 문제로 모형화하여 비대칭성 하에서 이용자 균형통행의 존재를 보였으며, 이를 발견하는 축차적 해법(iterative algorithm)을 제안하였다.

한편 Dial[22]은 운전자들이 실제로 링크 용량 및 링크 통행시간을 인식하는데 차이가 있으며 출발지-목적지에 대한 경로 선택시 무작위성(random selection)이 있음을 지적하였다. 그리하여 그는 짧은 경로는 큰 확률, 긴 경로는 적은 확률로 선택되는 확률적 통행배정 모형을 수립하였다. 여기서 경로선택 확률은 경로시간에 관계되는 음의 지수함수의 비율로서 표현되며 이를 logit 모형이라고 일컫는다. Daganzo and Sheffi[19]는 확률적(stochastic) 이용자 균형을 ‘각 운전자가 목적지까지의 경로를 일방적으로 변경함으로써 자기가 인식하는 경로 통행시간을 단축할 수 없는 상태’라고 정의하였다. 그들은 경로 통행량과 관계되는 비율로서 표현되는 경로선택 확률 계산방식을 제안하였으며, 이는 후에 probit 모형이라고 일컬어지게 되었다. 확률적 경로 선택과 관련된 다차종 통행 연구로서 Lam과 Huang[25]은 목적지까지의 경로선택 분포(trip distribution)와 통행배정이 함께 고려되는 통합모형을 개발하였다. 그들의 모형에서 경로선택 확률은 엔트로피 함수를 이용하여 주어진다. 또한 Wong et al.[34]는 경로선택 분포와 통행배정에 계층적 모드까지 포함된 보다 일반적인 다차종 이용자 균형 모형을 개발하였다.

이와는 다른 차원에서 각 링크 통행시간이 확률

적 분포를 갖는 확률적 통행배정 모형이 연구되었으며, Daganzo[18]는 링크 통행시간이 확정적 시간과 확률적 시간의 합으로 표현되는 확률적 다차종 통행배정모형을 수립하였다. 그는 확정적 시간에 대해서는 Jacobian의 비대칭과 부정치(indefinite)를, 확률적 시간에 대해서는 독립적이고 0의 평균과 한정된 2차 모멘트를 갖는다고 가정하였다. 최근에는 Connors 외[12]가 다차종 통행이 고려되는 확률적 이용자 균형통행의 민감도 분석을 실시하였다. 그들은 경로선택 분포에 probit 모형을 채택하고, 확정적 시간과 확률적 시간의 합으로 표현되는 링크 통행시간을 이용하여 균형통행이 미분가능하기 위한 충분조건을 제시하였다. 이밖에 대기행렬이나 시뮬레이션에 기초하여 대기 및 대기전파(delay propagation) 등을 분석케 하는 모형들이 있으며, 이러한 연구는 주로 동적(dynamic) 모형에서 다루어지고 있다[24, 31].

한편 경제 및 교통관련 정책자들은 사회적 비용을 최소화하기 위해 오래전부터 톨-가격화(toll pricing) 정책을 통해 운전자들의 경로 선택에 영향을 주어왔다. 톨-가격 정책 하에서 링크 비용(비효용)은 링크 통행시간과 톨-가격에 각각 가중치를 곱하고 더한 값으로 정의된다. Dafermos는 그녀의 다차종 통행배정모형[14]에 기초하여 톨-정책 모형을 제안하였다[15]. 그녀는 링크기반의 톨-정책과 경로기반의 톨-정책에 대한 모형을 제시하였으며, 어떻게 톨-가격을 결정할 때 시스템 균형이 이용자 균형이 되는지를 보여주었다. 최근의 톨-설계 연구는 2가지 방향으로 전개되어, 한편으로는 다기준, 다차종, 탄력적 통행수요 및 확률적 경로선택 등의 요소들을 복합적으로 고려하는 톨-설계 모형들을 개발하고[8, 35, 36], 다른 한편으로 톨-링크의 선정 및 가격 결정을 위한 효율적인 해법 연구들을 제시하고 있다[6, 11].

운전자의 경로선택뿐 아니라 차종선택은 통행배정에 많은 영향을 준다. Dial[23]은 시간가치(value of time)의 확률분포를 가정하고, 최적화 모형에 기초하여 시간가치(분당 달러)에 따라 차종과 경로

가 결정되는 다기준(multi-criteria) 통행배정 모형을 제시하였다. 이에 반해 Dafermos[17]는 다기준 통행배정에 혼잡과 다차종 통행을 함께 고려하였으며, 변동부등식으로 모형화하여 균형통행이 존재함을 보였다. 최근에는 Nagueney와 Dong[27]이 통행수요가 탄력적(elastic)인 경우의 다차종-다기준 균형통행 모형을 개발하였다. 그들은 차종별 운전자들의 시간가치를 가정하였으며 모형은 변동부등식에 기초하였다.

국내에서는 다차종 및 다계층에 의한 동적 및 확률적 이용자균형모형에 대한 연구가 최근에 이루어져 왔다[1, 2, 3, 4]. 다차종은 보통 자가용 승용차와 대중교통 버스로 구분하고 있으며, 다계층은 보통 교통정보 인지여부에 의해 2계층으로 구분하는 것이 보통이다. 유순경 외[2]은 교통정보를 제공받는 그룹과 그렇지 못한 그룹으로 나누어 대중교통의 확률적 이용자균형모형을 수립하고 해를 발견하는 알고리즘을 개발하였다. 이승재 외[3]는 자가용 승용차와 대중교통 버스의 2차종 및 정보이용자와 비이용자 2계층을 가정하고, 차종선택과 통행배정을 하나의 모형으로 결합하는 일별(day-to-day) 동적결합모형을 개발하였으며, 이를 바탕으로 통행정보의 효과를 평가하였다. 이준 외[4]는 단순히 통행정보의 제공여부가 아니라 어떠한 통행정보를 받는가에 따라 계층화하는 동적모형을 수립하였다. 즉 그들의 모형에서는 동적 최단경로 안내를 받는 그룹과 DFS(분산환류전략)에 의한 경로정보를 안내 받는 그룹의 2계층으로 구분하여 동적통행배정모형을 개발하였으며 이를 바탕으로 DFS의 효과를 분석하였다. 신성길 외[1]의 3계층 동적통행배정모형의 해법을 개발하였다. 그들은 버스와 같이 대중교통의 고정된 경로를 이용하는 그룹, 자신이 인지하는 경로비용을 판단하여 경로를 선택하는 그룹, 정확한 경로선택에 대한 안내되는 정보를 기반으로 경로를 선택하는 그룹으로 구분하였다.

