

초등수학에서 분수에 관한 교수학적 내용 지식 개발 연구¹⁾

이대현²⁾

이 연구는 초등 수학에서 학생들이 어려움을 느끼고 있는 분수영역에 대하여 내실 있는 분수지도에 필요한 교수학적 내용 지식의 개발을 목적으로 하였다. 교수학적 내용 지식의 개발은 학생들이 학습 내용을 잘 이해할 수 있도록 교사가 가르칠 내용을 효과적으로 지도할 수 있는 교수 방법의 개발에 초점을 두고 있다.

교수학적 내용 지식의 범주로는 교육과정에 대한 이해, 학생과 학생 지식에 대한 이해, 교사와 교사 지식에 대한 이해, 수업 방법, 내용, 운영에 대한 이해, 평가 방법 이해를 제시하였다. 이에 따라 분수 관련 교수-학습과 관련하여 수학 교사가 숙지해야 할 내용과 더불어 수업에서 활용할 수 있는 학습 자료를 제시하는 것에 초점을 두고, 각각에 해당하는 교수학적 내용 지식을 개발하였다.

본 연구에서 개발된 분수 관련 교수학적 내용 지식은 교육 내용과 그에 적절한 교수 방법, 그리고 교육 내용과 관련된 풍부한 소재의 개발과 보급을 통하여 학생의 삶에 유의미한 도구로서의 수학을 인식시킬 수 있는 의미 있는 수학교육으로 변화를 유도할 수 있을 것이다.

주요용어 : 교수학적 내용 지식, 교과 내용 지식, 교육과정 지식, 분수, 수업의 내실화

I. 서론

21세기 지식 정보화 사회에서 학교 수학은 자기 주도적으로 지적 가치를 창출할 수 있는 창의적인 인간 육성이라는 시대적·사회적 요구에 부응해야 한다. 따라서 수학교육은 실생활이나 다른 교과 내용과 관련된 수학 문제를 해결하는 능력, 수학을 사용하여 추론하고 정보를 처리하는 능력, 수학적 창의력, 그리고 수학적 소양³⁾을 길러 주는 데 초점을 두어야 한다. 이를 위해 수학 교수활동에 대한 전문적인 지식을 바탕으로 전문 교수 능력을 겸비한 수학교사에 의한 학교 수학 수업의 내실화가 요구된다.

여기서 수학교사의 수학 교과에 대한 전문적 지식이라 함은 단순한 ‘교과 내용 지식’만을 의미하는 것이 아니라, 교과와 관련된 다양한 메타 지식적인 측면의 ‘교수학적 내용 지식’

1) 본 논문은 2006학년도 광주교육대학교 학술연구비 지원에 의해 연구되었음.

2) 광주교육대학교 (leedh@gnue.ac.kr)

3) 수학적 소양은 NCTM(1989)에 제시된 수학교육의 한 목표이다. 수학적 소양은 단순히 기계적인 연산을 수행하는 것보다는 수학적 개념과 원리를 일상생활에서 꼭넓게 사용하는 것을 의미한다. 따라서 수학에서의 ‘소양(literacy)’이라는 용어는 단지 학교 교육과정에 제시된 수학적 내용의 숙달보다는 일상생활에 이를 기능적으로 사용할 수 있는 능력을 의미한다.

(PCK, pedagogical content knowledge)⁴⁾을 함의한다.

교직이 전문직으로서 그 위상을 높일 수 있는 데에는 교사가 지닌 전문 지식 영역이 존재하기 때문이며, 이에 Shulman(1986)은 교사들이 교과 내용 지식을 알고 이해해야 할 뿐만이 아니라, 특정 내용을 가르치는 방법도 알아야 한다고 주장하면서 교수학적 내용 지식이라는 표현을 사용하였다. Shulman이 기여한 주요 부분은 효과적인 교수 활동에서 교사가 지닌 교과 영역 고유 지식의 중요성을 강조한 점이다(이화진 외, 2005).

Shulman(1986)은 교사들이 지닌 교수활동에서의 내용 지식을 정의하기 위하여 교과 내용 지식, 교육과정 지식, 교수학적 내용지식을 제안하였다. 또한 Shulman(1987)은 교과 내용 지식, 일반적인 교수법적 지식, 교육과정에 대한 지식, 교수학적 내용 지식, 학습자에 대한 지식, 교육상황에 대한 지식, 교육목적에 대한 지식 등 7가지 지식을 교수활동에 필요한 최소한의 지식으로 확인하였다. Shulman이 제시하는 지식 기반의 특징은 교사가 가지고 있는 수학 내용 지식을 다양한 배경과 능력을 가진 학생들에게 맞추어 교수법적으로 적절하게 변형시켜 제공할 수 있는 역량이라고 할 수 있다(이화진 외 2005).

Shulman에서 시작된 교수학적 내용 지식에 대한 관심은 학생들이 수학을 학습할 때 수학 내용을 잘 이해할 수 있도록 교사가 교육 내용을 효과적으로 지도할 수 있는 ‘교수 방법의 개발’이라고 할 수 있다. 특히 여러 교과를 지도해야만 하는 초등 교육에서 수학을 지도하는 교사는 우선적으로 수학의 다양한 영역에 대한 내용 지식을 겸비하여야 한다. 또한, 교사는 다양한 수학 능력 수준의 개개인으로 구성된 교실의 학생들에게 교육 내용을 효과적이고 효율적으로 지도하기 위하여 수학 내용과 관련된 교수학적 내용 지식을 소유하여야 하고, 이를 바탕으로 수업을 설계하고 수학을 지도하는 방법을 강구하여야 한다.

Ma(1999)는 미국과 중국의 초등학교 교사들의 수업을 관찰하면서 미국에 비해 중국 교사들의 학력 수준이 평균적으로 낮으며, 예비 교사교육 기간이 적음에도 불구하고 수학을 더 깊이 있게 이해하고 있음을 보이고 있다. Ma(1999)는 중국 학생들이 수학 성취도에 대한 국제비교연구에서 좋은 결과를 나타내고 있음을 확인하고, 그 원인이 부모의 기대나 수 체계와 같은 문화적 배경, 학교의 조직, 수학시간에 투자하는 시간 수 등 여러 측면에서도 기인하겠지만, 수학교사가 가지고 있는 교수학적 내용 지식을 고려하는 것이 중요하다고 보고 있다.

초등 수학에서 교수학적 내용 지식의 개발 연구는 ‘교사가 어떤 지식을 바탕으로 어떻게 가르쳐야만 학생들이 수학 학습 내용을 보다 잘 학습하고 이해할 수 있는가’라는 물음으로부터 시작되어야 한다. 교사는 단순히 교육 내용을 전달하는 것이 아니라, 지식을 받아들이는 학생에 대한 충분한 이해를 바탕으로 교육 내용에 대한 이해와 그 교육 내용과 관련된 다양한 교수학적 내용 지식을 갖추어야 한다. 이런 면에서 교수학적 내용 지식은 교육 내용과 학생의 이해를 이어주는 가교 역할을 한다고 볼 수 있다.

한편, 초등학교 수학 내용 중에서 교수학적 내용 지식은 학생들이 이해하기 어려워하는 내용, 교사가 지도하기 어려워하는 내용을 중심으로 개발해야 하며, 개념의 역사적 발달 과정, 개념이나 원리, 법칙의 고유의 특성, 개념의 실생활 활용 방법, 내용의 수업 전개 방식 등을 고려하여 개발될 수 있다. 본 연구에서 교수학적 내용 지식의 개발 영역으로는 학생들이 이해하기 어려워하는 내용을 대상으로 선정하였고, 그 대상으로 분수 영역을 택하였다.