사실 위에서 살펴본 이용자 관점에서의 다차종(또는 다계층)을 고려하는 통행배정의 기존 연구들은 본 연구와 직접적으로 관련은 없다. 본 연구는

단일 차종 안정 동력학 모형을 다차종 모형으로 확장하는 연구로, 안정 동력학 모형은 링크 통행시간 함수를 이용하지 않기 때문에 이용자 균형에서와 같은 링크 통행시간 함수의 조건(엄격(strict) 볼록성, Jacobian 행렬의 대칭성/비대칭성 및 정칙(definite) 등)이 문제되지 않는다. 대신 안정 동력학 모형에서는 차량통행을 물리적 흐름의 관점에서 바라보기 때문에 차종별 통행을 어떠한 종류의 물리적 흐름으로 정의할 것인가, 이러한 정의가 균형에 어떠한 영향을 미칠 것인가를 규명하는 것이 관건이 된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서 Nesterov and de Palma[29]의 안정 동력학 모형을 간략히 소개한다. 본 연구의 결과는 제 3장부터 해당되지만 안정 동력학의 내용을 소개하고 단일 차종의 경우와 다차종의 경우를 비교하기 위해 제 2장을 포함하였다. 제 3장에서는 다차종을 정의하고, 다차종 안정 동력학 모형의 공리에 해당되는 기본가정을 제시한다. 그리고 균형 통행을 발견하는 수리모형 문제를 제안한다. 제안된 문제는 복수 상품 최소비용 네트워크 흐름문제로서 효율적인 해법들을 적용할 수 있다. 제 4장에서는 본 연구에서 제안한 다차종 안정 동력학 모형을 노드 6개, 링크 9개인 네트워크에 적용한 예를 보인다. 제 5장은 결론 및 후후 연구이다.

2. 안정 동력학의 기본 모형

본 장은 Nesterov and de Palma의 안정 동력학 기본모형[29]을 간략히 요약하여 소개한다. 또한 제 3장에서 제시할 다차종 안정 동력학 모형의 표현은 여기에서 소개하는 기본모형의 표현을 그대로 따른다. 본 장에서 안정 동력학 모형의 공리에 해당되는 2개의 가정을 소개하게 되는데, 이들은 다차종 모형에서 내용이 일부 수정되고, 새로운 가정이 추가되어 3개의 가정으로 구성될 것이다.

고려하는 교통망이 노드집합 N 과 방향성 링크집합 A 로 구성되어 있다고 가정한다. 또한 모든 운전

자의 출발지-목적지(OD : Origin-Destination) 쌍의 집합을 OD 라고 표현한다.

$$OD = \{(i, j) | i \in N, j \in N, i \neq j\}.$$

각 OD쌍 (i, j) 의 통행수요를 $d(i, j)$ 라고 가정한다. 이 수요는 노드 i 에서 노드 j 까지의 운전자들의 평균 통행량으로 간주된다. 또한 각 OD쌍 (i, j) 에 대해서 노드 i 와 노드 j 를 연결하는 경로집합을 다음과 같이 정의한다.

$$\{a_{(i,j)}^r \in R^{|A|} | r = 1, \dots, r_{(i,j)}\}$$

여기서 벡터 $a_{(i,j)}^r$ 의 $\alpha(\alpha = 1, \dots, |A|)$ 번째 성분은 다음과 같이 정의된다.

$$(a_{(i,j)}^r)_\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha \in r \\ 0, & \alpha \notin r \end{cases}$$

이제 각 링크 α 에 대해서 최소 통행시간(minimum travel time) \bar{t}_α 와 최대 링크통행량(maximum arc flow) \bar{f}_α 이 주어졌다고 가정한다. 최소 통행시간은 통행이 전혀 없는 링크를 제한속도(speed limit)로 이동하는 최소 자유통행시간이고, 최대 링크통행량은 도로의 차선수, 교차로에서의 녹색 신호등 주기, 날씨 등에 의존되는 최대 통행량이다. 안정 동력학은 이와 같이 쉽게 얻을 수 있는 자료로부터 균형 값을 계산한다. 이를 위해 다음의 2가지를 가정한다.

가정 2-1 (Wardrop 제 1원칙) 각 링크의 통행시간이 $t = \{t_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 로 주어졌을 때, 각 운전자들은 가장 짧은 통행시간 경로를 선택하여 목적지까지 간다.

가정 2-2 각 링크 α 의 통행량 f_α 는 최대 링크통행량 \bar{f}_α 를 넘지 않는다. 링크 통행시간(t_α)은 (i) $f_\alpha < \bar{f}_\alpha$ 이면, $t_\alpha = \bar{t}_\alpha$ 이고, (ii)

$f_\alpha = \bar{f}_\alpha$ 이면, $t_\alpha \geq \bar{t}_\alpha$ 이다.

위의 가정 2-1은 Wardrop[33]의 제 1원칙의 다른 표현이다. 1.2절에서 소개한 바와 같이 Wardrop 균형이란 “임의의 출발지-목적지에 대해 통행량이 배정된 경로들의 경로통행시간은 모두 같으며, 통행량이 배정되지 않은 경로로서 경로통행시간이 더 작은 경로는 존재하지 않는 경우의 통행”을 의미한다. 가정 2-1에 의할 때 임의의 출발지-목적지에 대해 경로통행시간이 가장 짧은 경로집합외의 다른 경로를 개별 운전자가 선택하지 않을 것은 자명하다. 따라서 가정 2-1을 만족하는 통행은 Wardrop 제1원칙을 만족함을 알 수 있다.

일반적인 도시 교통망에서 안정 동력학에 의한 균형 값을 계산하기 위해 각 링크에서의 통행시간 벡터 $t = \{t_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 가 주어졌다고 가정한다. 그러면 각 OD쌍 (i, j) 에 대한 최단경로를 계산할 수 있다. 최단경로 시간은 t 의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$T_{(i,j)}(t) = \min \{ \langle \alpha_{(i,j)}, t \rangle \mid r = 1, \dots, r_{(i,j)} \}$$

여기서 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 내적으로, $x, y \in \mathbb{R}^n$ 일 때, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 이다. 위의 표현에 의해 $T_{(i,j)}(t)$ 는 t 에 대해서 부분적-선형(piecewise linear)이며, 오목(concave)이 된다. 이제 모든 OD쌍에 대한 수요를 만족하는 전체 비용은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)} T_{(i,j)}(t)$$

안정 동력학의 기본 제약식 (2-1) 하에서 균형 값은 아래의 정리 2-1로 계산될 수 있다.

$$t_\alpha \geq \bar{t}_\alpha, \quad 0 \leq f_\alpha \leq \bar{f}_\alpha, \quad \alpha \in A \quad (2-1)$$

정리 2-1 (2-1)의 조건을 만족하는 링크통행시간 t^* 과 링크통행량 f^* 이 균형 값이 되기

위한 필요충분조건은 t^* 가 아래의 최대화 문제 (2-2)의 최적해인 것이며 $f^* = \bar{f} - s^*$ 이 된다. 여기서 s^* 는 제약식 (2-2b)의 최적 쌍대승수(dual multiplier)이다.