4) 'PCK, pedagogical content knowledge'란 교과 내용을 학생들이 잘 이해할 수 있도록 하기 위하여 교사가 지닐 수 있는 교수와 관련된 다양한 지식을 의미한다.

초등 수학의 내용 중에서 분수 영역은 학생들이 어려워하는 개념일 뿐만이 아니라, 교사들도 분수 영역에 대한 교수학적 내용 지식이 완전하지 않음을 연구들은 보이고 있다(서관석, 전경순, 2000; 임재훈, 이대현, 2004; Ma, 1999). 특히 분수는 학교 수학에서 개념적 이해에 기초한 지도보다는 알고리즘적 사고를 강조한 기능 중심의 지도 때문에 학생들이 어려워하는 내용 영역에 속한다. 분수 영역과 관련하여 여러 연구는 수학 교사나 예비 교사들이 분수의 연산에 대하여 만족스럽지 못한 표상을 가지고 있다는 것을 밝히고 있다(서관석, 전경순, 2000; Ma, 1999).

교수학적 내용 지식은 구체적인 학습 내용과 결부하여 생각할 때 특정 교육 내용에 대한 학생의 이해를 돋는 교사의 교수법의 발굴에 초점을 두는 것이 타당할 것이다. 이런 면에서 교수와 학습에 많은 어려움을 느끼고 있는 분수 영역에 대한 교수학적 내용 지식의 개발 및 보급은 분수 지도의 내실화와 수학교사의 위상을 보장하고 양질의 수학교육의 실현을 위해 필요한 연구라 할 수 있다.

이러한 연구의 필요성과 의의에 따라 본 연구의 목적은 초등 수학에서 학생들이 특히 어려움을 느끼고 있는 분수영역을 선정하여 분수를 지도하는데 필요한 교수학적 내용 지식을 개발하고, 이를 활용하여 분수 지도의 내실화를 꾀하고자 하는 것이다.

II. 이론적 배경

1. 분수 개념의 역사

농업과 상업, 문명의 발달과 더불어 토지조사, 물물교환, 세금 징수 등이 필요하게 되었는데, 이러한 상황에는 양을 기록할 필요가 대두되었으며, 때때로 단위나 전체와 부분사이의 관계를 표현하는 기호가 필요하였다. 이러한 실용적 요구를 충족시키기 위하여 분수가 만들어졌다(Baroody & Coslick, 1998).

역사적으로 분수는 기원전 2000년경부터 바빌로니아에서 사용되기 시작하였는데, 초기의 표기 방법은 불안정한 형태를 띠었으며 특수한 기호를 사용하여 분수를 나타내었다고 한다.

수학사를 통하여 분수의 역사적 사실을 다룰 때 회자되는 사실은 이집트인들이 사용한 분수에 관한 예화이다. 이집트에서 분수를 사용한 증거는 4000년 전 경에 쓰여 진 린드 파피루스(Rhind Papyrus)에 나타난다. 이집트인들은 주로 단위 분수를 이용하였는데, 이것은 $\frac{2}{3}$ 를 제외한 분수를 단위분수로 나타냄으로써 계산의 어려움을 피하고자 한 것으로 보여진다(Lenchner, 1983).

린드 파피루스에는 5에서 101까지의 $\frac{2}{n}$ (단, n 은 홀수)를 서로 다른 단위분수의 합으로 나타내고 있는데, 다음에는 그 몇 가지 예이다.

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}, \quad \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$$

이러한 합을 얻는 데에는 흥미로운 사실을 발견할 수 있는데, 먼저 우리는 $5 \times 3 = 15$, $7 \times 4 = 28$, $11 \times 6 = 66$ 을 발견할 수 있다. 그러면 첫 번째 단위분수의 분모는 어떻게 구할 수 있을까? $\frac{1}{2} \times (5+1) = 3$, $\frac{1}{2} \times (7+1) = 4$, $\frac{1}{2} \times (11+1) = 6$ 을 통해 구할 수 있음을 알 수 있다. 이집트

초등수학에서 분수에 관한 교수학적 내용 지식 개발 연구

에서 이용된 단위분수는 그리스에 전해졌다. 또 이는 아라비아에 전해지고 다시 유럽에 전해져 오랜 동안 이용되어 졌다.

한편, 인도인들은 분수 표기를 개선하기 위해 스스로 만들거나 고대 그리스인들의 것(분수의 가운데 줄 없이 분모 위에 분자를 씀)을 빌려 썼다고 한다. 그 후 아랍인들은 1000년 경 처음으로 분수의 막대 표기($\frac{a}{b}$)를 도입하였다(Baroody & Coslick, 1998).

이와 같이 분수는 아주 오랜 역사를 가지고 있으며, 인류의 발달과 더불어 중요한 위치를 점해 왔다. 역사적으로 분수 개념의 발생과 활용은 이집트의 린드 파피루스를 통해 알 수 있지만, 그 이전에 분수를 활용하였는지는 알 수 없다. 그럼에도 불구하고 분수의 발생 과정은 문헌을 통해 대략 파악할 수 있다.

역사적으로 중요한 수학적 개념·원리·법칙·정리 등은 현실적인 상황에 의하여 암시되었으며, 수학은 현실 세계에 대한 경험으로부터 발생하였다(우정호, 2000). 이런 면에서 본다면 분수는 측정 상황에서 분수를 이용해야 되는 상황으로부터 유도되었다고 볼 수 있다(서동엽, 2005; 안재구, 2000). 측정의 기본적인 아이디어는 단위를 이용하여 기본 단위의 몇 배에 해당하는지를 할당하는 것인데, 주어진 단위의 자연수 배가 되지 않는 경우에 어려움은 발생한다. 이를 해결하기 위한 방법은 주어진 단위를 더 작은 단위로 바꾸어 자연수로 나타내는 것이고, 다른 방법은 다른 표기 방법을 구안하는 것이다.

역사적으로 추정해 볼 때 인류는 존재하지 않는 새로운 표현을 생각하기보다는 기존의 표현 방법을 활용하고자 했을 것이고, 따라서 주어진 단위를 더 작은 단위로 바꾸어 자연수로 나타내고자 했을 것이다. 그러나 어느 때부터 인가 그러한 방식의 불편함을 해소시키기 위하여 인류는 새로운 표현을 고안하기에 이르렀을 것이다(서동엽, 2005).

역사적으로 측정의 상황에서 분수가 도입되었다는 사실은 학교수학에서 분수의 지도에서도 그 활용 가능성을 생각해 볼 수 있게 한다. 특히 초등 수학에서는 학생들이 수학적 개념의 발달 과정을 직접적인 활동을 통한 이해하게 하고, 그러한 과정을 통해 수학에 의미를 부여할 수 있다는 점에서 분수 개념 발달의 역사는 중요하다고 볼 수 있다.

2. 분수 개념의 이해

분수는 여러 의미를 갖는 복합적인 개념이다. Rey, Suydam, Limdquist, & Smith(1998)는 분수의 의미를 부분-전체의 의미, 몫의 의미, 비의 의미와 같이 3가지로 제시하고 있으며, Baroody & Coslick(1998)은 전체에 대한 부분, 몫, 비, 연산자의 의미와 같이 4가지로 제시하고 있다. 또 제7차 초등학교 교육과정 해설(교육인적자원부, 1998)에서는 분수의 의미를 등분할 분수, 양으로서의 분수, 비율로서의 분수, 몫으로서의 분수와 같이 네 가지 의미를 제시하고 있다. 한편 강지형 외(2003)는 분수의 의미를 등분할(전체-부분)의 의미, 양의 의미, 몫의 의미, 비의 의미, 연산자의 의미와 같이 5가지 의미를 제시하고 있는데, 이를 간단히 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 분수는 똑같은 크기의 부분으로 나눈 전체(분모)에 대한 부분의 수(분자)를 의미하는 등분할의 의미가 있다. 예를 들면 분수 $\frac{3}{5}$ 은 전체를 똑같이 5등분하고 그 중에서 3개를 고려한다는 의미이다.

둘째, 양의 의미로 어떤 양을 측정하는 과정에서 발생하는 분수를 의미한다. 분수 단위로

이대현

측정하는 방법에는 단위를 등분할하여 측정하는 방법과 재고자 하는 부분을 등분할하여 단위와 비교하는 방법이 있다.

셋째, 분수는 나눗셈의 몫을 의미한다. 예를 들면 분수 $\frac{3}{5}$ 은 $3 \div 5$ 의 몫으로 생각할 수 있다. 이것 역시 분할의 상황으로부터 발생하는데, 분수 $\frac{3}{5}$ 은 과자 3개를 5명이 똑같이 나누어 먹을 때 한 사람이 차지하는 몫을 의미한다.

넷째, 분수는 비를 나타낼 수 있다. 예를 들어 비 $3 : 5$ 를 분수 $\frac{3}{5}$ 으로 나타낼 수 있다. 비는 두 양사이의 관계를 나타내는데, 전체에 대한 부분의 관계가 있는 경우와 없는 경우로 나눌 수 있다. 두 분수 $\frac{1}{2}$ 과 $\frac{2}{4}$ 의 경우에 등분할의 의미에서는 서로 다른 상황을 나타내지만, 두 양의 상대적인 크기를 나타내는 비의 의미에서는 같은 수이다. 따라서 분수의 본질적인 개념을 이해하기 위해서는 상대적인 크기를 나타내는 비의 의미를 이해해야 한다. 마지막으로, 분수의 연산자의 의미는 분수를 곱하는 함수를 의미한다. 예를 들어 도형을 $\frac{a}{b}$ 배 만큼 축소, 또는 확대시키거나 원소의 개수를 $\frac{a}{b}$ 만큼 늘이거나 줄이는 함수로서 분수 $\frac{a}{b}$ 를 생각할 수 있다.

이와 같이, 분수는 여러 가지 의미를 가지고 있다. 따라서 학교 수학에서는 분수에 대한 여러 가지 의미를 다양하게 경험할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있으며, 교수학적 내용 지식은 이러한 맥락에서 개발되어야 한다.

3. 수학교사가 지녀야 할 지식

학교 수학의 내실화를 위한 노력은 여러 가지 방법과 형태로 나타날 수 있으며, 그 노력의 결과는 학생들의 행동의 변화든 시험의 결과든 궁극적으로 학생들을 통하여 나타난다. 수학교육의 참된 목적을 실현하고 학생들을 바람직한 방향으로 이끌어 주기 위하여 여러 요인과 조건이 요구되지만, 그 중에 교사의 역할은 더욱 중요하다. 왜냐하면 교사는 교실에서 교육의 중요한 요소로 들 수 있는 교사, 학생, 학습 내용, 그리고 환경의 복합적인 상황을 제어하고 조절해 가는데 핵심적인 역할을 하기 때문이다. 따라서 좋은 수업을 위해 교사와 교사가 지녀야 할 지식에 대해 관심을 가지게 되었다.

교육 연구에서 교사 지식에 대한 관심은 교사가 지닌 전문 지식 영역이 존재하여 교직이 전문직으로서 그 위상을 높일 수 있기 때문이다. 특히 교사의 전문 지식은 교과의 특정 영역에 대한 지식에서 벗어나 다양한 영역의 지식을 포함할 수 있는데, Shulman(1986)은 교사의 교과에 대한 지식을 특정 영역에 국한시키지 않고, 일반적인 영역으로 확장하여 다루었다. 이러한 그의 연구는 교사의 지식과 관련한 연구의 기폭제가 되었다.

Shulman(1986)은 교사들이 교과 내용 지식을 알고 이해해야 할 뿐만이 아니라, 특정 내용을 가르치는 방법도 알아야 한다고 주장하면서 교사의 전문 지식을 교과 지식에 교수학적 지식이라는 요소를 덧붙여서, 교과 내용 지식(subject matter content knowledge), 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge), 교육과정 지식(curricular knowledge)으로 구분

하였다.

이후 Shulman(1987)은 기존에 제시한 3가지의 교사 전문 지식에 4가지의 교사 전문 지식을 추가하였는데, 교과 내용 지식, 일반적인 교수학적 내용 지식, 교육과정에 대한 지식, 교수학적 내용 지식, 학습자에 대한 지식, 교육상황에 대한 지식, 교육목적에 대한 지식 등 7 가지 지식이 그것이다.

Fennema & Franke는 교사 지식의 구성 요소를 수학 내용(content of mathematics), 교수학(pedagogy), 학습자의 인지(learner's cognitions)로 제시하였다. '수학 내용'에 대한 지식에는 개념, 절차, 그리고 문제해결 과정에 대한 지식, 절차를 이해하는데 기본이 되는 개념, 개념의 상호관련성, 다양한 문제에 개념과 절차를 사용하는 방법에 대한 지식이 포함되고, '교수학'에 대한 지식에는 수업 절차에 대한 지식이 포함되며, '학습자의 인지'에 대한 지식에는 학생들이 어떻게 사고하고 학습하는가에 대한 지식이 포함된다. Grossman은 교사 지식의 영역을 내용(content), 일반 교수학(general pedagogy), 자기(self)에 대한 지식으로 구분하였다. 내용 지식에는 교과 지식과 교수학적 내용 지식을 포함하고 있으며, 일반 교수학적 지식은 교실의 조직과 관리, 수업 구조, 수업의 일반적인 방법에 대한 지식을 포함하고 있다. 그리고 자신에 대한 지식은 수업과 관련지어 교사 자신의 가치관, 목표, 철학, 스타일, 개인 특성, 장점, 단점에 대한 교사의 인식을 포함하고 있다(이종욱, 2005 재인용).

교사 지식에 대한 많은 연구에서 연구가들은 서로 다른 표현을 이용하여 교사에게 필요한 지식을 언급하고 있지만, 이러한 구성 요소들이 명확하게 구분되지는 않는다. 이런 면에서 교사의 전문 지식에 관한 이론의 논의에서 중요한 것은 교사 전문 지식의 각각이 별개의 것이 아니라, 통합적인 지식이 되어야 한다는 것이다. 이것은 단순히 가르칠 내용을 습득하거나 일반적인 교수 방법에 대한 지식을 습득하는 것보다, 어떤 주제를 어떤 방법으로 어떻게 가르칠 것인가에 대한 통합적인 지식을 바탕으로 효율적인 수학 교수의 실현이 중요함을 의미한다.