$$\text{Maximize} \quad \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)} T_{(i,j)}(t) - \langle \bar{f}, t \rangle \quad (2-2a)$$

$$\text{subject to} \quad t \geq \bar{t}. \quad (2-2b)$$

최대화 문제 (2-2)는 목적함수가 오목이고, 선형 제약식을 갖기 때문에 이에 대한 쌍대문제를 만들 수 있다. 쌍대 문제의 표현을 단순화하기 위해 몇 가지 추가적인 표현을 정의한다. 먼저, OD쌍의 수요를 출발지 위주의 표현으로 다시 정의한다. 즉, 각 노드 $i \in N$ 를 출발지로 하는 수요벡터를 $d_i \in \mathbb{R}^{|A|}$ 로 정의한다. 즉, d_i 의 j 번째 성분은 $d(i, j)$ 가 된다. 네트워크의 토폴로지를 나타내는 노드-링크 범위 행렬(incidence matrix) $E \in \mathbb{R}^{|N| \times |A|}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$E_{i\alpha} = \begin{cases} 1, & i = H(\alpha), \\ -1, & i = T(\alpha), \\ 0, & i \neq H(\alpha), i \neq T(\alpha), \end{cases} \quad i \in N, \alpha \in A.$$

여기서 링크 α 는 $H(\alpha) \rightarrow T(\alpha)$ 로서 $H(\alpha)$ 와 $T(\alpha)$ 는 각각 링크 α 의 머리노드 및 꼬리노드이다.

최대화 문제 (2-2)의 쌍대형태의 문제는 각 출발지 노드 $i \in N$ 에 의해서 생성되는 링크통행량 벡터 $f_i \in \mathbb{R}^{|A|}$ 로 표현된다. 쌍대문제 (2-3)은 링크 통행량이 주어진 경우의 복수상품 최소비용 네트워크 흐름문제가 되기 때문에 잘 알려진 효율적인 해법들을 적용하여 해를 구할 수 있다.

$$\text{Minimize} \quad \langle \bar{f} - \bar{f}, \bar{t} \rangle \quad (2-3a)$$

$$\text{subject to} \quad f = \sum_{i \in N} f_i \leq \bar{f}, \quad (2-3b)$$

$$Ef_i = d_i, i \in N, \quad (2-3c)$$

$$f_i \geq 0, i \in N \quad (2-3d)$$

3. 다차종 안정 동력학 모형

3.1 차종의 정의 및 가정

차종 집합을 C 라고 가정하고 각 차종에 관한 표현들을 정의한다. 차종 $u \in C$ 에 대한 OD쌍 (i, j) 의 수요를 $d_{(i,j)}^u$ 로 표현하고, 링크 α 에서의 차종 $u \in C$ 의 링크 통행시간 및 링크통행량을 각각 t_α^u 및 f_α^u 로 표현한다. 또한 링크 α 에서의 모든 차종을 포함한 최대통행량을 \bar{f}_α 라고 표현하고, 차종 u 의 최소 통행시간을 \bar{t}_α^u 로 표현한다.

이제 차종의 통행 성격을 나타내기 위하여 통행계수를 정의한다. 차종별 통행계수는 $\theta_u (u \in C)$ 로 표현하며, 해당 차종의 제한속도, 차량 길이 및 운행시 인접 차와의 간격 등에 의해 결정되며 링크와는 무관하게 결정되는 계수로 가정한다. 먼저, 제한속도에 의해 승용차($u=1$)와 트럭($u=2$)의 통행계수가 결정되는 예를 본다. 승용차를 기준 통행으로 가정하고($\theta_1 = 1$) 트럭의 제한속도가 모든 링크에서 승용차의 제한속도의 80%라고 가정한다면, 길이가 L 인 링크에서 승용차의 제한속도(v)로부터 승용차의 최소 통행시간은 $\bar{t}^1 = \frac{L}{v}$ 이 되며, 트럭의 최소

통행시간은 $\bar{t}^2 = \frac{L}{0.8v} = 1.25 \left(\frac{L}{v} \right) = 1.25 \bar{t}^1$ 이 됨을 알 수 있다. 이때 트럭의 통행계수를 $\theta_2 = 1.25$ 로 놓는다. 이는 링크에 무관하다.

통행계수는 해당 통행을 기준 통행으로 환산할 때 환산계수가 될 수 있다. 단위 시간당 기준 통행(승용차)에 의한 링크의 최대통행량을 \bar{f} 이라고 하면, 트럭의 최대통행량은 $0.8\bar{f}$ 이 된다. 따라서 승용차와 트럭의 통행량을 각각 f^1, f^2 라고 하면 전체 통행량은 기준 통행량으로 환산하여 $f^1 + 1.25f^2$ 로 계산되고, $f^1 + 1.25f^2 \leq \bar{f}$ 가 성립되어야 한다.

이제 다차종 안정 동력학의 기본 가정을 다음과 같이 정한다. 가정 3-1은 가정 2-1을 수정한 것으로 차종별 Wardrop 제 1원칙이 성립됨을 보장한다. 가정 3-2는 가정 2-2를 일부 수정한 것으로 통행계수에 의해 환산된 링크의 통행량 합계와 링크의 최대 통행량에 의해 통행시간이 결정된다는 가정이다. 가정 3-3은 다차종 모형을 위해 새로 추가된 가정으로 차종간 통행속도의 비에 대한 가정이다.

가정 3-1 (Wardrop 제1원칙) 차종별 링크 통행시간이 $t^u (u \in C)$ 로 주어졌을 때, 차종별 운전자들은 해당 클래스의 링크 통행시간으로 계산한 최단 통행시간 경로를 선택하여 목적지까지 간다.

가정 3-2 각 링크 α 에서 모든 차종의 환산된 통행량 합($f_\alpha = \sum_{u \in C} \theta_u f_\alpha^u$)은 최대 링크통행량 \bar{f}_α 을 넘지 않는다. 또한 차종 u 의 링크 통행시간(t_α^u)은 (i) $f_\alpha < \bar{f}_\alpha$ 이면, $t_\alpha^u = \bar{t}_\alpha^u$ 이고, (ii) $f_\alpha = \bar{f}_\alpha$ 이면, $t_\alpha^u \geq \bar{t}_\alpha^u$ 이다.

가정 3-3 차종간 통행 속도의 비는 링크에 관계없이 일정하며, 이는 통행계수 비의 역수이다.

가정 3-2로부터 다차종 모형의 기본 전제는 아래와 같다.

$$\sum_{u \in C} \theta_u f_\alpha^u \leq \bar{f}_\alpha, \quad \alpha \in A, \quad (3-1a)$$

$$t_\alpha^u \geq \bar{t}_\alpha^u, \quad f_\alpha^u \geq 0, \quad \alpha \in A, u \in C \quad (3-1b)$$

링크 α 에서 기준 통행($u=1$)의 속도 및 통행시간을 각각 v_α 및 t_α 로 표현한다면, 가정 3-3으로부터 임의의 차종 u 에 대해 다음의 관계가 성립한다.