분수 교수-학습과 관련하여 수학 교사가 지녀야 할 지식을 Shulman(1986)이 제시한 3가지 측면에서 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 수학 교과 내용 지식은 수학적 개념, 원리, 법칙 뿐만이 아니라, 수학적 지식의 내, 외적 연결성, 수학적으로 추론하고 문제해결하고 의사소통 할 수 있는 방법에 대한 지식을 포함한다(NCTM, 1991). 분수 영역에 대한 교과 내용 지식에는 분수의 5가지 서로 다른 의미, 분수의 크기 비교, 여러 가지 분수의 이해와 표현, 분수의 사칙연산 등을 알고, 서로 간의 상호 관련성을 파악하는 것 등이 포함된다. 또한 분수와 유리수의 관계를 파악하고, 수 체계에서 분수의 위치 등에 대한 지식도 분수 영역에 대한 교과 내용 지식이라고 할 수 있다.

다음으로 교수학적 내용 지식은 학습자에 대한 이해를 바탕으로 교과 내용 지식을 어떻게 가르칠 것인가에 대한 지식을 의미한다. 분수 영역에 대한 교수학적 내용 지식에는 분수 개념의 역사적 발달 과정, 인류의 역사에서의 분수의 이용, 분수 개념의 이해와 분수의 연산을 위한 다양한 교구의 이용, 분수 학습에서 학생들이 가지는 일반적인 어려움, 분수의 연산에서 나타나는 전형적인 오류, 자연수의 연산과 분수 연산의 공통점과 차이점, 분수 연산에 대한 관계적 이해와 도구적 이해, 분수의 이해 정도를 평가하기 위한 도구의 개발 및 적용 방법 등을 들 수 있다.

마지막으로 교육과정에 대한 지식에서 교육과정은 교육받을 사람에게 일련의 학습기회를 제공하는 계획을 의미하며(홍성윤 외, 1994), 가르칠 교육 내용, 선정된 교육내용의 구성 체계, 교육 내용의 지도 방법, 평가 방법 등의 포괄적인 내용을 담고 있다. 따라서 가르칠 교

과의 교육과정의 이해는 학습 지도를 위해 알아야 할 중요한 지식이다.

제7차 수학과 교육과정(교육부, 1997)은 단계형 수준별 교육과정을 이상적인 모형으로 설정하여, 1997년에 고시된 아래로 2004년에는 전 학교 급에서 완전 적용되었다. 그리고 몇 년간의 교육과정 운영상에서 나타난 문제점을 보완하여 새로운 수학과 교육과정을 개정, 고시하였다(교육인적자원부, 2007).

분수영역의 경우 새로운 교육과정에서 많은 변화가 이루어졌다. 이러한 변화에는 분수 도입 시기의 변화(3학년에서 2학년으로 이동), 분수지도 학년 간 이동(예를 들면 비와 뜻의 의미의 분수를 4학년에서 5학년으로 이동) 등이 주를 이룬다. 따라서 수학 교사는 교육과정 지식을 바탕으로 운영 중인, 그리고 개정된 교육과정이 담고 있는 분수의 지도 체제, 교육과정 변화의 특징과 지도 방안 등에 대한 지식을 습득하여야 한다.

III. 수학과 교수학적 내용 지식 개발 방향 및 범주 설정

1. 수학과 교수학적 내용 지식의 개발 방향

교수학적 내용 지식의 개발은 학생의 교과 내용에 대한 이해를 충실히 하려는 의도에서 출발한다. 수학 교사가 교수학적 내용 지식을 개발하기 위하여 교사는 학생의 선행 지식, 학습에 대한 흥미, 신체적 발달 등이 어떠한지, 학생들이 교과를 왜 배우는지, 무엇을 배우는지, 어떻게 배워야 하는지, 학습 내용이 우리의 삶과 어떻게 관련이 있는지, 학습의 결과를 어떻게 확인하는지 등을 알아야 한다. 이를 위해 교사는 교과 내용과 더불어 교과 내용에 대한 메타 지식을 바탕으로 교과 지도와 관련된 다양한 측면을 숙고하여야 한다.

교과 내용에 대한 이해, 교과에 대한 메타 지식과 학생들에 대한 이해가 충분할 때 교수학적 내용 지식의 개발과 적용이 가능해진다. 이런 전제에 덧붙여, 교수학적 내용 지식의 개발을 위해서 수학 교과라는 특성을 고려한 개발의 기본적 방향을 설정할 필요가 있다. 이는 수학 교과 내용에 걸쳐 균형 있는 교수학적 내용 지식 개발을 위한 바탕이 될 것이다.

첫째, 교수학적 내용 지식은 우선적으로 학생들이 개념적, 절차적으로 이해하기 어려운 주제를 중심으로 개발해야 한다. 이런 면에서 학생들은 분수 영역에서 낮은 성취를 보이며, 알고리즘을 암기하여 단순 적용하는 문제에만 능숙함을 보이고 있다. 특히 학생들은 분수의 연산의 경우에 절차적 지식의 습득에는 능숙하지만, 개념적 지식의 이해에는 아주 낮은 수준을 보이고 있다.

둘째, 교수학적 내용 지식은 교사의 입장에서 지도하기 어렵거나, 일반적으로 지도에 소홀하기 쉬운 주제를 중심으로 개발해야 한다. 초등 수학 내용의 경우에 교과 내용을 학생들에게 의미 있게 가르치는 방법의 어려움, 가르칠 내용의 교수학적 변환의 어려움, 더불어 가르칠 주제에 대한 교사의 이해의 부족으로 나타나는 오 개념 형성의 가능성 등이 있을 수 있다. 이를 해결하기 위해서 교수학적 내용 지식의 개발은 교사의 입장에서 학습 지도에 어려움이 있거나, 어려움이 있을 수 있는 주제를 중심으로 이루어져야 한다.

셋째, 교수학적 내용 지식은 수학의 유용성과 가치를 인식시켜줄 수 있는 측면에서 개발되어야 한다. 수학은 역사적으로 그 필요성에 의해 태동되었으며, 그 필요성은 학습자에게 수학을 배워야 하는 당위성을 제공한다. 따라서 교수학적 내용 지식은 학생들이 일상생활에서 수학을 유용하게 이용하는 방법을 이해할 수 있는 내용으로 개발되어야 한다.

초등수학에서 분수에 관한 교수학적 내용 지식 개발 연구

넷째, 교수학적 내용 지식은 수학 교사들이 현장에서 개발 가능하고 적용 가능한 형태로 개발되어야 한다. 개발된 교수학적 내용 지식을 활용하는 주체는 학교에서 수학을 가르치는 수학교사이다. 따라서 수학교사들이 가르치는 교육 상황에 적합하도록 교수학적 내용 지식을 개발하여야 하고, 한편으로는 교사 스스로 교수학적 내용 지식을 지속적으로 개발할 수 있는 틀로 제시해야 한다.

다섯째, 교수학적 내용 지식은 최근의 수학교육의 흐름을 반영하여 개발되어야 한다. 최근의 수학교육은 구성주의 패러다임이 주를 이루며, 이러한 흐름에서 교사는 지식의 전달자, 교육과정의 실행자가 아니라, 지식 구성의 안내자이며 교육과정의 재구성자 이어야 한다. 따라서 학생들이 새로운 아이디어의 능동적 창조자가 될 수 있도록 지원하기 위하여 다양한 학습 자료의 근거한 구성 활동을 지원할 수 있도록 교수학적 내용 지식을 개발하도록 해야 한다.

2. 수학과 교수학적 내용 지식의 범주 설정

교수학적 내용 지식 개발의 방향에 따라, 수학과 교수학적 내용 지식의 범주는 수학교사가 특정 영역을 가르칠 효율적인 방법의 구안이라는 측면에서 설정될 수 있다. 이 연구에서는 분수 영역 관련 교수학적 내용 지식 개발을 위하여 다음과 같은 범주를 설정하였다.

- 1) **교육과정에 대한 이해:** 교육과정의 목표·내용 이해, 학습의 필요성 등
- 2) **학생과 학생 지식에 대한 이해:** 교육 내용에 대한 학생의 이해 및 오류, 학생 이해의 어려운 이유 및 처치 방법 등
- 3) **교사와 교사 지식에 대한 이해:** 교수 곤란도와 이유, 지도상의 유의점, 수업 운영 방법 및 모형 등
- 4) **수업 방법, 내용, 운영에 대한 이해:** 교육 내용의 이해를 돋기 위한 여러 가지 교수 자료, 개념의 발생 과정과 역사적 사실, 수업 활용 자료, 타 영역 및 타 교과와의 관련성 등
- 5) **평가 방법 이해:** 학생의 이해와 오류 등을 확인할 수 있는 평가 방법, 평가 도구의 개발 등

이상에서 설정한 교수학적 내용 지식의 범주는 각 개념의 교수학적 내용 지식의 개발을 위한 지침이 되며, 이 범주에 따라 다음 장에서는 학생의 이해를 위한 다양한 교수학적 내용 지식의 개발이 이루어 질 것이다.

IV. 분수 영역에 대한 교수학적 내용 지식 개발⁵⁾

이 장에서는 III장에서 개발한 교수학적 내용 지식의 개발 방향과 그 방향에 비추어 설정된 교수학적 내용 지식의 범주를 바탕으로 구체적인 교수학적 내용 지식을 개발하였다. 제시된 교수학적 내용 지식은 분수 관련 교수-학습 상황과 관련하여 수학 교사가 알아 두어

5) 이 장에서 제시하는 교수학적 내용 지식은 2006학년도 광주교육대학교 학술연구비 지원에 의해 개발된 교수학적 내용 지식의 일부를 발췌하였음.

이대현

야 할 내용과 더불어, 수업에서 활용할 수 있는 교수-학습 자료를 제시하는 것에 초점을 두었다.

1. 교육과정에 대한 이해

현행 학교수학은 제7차 교육과정에 의해 지도되고 있다. 그러나 2009년에 1, 2학년을 시작으로 2010년에는 3, 4학년, 2011년에는 5, 6학년을 대상으로 시행할 계획인 새로운 교육과정이 고시되었다(교육인적자원부, 2007). 따라서 현 교육과정과 변화된 교육과정에 대한 이해는 수학교사가 지녀야 할 교수학적 내용 지식 중 우선이라고 할 수 있다.

먼저 분수의 도입시기가 3-가에서 2학년으로 이동되었다. 이것은 나선형 지도 원리에 따라 분수 개념의 다양한 의미를 여러 학년에 걸쳐 점진적으로 지도하기 위한 목적으로, 2학년에서 ‘영역의 등분할’에 의해 분수를 도입하고, 점진적으로 3학년에서는 ‘이산량의 등분할’을 통한 분수의 이해에 초점을 두고 지도하도록 하고 있다.

다음으로 현행 4학년에서 다루고 있는 두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타낼 수 있도록 하는 내용은 5학년의 ‘비와 비율’영역으로 이동되었으며, $(자연수) \div (자연수)$ 를 분수로 나타낼 수 있도록 하는 내용은 5학년의 ‘나눗셈’에 통합하여 지도하도록 하였다. 이것은 모두 관련 개념의 통합 지도를 통한 연계성 강화 및 중복 내용 삭제, 그리고 학습량 감축을 위한 조치이다.

또한 현행 6학년에서 다루고 있는 ‘소수를 분수로, 분수를 소수로 고치기’, ‘소수와 분수의 크기 비교하기’ 내용이 5학년으로 이동되었는데, 이것은 관련 개념 지도에 필요한 선수 개념 지도를 위해서이다.

이상과 같이 분수 영역의 경우 새로운 교육과정에서는 적지 않은 부분에 지도 학년에 대한 이동이 이루어졌다. 특히 5학년에서 다루게 되는 두 양의 크기를 비교하여 분수로 나타내는 내용과 $(자연수) \div (자연수)$ 를 분수로 나타내는 내용은 분수의 개념 중에서 ‘비의 의미’와 ‘몫의 의미’로서의 분수의 개념을 지도하는 부분으로 분수의 하위 영역에 대한 이해를 명확하게 할 수 있도록 하기 위하여 교육과정 개정에 반영된 부분이다. 따라서 이러한 교육과정 개정의 의의를 잘 파악하고, 이를 수업에 구현하는 것이 분수 영역을 정확하고 효율적으로 지도하는 첨경이 된다.

2. 학생과 학생 지식에 대한 이해

학생과 학생 지식에 대한 이해를 위해서는 학생들이 분수 영역에 대해 어려워하는 이유, 분수와 관련하여 학생들에게 나타나는 대표적인 오류와 그 처리 방안 등에 대해 알아볼 필요가 있다.

1) 분수 영역의 학습의 어려움

분수는 학생들에게 이해하기 어려운 대상이 되어 왔다. 그 이유에는 여러 가지가 있는데 Baroody & Coslick(1998)은 학생들이 분수 영역에 대해 가지는 일반적인 어려움을 다음과 같이 9가지로 제시하고 있다.

- ① 분수 수업에서 원 모양(예, 파이나 피자)을 많이 사용하기 때문에, 많은 학생들은 다른

초등수학에서 분수에 관한 교수학적 내용 지식 개발 연구

연속량 모델(예, 직사각형의 조각), 수직선 표현과 이산량 모델과 분수 개념을 관련시키는 데 어려움을 느낀다.

- ② 학생들은 전체의 부분을 측정하는 것이 동일한 크기의 부분으로 전체를 분할하는 것을 요구한다는 것을 이해하지 못한다.
- ③ 학생들은 분수가 전체의 부분을 나타낸다는 것을 알지 못하고, 부분을 전체의 나머지 부분과 비교하는 오류를 범한다.
- ④ 학생들은 분수의 크기에 대해 좋은 감각을 지니고 있지 않다. 그들은 비 단위분수가 단위 분수로 만들어진다는 것을 이해하지 못한다.
- ⑤ 학생들은 크기가 같은 분수를 인식하지 못한다. 그들은 직접 대응 모델을 성공적으로 표시하거나 창조할 수 있지만, 간접 대응 모델은 그렇게 하지 못한다. 예를 들면, 한 학생이 □□■■■■을 $\frac{2}{6}$ 라고 표시하는 데에는 큰 어려움이 없으나, $\frac{1}{3}$ 로 표시되어 질 수도 있다는 것을 인식하지 못한다.
- ⑥ 학생들은 분수에 대한 어림 능력이 부족하다.
- ⑦ 학생들은 종종 분수가 특정한 양의 크기나 개수가 아니라, 관계를 나타낸다는 것을 이해하지 못한다. 예를 들면, 전체의 크기를 모를 때 그런 부분이 비교될 수 없을 때라도, 그들은 항상 $\frac{1}{2}$ 이 $\frac{1}{3}$ 보다 더 크다고 믿는다.
- ⑧ 학생들은 분수의 크기를 비교하는 데 있어서 어려움을 느낀다.
- ⑨ 학생들은 분수 문제를 해결할 때, 전체와 단위를 분명하게 정의해야 함을 인식하지 못한다.