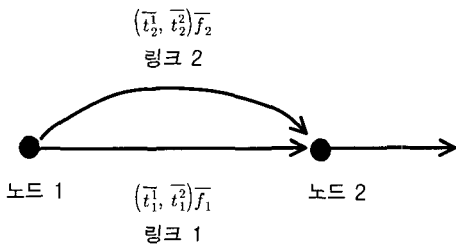
$$\frac{v_\alpha^u}{v_\alpha} = \frac{1/t_\alpha^u}{1/t_\alpha} = \frac{t_\alpha}{t_\alpha^u} = \frac{\theta_1}{\theta_u}, \quad \alpha \in A, u \in C$$

기준 통행의 통행계수를 $\theta_1 = 1$ 로 놓으면, $t_\alpha^u = \theta_u t_\alpha$ 가 되고, 최소 통행시간에 대해서도 같은 이유로 $\bar{t}_\alpha^u = \theta_u \bar{t}_\alpha$ 가 성립되어야 한다. 이제 $t^u = \{t_\alpha^u\}_{\alpha \in A} \in R^{|A|}$ 로 표현하고, 기준 통행의 경우는 $t \in R^{|A|}$ 로 표현한다. 그러면 가정 3-3으로부터 다음의 전체 조건이 추가된다.

$$\bar{t}^u = \theta_u \bar{t}, t^u = \theta_u t, u \in C \tag{3-1c}$$

3.2 간단한 네트워크에 2차종 모형 적용

[그림 3-1]은 2개의 평행한 링크로 구성된 간단한 네트워크로서, 2차종 모형을 적용하기 위해 차종별 최소 링크 통행시간이 표현되어 있다. 이제 차종 1을 기준($\theta_1 = 1$)으로 정하고, 차종 2의 통행계수는 $\theta_2 = 2$ 라고 가정한다. 또한 $\bar{t}_1 < \bar{t}_2$ 임을 가정한다. 그러면 (3-1c)에 의해서 $\bar{t}_1^2 = 2\bar{t}_1$ 및 $\bar{t}_2^2 = 2\bar{t}_2$ 이므로, $\bar{t}_1^2 < \bar{t}_2^2$ 이 된다. 차종 1과 2의 수요를 각각 $d_{(1,2)}^1, d_{(1,2)}^2$ 라고 하고, $d_{(1,2)}^1 + 2d_{(1,2)}^2 < \bar{f}_1 + \bar{f}_2$ 임을 가정한다.



[그림 3-1] 2차종 안정 동력학 모형 적용 ($\theta_1 = 1, \theta_2 = 2, \bar{t}_1 < \bar{t}_2$ 가정)

(i) $d_{(1,2)}^1 + 2d_{(1,2)}^2 < \bar{f}_1$ 인 경우: 가정 3-1에 의해 $f_1^* = d_{(1,2)}^1, f_2^* = d_{(1,2)}^2$ 이 된다. 그러면 $f_1^* + 2f_2^* = f_1^* < \bar{f}_1$ 및 $f_2^* = 0$ 이므로 가정 3-2에 의해 $t_1^* = \bar{t}_1, t_2^* = \bar{t}_1$ 및 $t_2^* = \bar{t}_2, t_2^* = \bar{t}_2$ 가 된다. 이는 가정 3-3을 만족한다. 즉, $t^{1*} = \begin{pmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_1 \end{pmatrix}, t^{2*} = \begin{pmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \end{pmatrix} = 2t^{1*}$ 이다.

(ii) $d_{(1,2)}^1 + 2d_{(1,2)}^2 = \bar{f}_1$ 인 경우: 가정 3-1에 의해 이 $f_1^* = d_{(1,2)}^1, f_2^* = d_{(1,2)}^2$ 된다. 그러면 $f_2^* = 0$ 이므로 가정 3-2에 의해 $t_1^* \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2], t_2^* \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ 및 $t_1^* = \bar{t}_2, t_2^* = \bar{t}_2$ 가 된다. 이제 가정 3-3으로부터 $t^{1*} = \begin{pmatrix} \tau \\ \bar{t}_2 \end{pmatrix}, t^{2*} = \begin{pmatrix} 2\tau \\ \bar{t}_2 \end{pmatrix} = 2t^{1*}$ 이 된다. 여기서 $\tau \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ 이다.

(iii) $d_{(1,2)}^1 + 2d_{(1,2)}^2 > \bar{f}_1$ 인 경우: 아래와 같이 3가지 경우의 통행이 있을 수 있다.

- 차종 1의 통행은 링크 1 및 링크 2로 분산되고, 차종 2의 통행은 링크 2만을 경유함
- 차종 2의 통행은 링크 1 및 링크 2로 분산되고, 차종 1의 통행은 링크 2만을 경유함
- 차종 1과 2 모두 링크 1 및 링크 2로 분산 경유함

첫 번째 경우, $f_1^* = \beta_1$ 로 놓으면, $f_2^* = 0, f_2^* = d_{(1,2)}^1 - \beta_1$ 및 $f_2^* = d_{(1,2)}^2$ 이 되고, 두 번째 경우, $f_1^* = \beta_2$ 로 놓으면, $f_1^* = 0, f_2^* = d_{(1,2)}^1$ 및 $f_2^* = d_{(1,2)}^2 - \beta_2$ 이 되며, 세 번째 경우, $f_1^* = \beta_1 > 0, f_2^* = \beta_2 > 0, \beta_1 + 2\beta_2 = \bar{f}_1$ 로 놓으면, $f_2^* = d_{(1,2)}^1 - \beta_1$ 및 $f_2^* = d_{(1,2)}^2 - \beta_2$ 이 된다. 그러나 위의 세 경우 모두 가정 3-1 및 가정 3-2로부터 $t_1^* \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2], t_1^* = [\bar{t}_1, \bar{t}_2], t_2^* = \bar{t}_2, t_2^* = \bar{t}_2$ 가 됨을 알 수 있다. 또한 가정 3-3으로부터 $t^{1*} = \begin{pmatrix} \tau \\ \bar{t}_1 \end{pmatrix}, t^{2*} = \begin{pmatrix} 2\tau \\ \bar{t}_2 \end{pmatrix} = 2t^{1*}$ 이 된다. 여기서 $\tau \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ 이다.

이제 일반적인 네트워크에 대해 다차종 안정 동력학에 의한 균형 값을 계산하는 방법을 제안하고자 한다.