분수를 지도하는 수학 교사는 분수 학습에서 학생들이 겪는 일반적인 어려움을 사전에 이해할 필요가 있다. 이는 학생들이 분수를 접할 때마다 매번 반복되는 어려움이기 때문이며, 이러한 어려움을 수업 전에 파악하고, 이에 대한 지속적인 관심으로 극복해야 할 대상이기 때문이다.

2) 분수 관련 오류와 처치 방안

초등학교에서 분수는 자연수를 학습한 후에 다루게 되며, 중등학교에서 다루는 유리수 학습의 기초가 된다. 따라서 여러 영역의 관계 속에서 분수에 대한 개념적 이해가 필요하며, 이를 위해 분수를 다룰 때 학생들이 나타내는 전형적인 오류를 확인하고 이에 대한 처치 방안을 모색할 필요가 있다.

학생들이 분수와 관련하여 나타내는 오류는 ‘크기가 같은 분수에 대한 이해 부족’이 ‘분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈에서 오류’를 나타내는 원인이 되는 것과 같이, 단일의 독특한 특성이기보다는 상호 관련된 상황에서 복합적으로 나타난다고 볼 수 있다. 따라서 학생들이 보이는 대표적인 오류를 확인하고 이에 대한 적절한 처치 계획을 세우는 것은 교수학적 내용 지식의 개발이라는 면에서 중요하다. 일반적으로 분수 영역과 관련하여 학생들이 나타내는 전형적인 오류와 그에 대한 처치 방안은 다음과 같다.

- ① 크기가 같은 분수의 개념 이해 과정에서 곱셈 추론보다 덧셈 추론에 의존하여, 예를 들면 $\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ 에서 분모가 3커지기 때문에 문자도 3만큼 커져서 5가 된다고 생각하는 것

이대현

과 같은 오류를 보이기도 한다. 유사하게 분모가 다른 분수의 덧셈에서도 통분하기 위해 최소공배수를 곱해야 될 경우에 분모가 작은 분수의 분모에 분모가 큰 분수의 분모의 차만큼을 분모와 분자에 더하는 오류를 보이기도 한다. 이러한 예로 $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ 과 같은 계산 오류를 들 수 있다.

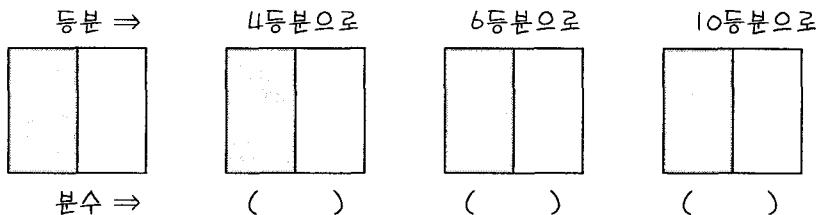
이러한 오류가 나타나는 경우에는 구체물을 이용한 분할 과정을 통해 크기가 같은 분수의 생성 과정을 체득하도록 하는 것이 오류 교정에 효과적이다(PCK 4-4). 또한 구체물의 분할과 병합의 과정을 통해 크기가 같은 분수를 구하는 일반적 해법을 발견하도록 하고, 이를 통하여 분모나 분자가 주어진 경우에 크기가 같은 분수로 변형 가능성 여부를 확인하는 것도 효과적이다(PCK 2-1).



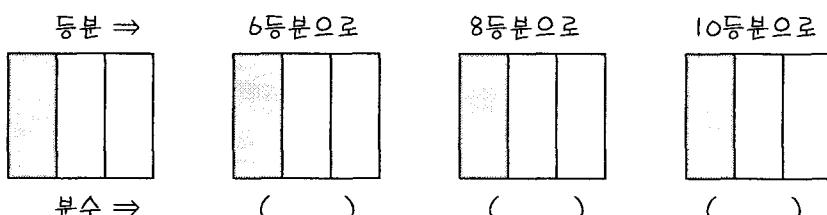
PCK 2-1. 크기가 같은 분수 구하기: 5학년(크기가 같은 분수)⁶⁾

크기가 같은 분수를 구하는 것은 분모와 분자에 같은 수를 곱하거나 나눌 수 있다는 일반화에 의존한다. 그러나 어떤 분수가 특정한 분모를 갖는 분수로 항상 바꾸어질 수 있는 것은 아니라는 것도 알아야 한다. 다음에 제시된 도형에 선을 그어 만들어진 도형에 맞게 분수로 표현해 보아라.

탐구 1. 다음 도형은 영역을 2등분하여 $\frac{1}{2}$ 을 나타낸 것이다. 이 도형을 제시된 조건대로 선을 그어 나타내고, 새로 만들어진 도형에 맞게 도형에 빛금 친 부분을 분수로 나타내어라.



탐구 2. 다음 도형은 영역을 3등분하여 $\frac{1}{3}$ 을 나타낸 것이다. 이 도형을 제시된 조건대로 선을 그어 나타내고, 새로 만들어진 도형에 맞게 도형에 빛금 친 부분을 분수로 나타내어라.



6) PCK에서 교수-학습 과정 중 학생 활동에 이용할 수 있는 부분은 서체를 달리하여 제시하였다.

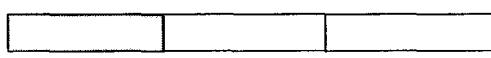
탐구 3. (탐구 1)과 (탐구 2)의 활동에서 크기가 같은 분수를 만드는 방법과 관련하여 발견한 사실을 써 보아라.

② 분수의 크기 비교에서 자연수에서의 크기 비교에 대한 형식적 고착화의 현상으로 분모의 크기에 주목하여 잘못된 결과를 산출하기도 한다. 예를 들면 두 분수 $\frac{1}{4}$ 과 $\frac{1}{5}$ 의 크기 비교에서 4가 5보다 작기 때문에 $\frac{1}{4}$ 이 $\frac{1}{5}$ 보다 작다고 판단하기도 한다. 이것은 전체와 부분간의 관계에서 등분할된 조각의 수와 각 조각의 크기 간의 상반된 관계를 이해하지 못하여 나타나는 현상이다. 따라서 전체-부분의 모델을 이용하여 전체를 등분할 하는 조각의 수와 각각의 조각의 크기가 어떤 관계가 있는가를 추측하고 확인하도록 지도해야 한다.

③ 분수의 덧셈에서 학생들은 분모와 분자를 별개의 수로 생각하여 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ 의 경우에 $\frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$ 으로 답하는 오류를 보이기도 한다. 이러한 오류는 먼저 계산 결과를 어림해보도록 하여 답의 합리성을 파악하도록 하는 것이 필요하다. 그리고 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈의 경우에 분수 떠나 막대 모형을 이용하여 두 분수 중 적어도 하나는 분모가 다른 분수가 된다는 사실과 분모가 같은 분수로 바꾸는 방법을 알도록 하는 것이 필요하다.



$$\frac{1}{2}, 1$$



$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$$



$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$



PCK 2-2. 분수의 사칙연산에서 오류 피하기: 4-6학년(분수의 사칙계산)

수학 교사는 분수의 사칙계산에 대하여 학생들이 나타내는 전형적인 오류를 확인하고 이를 교정할 방안에 대해 숙고해야 한다. 다음에 제시된 계산 과정을 보고, 이를 교정할 방안에 대해 생각해 보아라.

$$① \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$$

$$② \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4-2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

$$③ \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{2 \times 4}{5 \times 3} = \frac{8}{15}$$

$$④ \frac{3}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{3 \div 3}{5 \div 4} = \frac{4}{5}$$

탐구 1. 위의 풀이는 영수가 해결한 숙제의 일부이다. 계산에서 옳게 된 것과 옳지 않게 계산된 것을 구분하고, 계산이 옳지 않은 문제를 바르게 풀어라.