3.3 일반적 네트워크에서의 다차종 안정 동력학 모형

차종 u 의 OD쌍 (i, j) 에 대한 최단경로 시간은 $t^u \in R^{|A|}$ 의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$T_{(i,j)}^u(t^u) = \min \{ \langle a_{(i,j)}^{r^u}, t^u \rangle \mid r^u = 1, \dots, r_{(i,j)}^u \}$$

충분조건은 $f^u \in \partial_{t^u} C_u(t^u)$ 이 성립하는 것이다.

여기서 $r_{(i,j)}^u$ 는 차종 u 에 대해서 OD쌍 (i, j) 를 연결하는 경로의 경우 수이다. $T_{(i,j)}^u(t^u)$ 는 t^u 에 대해서 부분적-선형이며, 오목함수이다. 따라서 $T_{(i,j)}^u(t^u)$ 의 상위미분(super-differential) $\partial T_{(i,j)}^u(t^u)$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.²⁾

$$\partial T_{(i,j)}^u(t^u) = \text{co} \{ a_{(i,j)}^{r^u} \mid r^u \in I_{(i,j)}^u(t^u) \}$$

여기서, $I_{(i,j)}^u(t^u) = \{ r \in [1, \dots, r_{(i,j)}^u] \mid \langle a_{(i,j)}^{r^u}, t^u \rangle \geq T_{(i,j)}^u(t^u) \}$ 로서 차종 u 의 OD쌍 (i, j) 를 연결하는 최단시간 경로집합을 의미하며, 'co'는 볼록덮개(convex-hull)를 의미한다.³⁾

이제 차종별 링크 통행시간이 $t^u (u \in C)$ 로 주어질 때, 전체 비용함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\sum_{u \in C} C_u(t^u) = \sum_{u \in C} \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)}^u T_{(i,j)}^u(t^u). \quad (3-2)$$

아래의 정리 3-2, 정리 3-3 및 정리 3-4는 단일 차종 모형[29]의 정리 1, 정리 3 및 보조정리 3의 다차종 버전으로, 정리 3-2와 정리 3-3의 증명은 단일 차종의 경우와 비슷하다.

정리 3-2 링크 통행시간이 $t^u (u \in C)$ 로 주어질 때, 링크통행량 $f^u \in R^{|A|} (u \in C)$ 가 Wardrop 균형통행(가정 3-1)이 되기 위한 필요

(증명) 차종 u 의 OD쌍 (i, j) 의 수요 $d_{(i,j)}^u$ 에 의한 링크통행량 f_{ij}^u 가 가정 3-1을 만족하기 위한 필요충분조건은 수요 $d_{(i,j)}^u$ 를 최단시간 경로집합에 분산(같은 양으로 분산시킬 필요 없음)시켜 보내는 것이다. 분산 가중치가 고려된 모든 최단시간 경로집합이 $\partial_{t^u} T_{(i,j)}^u(t^u)$ 이므로, 임의의 $g_{ij}^u \in \partial_{t^u} T_{(i,j)}^u(t^u)$ 에 대해서 $f_{ij}^u = d_{(i,j)}^u g_{ij}^u$ 가 되어야 한다. 이제

$$\partial_{t^u} C_u(t^u) = \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)}^u \partial_{t^u} T_{(i,j)}^u(t^u)$$

이므로, 임의의 $g_{ij}^u \in \partial_{t^u} T_{(i,j)}^u(t^u)$ 에 대해서 다음이 성립한다.

$$f^u = \sum_{(i,j) \in OD} f_{ij}^u = \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)}^u g_{ij}^u \in \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)}^u \partial_{t^u} T_{(i,j)}^u(t^u) = \partial_{t^u} C_u(t^u) \quad \square$$

이제 다차종을 갖는 경우의 안정 동력학에 의한 균형 값이 정리 3-3으로 계산됨을 보이고자 한다.

정리 3-3 (3-1)의 조건을 만족하는 링크 통행시간 $t^{u*} (u \in C)$ 와 링크통행량 $f^{u*} (u \in C)$ 가 균형 값을 갖기 위한 필요충분조건은 t^{u*} 가 아래의 최대화 문제 (3-3)의 최적해가 되는 것이며, 이때 $\sum_{u \in C} \theta_u f^{u*} = \bar{f} - s^*$ 가 된다. 여기서 s^* 는 부등식 (3-3b)에 대한 최적 쌍대수이다.

Maximize

$$\sum_{u \in C} \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)}^u T_{(i,j)}^u(t^u) - \langle \bar{f}, t \rangle \quad (3-3a)$$

$$\text{subject to} \quad t \geq \bar{t} \quad (3-3b)$$

$$t^u = \theta_u t, u \in C. \quad (3-3c)$$

2) 오목함수 함수 $f: R^m \rightarrow R$ 의 상위미분(super-differential) $\partial f(x)$ 는 아래와 같이 정의한다.

$$\partial f(x) = \{ g \in R^m \mid f(y) \geq f(x) + \langle g, y - x \rangle, \forall y \in R^m \}$$

3) 집합 C 의 볼록덮개(convex hull, $\text{co}(C)$)는 C 의 모든 볼록결합(convex combination)의 집합으로 다음과 같이 정의한다.

$$\text{co}(C) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, x_i \in C, i = 1, \dots, k \right\}$$

(증명) (3-3b)의 쌍대승수를 s 로 놓는다. 그러면 (3-3c) 조건 하에서 라그랑지 함수는

$$L = \sum_{u \in C} C_u(t^u) - \langle \bar{f}, t \rangle + \langle t - \bar{t}, s \rangle$$

와 같이 표현되고, t 에 대해서 선형이고, t^u 에 대해서 오목이다. 따라서 전체 L 에 대해서 상위미분이 정의될 수 있다. 또한 (3-3c)에 의해 $\partial_t C_u(t^u) = \partial_{t^u} C_u(t^u)$

$$\cdot \frac{\partial t^u}{\partial t} = \partial_{t^u} C_u(t^u) \theta_u \quad \text{이므로}$$

$$\partial_t L = \sum_{u \in C} \theta_u \partial_{t^u} C_u(t^u) - \bar{f} + s$$

가 된다. 이제 최대화 문제 (3-3)이 최적해를 갖기 위한 필요충분 조건은 (3-3c) 조건 하에서 $\min_{s \geq 0} \max_{t, t^u} L$ 의 안장점이 존재하는 것이다. 다시 표현하면, 각 차종 $u \in C$ 에 대해서 $f^u \in \partial_{t^u} C_u(t^u)$ 가 존재하여 다음이 성립하는 것이다. (3-4c)는 (3-3c)이다.

$$\sum_{u \in C} \theta_u f^u - \bar{f} + s = 0, \quad (3-4a)$$

$$\langle s, t - \bar{t} \rangle \geq 0, s \geq 0, t - \bar{t} \geq 0, \quad (3-4b)$$

$$t^u = \theta_u t, u \in C \quad (3-4c)$$

$f^u \in \partial_{t^u} C_u(t^u)$ 의 성립은 정리 3-2에 의해 Wardrop 균형통행이기 위한 필요충분조건이며, (3-4a) 및 (3-4b)는 가정 3-2와 동치이고, (3-4c)는 가정 3-3과 동치이다. \square

효율적 해법이 적용되기 쉽게 최대화 문제 (3-3)을 쌍대형태의 문제로 전환한다. 이를 위해 출발지에 기초한 표현을 정의한다. 각 차종 $u \in C$ 에 대해 노드 $i \in N$ 를 출발지로 하는 수요벡터를 $d_i^u \in R^M$ 로 정의한다. 즉, $(d_i^u)_j = d_{(i,j)}^u$ 이다. 각 출발지 노드 $i \in N$ 에 의해서 생성되는 링크 통행량 벡터는 $f_i^u \in R^A$ 로 표현한다. 네트워크의 토폴로지는 단일 차종 모형에서와 같이 노드-링크 범위행렬

$B \in R^{M \times |A|}$ 로 표현한다.