탐구 2. 옳게 계산한 문제에 맞는 연산 모델을 제시하여라.

탐구 3. 옳지 않게 계산된 문제를 설명할 수 있는 모델을 제시하여라.

④ 자연수에서의 곱셈과 나눗셈의 결과에 대한 강한 귀속으로 인하여 분수의 곱의 결과가 커지고, 나눗셈의 결과가 작아진다고 판단하는 오류를 보이기도 한다. 이 경우에 그렇지 않을 수 있는 반례를 명료하게 제시함으로써 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 답의 합리성을 파악하도록 지도해야 한다.

⑤ 대분수의 의미를 정확히 파악하지 못하고, 자연수 부분은 자연수로만 생각하고 분수와의 상호관련성을 인식하지 못해 발생하는 오류를 들 수 있다. 예를 들면 대분수 $2\frac{1}{3}$ 를 $2 + \frac{1}{3}$ 로 인식하지 못하는 경우이다. 이 경우에 대분수를 구체적 모형으로 제시하고 이를 다양하게 수로 표현해 봄으로써 대분수에 대한 개념적 이해에 도달하도록 해야 한다. 아래의 예에서와 같이 $2\frac{1}{3}$ 은 두 개의 날개와 그 날개의 $\frac{1}{3}$ 이 됨을 발견하도록 하고, 그 과정을 수식으로 표현하여 대분수를 다양하게 표현할 수 있도록 해야 한다.

$$2\frac{1}{3} \quad + \quad 2 + \frac{1}{3}$$

⑥ 자연수의 혼합계산과 마찬가지로 $+$, $-$, \times , \div 와 $()$ 가 섞여 있는 계산에서 계산의 순서를 잘 못 적용하여 나타나는 오류이다. 이러한 기술적인 오류는 자연수 계산과 같은 친숙한 주제를 이용하여 계산의 순서를 인식하도록 할 수 있다.

⑦ 분수 나눗셈의 의미에 대한 이해 부족으로 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 과 같은 식에 적합한 문장제를 구성하도록 할 때 ‘ $\frac{1}{2}$ 로 나누기’를 ‘2로 나누기’, ‘ $\frac{1}{2}$ 을 곱하기’, ‘ $\frac{1}{2}$ 로 나누기와 2로 나누기, $\frac{1}{2}$ 을 곱하기’를 모두 같은 것으로 해석하는 것과 같은 오류가 일어날 수 있다(Ma, 1999). 이러한 오류는 주로 교사 연구나 예비교사를 대상으로 한 연구의 결과에서 확인되지만(김민경, 2003; 서관석, 전경순, 2000; Ma, 1999), 교사들의 분수의 나눗셈에 대한 개념적 이해가 부족할 경우 학생들에게서도 일어날 가능성이 높다. 따라서 분수의 나눗셈과 같은 연산의 의미를 다양한 실생활의 맥락과 관련지어 해석하고 적용할 수 있도록 지도해야 한다(PCK 5-3).

3. 교사와 교사 지식에 대한 이해

효율적인 분수학습을 위하여 수학 교사는 분수 영역에 대하여 체계적인 이해를 가져야 한다. 새로운 교육과정 개정을 위한 선행연구로 실시된 ‘수학과 교육내용 적정화 분석 및 평가’ 연구(임재훈, 이대현, 2004)에 따르면, 전국의 초등학교 교사 515명을 대상으로 실시한 설문 조사결과, 전체적으로 분수 영역의 중요성에 대해서는 매우 높게 인식하고 있는 것으로 나타났으며, 지도의 곤란도(어려움)는 낮은 편으로 나타났다. 그렇지만 분수의 나눗셈에 대해서는 다른 내용에 비해 상대적으로 어려움이 큰 것으로 나타났다. 분수의 나눗셈 영역에 대한 지도의 어려움이 다른 부분에 비해 상대적으로 높게 나타난 것은 계산의 기초가 되는 알고리즘의 산출 과정에 대한 타당화의 어려움이 많기 때문으로 판단된다. 이러한 결과는 학교에서 분수의 나눗셈을 가르칠 때 주로 알고리즘을 강조한 기능 중심의 수업에 치중하여, 개념적 이해가 부족하게 되는 악순환을 놓는 결과를 초래할 수 있다.

Ma(1999)는 초등학교 수학교사들에게 제시한 분수의 나눗셈에서 절차적 지식에 대한 이해는 어느 수준에 도달해 있지만, 그 연산이 내포하고 있는 수학적 진술에 대한 의미 표현이라는 면에서는 부정적인 결과를 보이고 있다고 밝히고 있다. 교사의 입장에서 알고리즘에 의존하는 연산에 대한 지식을 정확하게 소유하고 있는 반면에, 분수의 나눗셈에 대한 근본적인 이해와 표상 능력이 부족하다는 것은 학생들의 분수의 개념적 이해와 이 영역의 성취도에 직접적인 영향을 줄 수 있다는 면에서 심각성을 알 수 있다. 예를 들면, 우리나라 초등학생들은 수학 교사나 예비 교사들의 연구 결과와 비슷하게 분수의 나눗셈에 대한 이해와 표상 능력이 부족하다는 결과를 알 수 있다(김옥경, 1997; 박정임, 2001; 전평국, 박혜경, 2003).

따라서 분수 영역에 대한 교사의 이해 정도와 그 개념적 이해 정도에 대한 정확한 진단과 더불어 이 영역에 대한 충분한 이해와 개념적 접근을 위한 교육 프로그램이 필요하다. 이런 면에서 교사와 교수 지식의 이해 측면의 교수학적 내용 지식은 교사들의 분수 영역에 대한 이해의 수준, 이 영역에 대한 전문적 지식 습득을 위한 구체적인 방향 제시의 근거가 되어야 할 것이다(PCK 5-3).

4. 수업 방법, 내용, 운영에 대한 이해

교수학적 내용 지식 개발의 근본 목적은 관련 교육 내용에 대한 학생들의 이해를 돋기 위하여 효율적이고 구체적인 교수 학습 방법의 구안이라고 할 수 있다. 따라서 다른 네 가지 범주에 비추어 이 범주로 설정된 교수학적 내용 지식은 좀 더 구체적이고 실질적인 교수학적 내용 지식이라고 할 수 있다. 수업 방법, 내용에 대한 이해와 운영을 위한 교수학적 내용 지식은 다음과 같은 몇 가지 측면에서 활동지 형식으로 제시하였다.

1) 분수 개념 발생의 역사

분수가 처음으로 나타난 것은 기원전 2000년경 바빌로니아 시대로, 초기의 표기 방법은 불안정한 형태를 띠었으며 특수한 기호를 사용하여 분수를 나타내었다고 한다. 분수 개념 발달에 관한 Dewey의 산술교육론에 의하면, 분수는 측정의 상황에서 유래되었다고 한다.

이대현

이것은 학생들이 길이나 넓이를 측정하는 상황에서 단위보다 작은 부분을 열마라고 해야 할 것인가라는 의문을 제기하고, 이를 해결하기 위하여 새로운 수의 도입의 필요성을 알도록 하는데 이용될 수 있다. 이와 같이 분수 개념 발달의 역사적 사실은 학생들에게 분수 발달의 역사와 더불어, 일상생활에서 분수를 이용한 구체적인 사실을 이용하여 분수가 왜, 어떻게 이용되기 시작되었는가에 대한 해법을 제공해 준다.