단일 차종 모형의 쌍대문제(보조정리 3)에 대응되는 다차종 모형의 결과는 정리 3-4이며 이는 본 연구의 핵심 결과이다. 차종별 통행계수의 정의 및 가정 3-3은 본 정리의 표현 및 증명에 직접적으로 연관된다. 정리 3-4에 의해 얻어지는 최적해는 [29]에서 도출한 문제와 유사한 형태의 복수상품 최소 비용 네트워크 흐름문제의 해가 된다.

정리 3-4 최대화 문제 (3-3)은 다음의 쌍대 형태의 문제 (3-5)로 표현된다.

$$\text{Minimize} \quad \sum_{u \in C} \langle f^u, \bar{t}^u \rangle \quad (3-5a)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{u \in C} \theta_u f^u \leq \bar{f}, \quad (3-5b)$$

$$f^u = \sum_{i \in N} f_i^u, u \in C, \quad (3-5c)$$

$$E f_i^u = d_i^u, i \in N, u \in C, \quad (3-5d)$$

$$f_i^u \geq 0, i \in N, u \in C. \quad (3-5e)$$

(증명) 조건 (3-1c)로부터 $\langle f^u, \bar{t}^u \rangle = \langle f^u, \theta_u \bar{t} \rangle = \langle \theta_u f^u, \bar{t} \rangle$ 이므로 다음이 성립된다.

{문제 (3-5)의 해}

$$= \arg \min_{f^u, f_i^u} \left\{ \langle \sum_{u \in C} \theta_u f^u - \bar{f}, \bar{t} \rangle \mid \text{제약식(3-5b-e)} \right\}$$

$$= \arg \min_{f^u, f_i^u} \max_{\tau \geq 0} \left\{ \langle \sum_{u \in C} \theta_u f^u - \bar{f}, \bar{t} \rangle + \right.$$

$$\left. \langle \sum_{u \in C} \theta_u f^u - \bar{f}, \tau \rangle \mid \text{제약식(3-5c~e)} \right\}$$

$$= \arg \min_{f^u, f_i^u} \max_{\tau \geq 0}$$

$$\left\{ \langle \sum_{u \in C} \theta_u f^u - \bar{f}, \bar{t} + \tau \rangle \mid \text{제약식(3-5c~e)} \right\}$$

$$= \arg \max_{\tau \geq 0} \min_{f^u, f_i^u}$$

$$\left\{ \langle \sum_{u \in C} \theta_u f^u - \bar{f}, \bar{t} + \tau \rangle \mid \text{제약식(3-5c~e)} \right\}$$

$$= \arg \max_{\tau \geq 0} \left\{ -\langle \bar{f}, \bar{t} + \tau \rangle \right.$$

$$\left. + \min_{f^u, f_i^u} \left\{ \langle \sum_{u \in C} \theta_u f^u, \bar{t} + \tau \rangle \mid \text{제약식(3-5c~e)} \right\} \right\}$$

$$= \arg \max \left\{ -\langle \bar{f}, \bar{t} \rangle \right.$$

$$\left. + \sum_{u \in C} \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)}^u T_{(i,j)}(t^u) \mid t \geq \bar{t}, t^u = \theta_u t, u \in C \right\}$$

첫 번째 등식의 문제는 문제 (3-5)와 비교할 때 목적함수에서 상수 $\langle \bar{f}, \bar{t} \rangle$ 차이 밖에 없으므로 두 해집합은 같다. 두 번째 등식의 문제는 부등식 (3-5b)에 대해서 쌍대승수 $\tau(\geq 0)$ 을 도입하여 얻은 라그랑지 함수로부터 얻은 쌍대문제이다. 또한 마지막에서 두 번째 등식 내부의 최소화 문제는 아래에서 보는 바와 같이 최단경로 시간으로 표현되며, $t = \bar{t} + \tau$ 라고 놓으면 마지막 등식의 문제가 된다. 따라서 최소화 문제 (3-5)는 최대화 문제 (3-3)의 쌍대 형태의 문제이다.

$$\begin{aligned} & \min_{f^u, f^t} \langle \sum_{u \in C} \theta_u f^u, \bar{t} + \tau \rangle \mid \text{제약식}(3-5c \sim e) \\ & = \min_{f^u, f^t} \sum_{u \in C} \langle f^u, \theta_u (\bar{t} + \tau) \rangle \mid \text{제약식}(3-5c \sim e) \\ & = \sum_{u \in C} \left(\min_{f^u, f^t} \{ \langle f^u, t^u \rangle \mid \text{제약식}(3-5c \sim e) \} \right) \\ & \quad (t^u = \theta_u (\bar{t} + \tau) \text{ 조건 하에서}) \\ & = \sum_{u \in C} \sum_{(i,j) \in OD} d_{(i,j)}^u T_{(i,j)}^u(t^u) \\ & \quad (t^u = \theta_u (\bar{t} + \tau) \text{ 조건 하에서}) \quad \square \end{aligned}$$

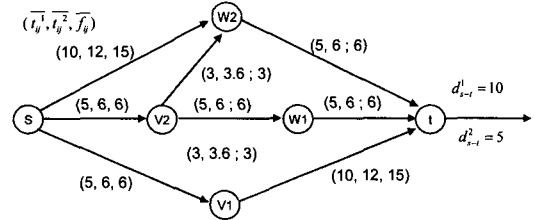
문제 (3-5)는 결합 제약 (3-5b)를 제외하면 차종별로 각각 최소비용 네트워크 흐름문제가 된다. 따라서 문제 (3-5)는 전형적인 복수상품 최소비용 네트워크 흐름문제가 되고, 이에 대한 효율적인 해법에 대해서는 Ahuja의[5]와 Ouorou의[30]를 참고할 수 있다.

4. 네트워크 적용 예

전장에서 2개의 평행한 링크를 갖는 간단한 네트워크([그림 3-1])에 대해 2차종 안정 동력학 모형의 적용 결과를 제시하였다. 본 장에서는 좀 더 많은 수의 링크를 갖는 네트워크에 대해 다차종 모형의 적용 예를 제시한다.

[그림 4-1]은 노드가 6개, 링크가 9개인 네트워크이다. 이제 하나의 출발지-목적지(s-t)에 대해서 2종류의 차종을 고려한다. 차종 1의 통행수요는 10, 차종 2의 통행수요는 5를 가정한다. 통행계수는 차

종1의 경우를 기준차종($\theta_1 = 1.0$)으로 하여, 차종 2의 통행계수를 $\theta_2 = 1.2$ 로 가정한다.



[그림 4-1] 예제 네트워크(노드 6개, 링크 9개)

이제 노드 6개와 링크 9개에 대해 [그림 4-2]와 같이 순서를 정하면 노드-링크 범위행렬 E는 아래와 같이 주어지며, 차종별 통행수요 벡터 d^1, d^2 는 아래와 같다고 가정한다.

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d^1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad d^2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

또한 최대 링크 통행량 \bar{f} 및 차종별 최소 링크 통행시간 \bar{t}^1, \bar{t}^2 에 대해서도 다음과 같이 주어졌다고 가정한다.

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 15 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 15 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{t}^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 10 \\ 3 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{t}^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \\ 3.6 \\ 6 \\ 3.6 \\ 12 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

이와 같은 입력자료에 대해 문제 (3-5)를 적용한 결과는 [그림 4-2]와 같다. 선형계획 solver로는

Problem (3-6) and its result											통행량	통행시간
링크	s-v1	s-v2	s-w2	v1-w1	v2-w1	v2-w2	v1-t	w1-t	w2-t			
t^1	5	5	10	3	5	3	10	5	7	차종 1 경로 s-v1-t	4	15
	>=	>=						>=	>=	경로 s-v2-w1-t	4	15
bar t^1	5	5	10	3	5	3	10	5	5	경로 s-v2-w2-t	2	15
t^2	6	6	12	3.6	6	3.6	12	6	8.4	차종 2 경로 s-v1-w1-t	1.667	18
	>=	>=						>=	>=	경로 s-w2-t	3.333	18
bar t^2	6	6	12	3.6	6	3.6	12	6	6			
											33	min
											(차종1 경로 통행시간) + (차종2 경로 통행시간)	

[그림 4-3], [문제 (3-6)] 적용결과(엑셀 해찾기)

정 3-2로부터 성립된다. 목적함수는 선형계획 solver를 적용하기 위해 차종별 경로 통행시간을 합계한 값이다. 엑셀 해찾기 적용결과는 [그림 4-3]과 같다. 즉, $t_{s-v1}^1 = t_{s-v2}^1 = t_{w1-t}^1 = 5$, $t_{w2-t}^1 = 7$ 이고, 대응되는 차종 2의 링크 통행시간은 1.2배로서 각각 6, 6, 6, 8.4가 된다. 또한 차종1과 차종 2의 경로 통행시간은 각각 15 및 18 이다.

5. 결론 및 추후 연구

본 논문에서는 Nesterov와 de Palma[29]가 물리적인 개념에 기초하여 제시한 단일 차종 안정 동력학 모형을 다차종 모형으로 확장하였다. 안정 동력학 모형은 인위적인 링크 비용함수를 가정하지 않고, 링크 별로 아주 기본적인 2개의 물리량(최소 통행시간과 최대통행량)만을 요구하며, “최대통행량 이하에서는 최소 통행시간으로 흘러가고, 최대 통행량에서는 최소 통행시간 이상으로 흘러간다.”는 단순한 가정으로부터 세워진 모형이다. 그러나 안정 동력학 모형은 놀랍게도 Wardrop 제 1원칙을 만족하는 균형통행은 물론 브라이스 역설과 같은 문제도 표현할 수 있기 때문에 동적인 교통망에 대해 기본적인 유용한 분석 도구가 될 것으로 기대된다.

본 연구에서는 안정 동력학의 다차종 모형을 위한 가정들을 정의하였으며, 차종별 통행의 성격을 통행계수로 표현하였다. 차종이란 승용차, 버스, 트

럭 등의 자동차 종류는 물론, 연령, 성별 및 소득수준 등으로 인한 운전 양태에 따른 운전자 분류를 포함할 수도 있다. 또한 통행계수는 차종별 제한속도, 차량 길이 및 운행시 인접 차와의 간격 등에 의해 결정되는 값으로, 해당 차종의 통행량을 기준 차종의 통행량으로 환산할 때 환산계수가 되기도 한다. 본 연구에서는 차종간 통행속도의 비는 링크에 관계없이 일정하며, 통행계수 비의 역수가 된다고 가정하였다. 그리고 이 가정으로부터 다차종 안정 동력학 모형의 균형에 도달될 수 있음을 보였다. 균형 값은 Nesterov와 de Palma가 얻어낸 문제와 유사한 형태의 복수상품 최소비용 네트워크 흐름문제의 해가 됨을 보였다. 이 문제의 결합 제약은 모든 차종의 환산된 통행량 합이 링크별로 최대통행량을 초과할 수 없다는 부등식이고, 이를 제외하면 각 차종별로 최소비용 네트워크 흐름문제가 된다. 따라서 이에 대해 잘 알려진 효율적인 네트워크 알고리즘을 적용할 수 있다.

본 연구의 추후 연구로는 다음의 세 가지를 생각할 수 있다. 첫째, 실제 교통망에 적용하는 적용연구이다. 적용 결과는 실제 상황 및 이용자 균형 모형의 결과와 비교할 때 좋은 의미를 발견할 수 있으리라 생각한다. 그러나 이러한 적용 연구는 비교적 많은 조사와 노력이 요구된다. 둘째, 문제 (3-5)의 특성 연구와 이로부터 특수성을 갖는 해법 개발 연구가 있을 수 있다. 이는 문제 (3-5)가 차종별 통행계수로 서로 연관되어 있으므로 특별한 성격을

갖는 복수상품 최소비용 네트워크 흐름문제이기 때문이다. 셋째, 다차종 모형의 응용 연구로서 안정 동력학 모형에 기초한 다차종 틀-설계 연구 및 탄력적 수요를 갖는 균형통행 연구 등이 있을 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] 신성길, 김정현, 백남철, “다계층 운전자를 고려한 동적통행배정모형의 해법”, 『대한교통학회지』, 제21권, 제6호(2003) pp.77-88.
- [2] 유순경, 이영인, 임강원, 임용택, “다계층을 고려한 대중교통 확률적 사용자 균형 알고리즘 개발”, 『대한교통학회지』, 제23권, 제7호(2005), pp.165-179.
- [3] 이승재, 손의영, 김인경, “다수단 다계층 통행 정보제공에 따른 일별동적결합모형 개발 및 평가”, 『대한교통학회지』, 제17권, 제4호 (1999) pp.85-97.
- [4] 이준, 이영인, 임강원, 임용택, “동적 경로안내 전략 수행을 위한 다계층 통행배정모형의 개발”, 『대한교통학회지』, 제22권, 제7호(2004) pp.91-98.
- [5] Ahuja, K.R., L.T. Magnanti and B.J. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, (1993).
- [6] Babonneau, F. and J.-P. Vial, “An Efficient Method to Compute Traffic Assignment Problems with Elastic Demands,” Manuscript, University of Geneva, Switzerland, (2007).
- [7] Beckmann, M., C. McGuire, and C. Winsten, *Studies in Economics of Transportation*, Yale University Press, New Haven, (1956).
- [8] Bellei, G., G. Gentile and N. Papola, “Network Pricing Optimization in Multi-user and Multimodal Context with Elastic Demand,” *Transportation Research B* Vol. 36(2002), pp.779-798.
- [9] Bernstein, D.H. and T.E. Smith, “Equilibria for Networks with Lower Semicontinuous Costs: With an Application to Congested Pricing,” *Transportation Science*, Vol.28(1994), pp.221-235.
- [10] Braess D. and G. Koch, “On the Existence of Equilibria in Asymmetrical Multiclass-User Transportation Networks,” *Transportation Science* Vol.13(1979) pp.56-63.
- [11] Chen, M. and D.H. Berstein, “Solving the Toll Design Problem with Multiple User Groups,” *Transportation Research B*, Vol. 38(2004) pp.61-79.
- [12] Connors, R.D., A. Sumalee and D.P. Watling, “Sensitivity Analysis of the Variable Demand Probit Stochastic User Equilibrium with Multiple User-Classes,” *Transportation Research B* Vol.41(2007) pp.593-615.
- [13] Dafermos, S.C., “An Extended Traffic Assignment Model with Applications to Two-Way Traffic,” *Transportation Science* Vol.5(1971) pp.366-389.
- [14] Dafermos, S.C., “The Traffic Assignment Problem for Multiclass-user Transportation Networks,” *Transportation Science*, Vol.6(1972) pp.73-87.
- [15] Dafermos, S.C., “Toll Patterns for Multiclass-User Transportation Networks,” *Transportation Science* Vol.7(1973) pp.211-223.
- [16] Dafermos, S.C., “Traffic Equilibrium and Variational Inequality,” *Transportation Science* Vol.14(1980) pp.42-54.
- [17] Dafermos, S.C., “A Multicriteria Route-Mode Choice Traffic Equilibrium Model,” Lefschetz Center for Dynamical System, Brown University, Providence, RI, 1981.
- [18] Daganzo, C.F., “Stochastic Network Equilibrium with Multiple Vehicle Types and

- Asymmetric, Indefinite Link Cost Jacobians," *Transportation Science* Vol.17(1983) pp.282-300.
- [19] Daganzo, C.F. and Y. Sheffi, "On Stochastic Model of Traffic Assignment," *Transportation Science* Vol.11(1977) pp.253-274.
- [20] De Palma, A. and Y. Nesterov, "Optimization Formulation and Static Equilibrium in Congested Transportation Networks," CORE DP # 9861, Universite Catholique de Louvain, (1998).
- [21] De Palma, A. and Y. Nesterov, "Park and Ride for the Morning and Evening Commute," In : S. Lawphongpanich, D.W. Hearn and M.J. Smith (Ed.), *Mathematical and Computational Models for Congestion Charging*, *Applied Optimization* Vol.101, Springer, (2006) pp.143-157.
- [22] Dial, R.B., "A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Model Which Obviates Path Enumeration," *Transportation Research* Vol. 5(1971), pp.83-111.
- [23] Dial, R.B., "A Model and Algorithm for Multicriteria Route-Mode Choice," *Transportation Research B* Vol.13(1979), pp. 311-316.
- [24] Heydecker, B.G. and J.D. Addison, "An Exact Expression of Dynamic Traffic Equilibrium," In : Lesort, J.B. (Ed.), *Transportation and Traffic Theory*, Pergamon, Oxford, (1996), pp.359-383.
- [25] Lam, W.H.K. and H.J. Huang, "A Combined Trip Distribution and Assignment for Multiple User Classes," *Transportation Research B*, Vol.26(1992), pp.275-287.
- [26] Nagurney, A., *Network Economics : A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1993).
- [27] Nagurney, A. and J. Dong, "A Multiclass, Multicriteria Traffic Network Equilibrium Model with Elastic Demand," *Transportation Research B* Vol.36(2002), pp.445-469.
- [28] Nesterov, Y. and A. de Palma, "Stable Traffic Equilibria : Properties and Applications," *Optimization and Engineering*, Vol.1(2000), pp.29-50.
- [29] Nesterov, Y. and A. de Palma, "Stable Dynamics in Transportation Systems," CORE DP # 00/27, University of Louvain, Belgium, (2000).
- [30] Ouorou, A., P. Mahey and J.-Ph. Vial, "A Survey of Algorithms for Convex Multi-commodity Flow Problems," Research Report 97/13, University of Geneva, (1997).
- [31] Ran, B. and D.B. Boyce, *Modelling Dynamic Transportation Networks : An Intelligent Transportation System Oriented Approach*, Springer, (1996).
- [32] Steinberg, R. and W.I. Zangwill, "The Prevalence of Braess' Paradox," *Transportation Science*, Vol.17(1983), pp.301-318.
- [33] Wardrop, J.G., "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research," in *Proceedings of the Institute of Civil Engineering*, Part II, (1952) pp.325-378.
- [34] Wong, K.I., S.C. Wong, J.H. Wu, H. Yang, and W.H.K. Lam, "A Combined Distribution, Hierarchical Mode Choice, and Assignment Network Model with Multiple User and Mode Classes," In : Lee, D.H. (Ed.), *Urban and Regional Transportation Modeling : Essays in Honor of David Boyce*, Edward Elgar Publishing Inc., Northampton, USA, (2003).
- [35] Yang, H. and X. Zhang, "Multiclass Network Toll Design Problem with Social and

- Spacial Equity Constraints,” *Journal of Transportation Engineering*, (2002), pp. 420-428.
- [36] Zhao, Y. and K.M. Kochelman, “On-line Marginal-Cost Pricing Across Networks: Incorporating Heterogeneous Users and Stochastic Equilibria,” *Transportation Research B* Vol.40(2006), pp.424-435.
- [37] U.S. Bureau of Public Roads, *Traffic Assignment Manual*, Washington, D.C., (1964).
- [38] “Updated BPR Parameters Using HCM Procedures,” cited from “Traffic Engineering: Planning for Traffic Loads,” <http://www.sierrafoot.org/local/gp/engineering.html>.