또한, 인간의 자연스런 활동 속에서 그 필요성에 의해 분수가 태동된 것임을 알고, 수학이 생활의 일부임을 인식하도록 하는데 도움이 된다.



PCK 4-1. 분수의 표기 방법: 5학년(분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈)

분수의 역사는 어디에서 시작되었을까? 분수는 대략 B.C. 2000년경에 바빌로니아인에 의해 사용되기 시작한 것으로 알려져 있다. 고대 이집트인들은 수를 나타내는 기호 위 부분에 특수한 기호 를 표시하여 분수를 나타냈다. 예를 들면, $\frac{1}{3}$ 은 로 표현되었다. 그러나 그들은 주로 단위분수만을 이용하였다(Baroody & Coslick, 1998).

탐구 1. 고대 이집트인들의 표기 방법으로 $\frac{1}{5}$ 을 표현하여라.

탐구 2. 린드 파피루스에 따르면 고대 이집트인들은 5에서 101까지의 $\frac{2}{n}$ (단 n 은 홀수)를 서로 다른 두개의 단위분수의 합으로 나타내었다고 한다. $\frac{2}{5}$ 를 두개의 단위분수의 합으로 나타내어라. 그리고 이것을 고대 이집트인들의 표기 방법으로 나타내어라.

탐구 3. $\frac{2}{7}, \frac{2}{11}, \frac{2}{15}, \frac{2}{99}$ 를 서로 다른 두 개의 단위분수의 합으로 나타내어라.

탐구 4. 5에서 101까지의 $\frac{2}{n}$ (단 n 은 홀수)를 서로 다른 두개의 단위분수의 합으로 나타낼 때, 단위분수의 두 분모를 구하는 규칙을 발견하여라.

탐구 5. $\frac{1}{3}$ 을 서로 다른 4개의 단위분수의 합으로 나타내어라.

2) 학생들의 비형식적 전략의 활용

학생들은 체계적인 교육을 받기 전이라도 일상 경험에 기초하여 많은 양의 비형식적 지식을 구성하고 있다. 그리고 학생들이 가지고 있는 비형식적 지식은 수학에 관해 생각하고 수학을 행하는 나름대로의 방식을 가지고 있어, 형식적인 지식을 구성하는데 바탕이 될 수 있다. 전통적인 기능 중심의 수업에서는 학생들이 가지고 있는 비형식적 지식의 가치를 강조하지 않았다. 그렇지만 학생들의 비형식적 경험을 형식적 지식과 결부시키는 것은 일상생활과 수학을 연결시킴으로써 수학의 가치를 강조하고 수학을 창안해낼 수 있는 기회를 제공한다.



PCK 4-2. 일상 언어와 분수와의 관계: 3학년(분수의 도입)

학생들은 분수를 배우기 전에라도 일상 언어를 이용하여 분수 개념이 내재된 표현을 활용한다. 그 중 대표적인 것으로 '반', '반의 반'이라는 용어를 이용하여 사물을 등분할 하는 경험을 들 수 있다. 이러한 용어를 통해 비형식적으로 경험한 분수 개념은 형식적 지식과 연결되어 전체-부분의 비교를 통한 분수의 초기 도입에 유용하다.

여러분은 일상에서 사물을 나누는 상황에서 '반으로 뜯 같이 나눈다.'와 같은 분할을 경험했을 것이다. 이러한 경험을 바탕으로 다음 텀구를 해 보아라.

텀구 1. 자신의 경험에서 '반', '반의 반'을 경험한 상황에 대해 발표하여라.

텀구 2. 색종이를 이용하여 색종이를 '반'으로 나누어 보아라. 또, '반의 반'으로 나누어 보아라.

텀구 3. 색종이 이 1장이면 은 몇 장이고, 은 몇 장인지 말하여라.

텀구 4. '반'을 ' $\frac{1}{2}$ '이라 하고 '이분의 일'이라고 읽는다. 이러한 수를 '분수'라고 한다. 같은 방법으로 '반의 반'을 분수로 표현하고 읽어 보아라.

텀구 5. '반'과 '반의 반'을 나타내는 여러 가지 상황을 나타내고, 그것을 분수로 나타내어라.

3) 교구를 활용한 분수 개념의 이해

수학 교수-학습에서 교구는 추상적인 수학적 개념을 구체화하여 학생들이 직접 체험을 통해 수학을 경험하게 해 준다는 면에서 그 가치가 높다. 수학의 본질에 적합한 수학과 교수-학습이 이루어져야 한다는 관점은 Piaget, Bruner, Dienes 등의 학자들에 의해서도 강조된 바 있으며, 그들은 학생들이 자신의 수학적 이해를 구성할 때 수학을 더 잘 학습한다는 것을 주장하였다.

연구 결과에 따르면 구체적 조작 자료를 사용하는 수업이 그러한 자료 없이 행해지는 수업보다 더 높은 수학적 성취를 이를 가능성이 높다는 것이 밝혀졌다. 그리고 학생들이 수학적 아이디어를 구성하고 그것을 유지하는 데에도 도움이 되는 것으로 나타났다(강문봉 외, 2006). 그러나 주의해야 할 것은 교구를 활용한 수업 활동이 학생들의 수학적 구성을 보장하지 않으며, 수학적 구성을 위해서는 교구를 활용한 자신의 행위에 대한 반성적 사고 과정이 뒤따라야 한다는 것이다.



PCK 4-3. 큐즈네어 막대를 이용한 분수의 이해: 3-4학년(분수의 이해)

큐즈네어 막대는 1cm에서 10cm까지 서로 다른 길이를 갖는 10개의 직육면체 모양의 색 막대(흰색=1cm, 빨간색=2cm, 연두색=3cm, 보라색=4cm, 노란색=5cm, 녹색=6cm, 검은색=7cm, 갈색=8cm, 파란색=9cm, 주황색=10cm)로 벨기에 교사인 큐즈네어(George Guitineraire)가 창안해 낸 교구이다.

이대현

이 막대는 분수에 대한 감각을 발달시키고, 분수를 더 깊이 이해할 수 있는데 유용한 교구이다. 학생들에게 퀴즈네어 막대를 이용하여 다음 탐구를 하도록 하여라. 그리고 이 탐구를 통하여 발견한 사실을 발표하도록 하여라.

퀴즈네어 막대(흰색=1cm, 빨간색=2cm, 연두색=3cm, 보라색=4cm, 노란색=5cm, 녹색=6cm, 검은색=7cm, 갈색=8cm, 파란색=9cm, 주황색=10cm)를 이용하여 다음 탐구를 해 보아라. 그리고 탐구를 통해 발견한 사실을 써 보아라.

탐구 1. 주황색 막대를 전체(1)로 할 때 각각의 막대를 분수로 나타내어라.

탐구 2. 갈색 막대를 전체로 할 때 빨간색 막대와 연두색 막대를 분수로 나타내어라.

탐구 3. 파란색 막대가 전체를 나타낼 때 $\frac{2}{3}$ 에 해당하는 막대를 찾아라. 그 이유를 써라.

탐구 4. 연두색 막대가 $\frac{1}{3}$ 일 때 전체에 해당되는 막대의 색을 구하여라. 그 이유를 써라.

탐구 5. 보라색 막대가 $\frac{2}{3}$ 라 할 때 $\frac{1}{2}$ 을 나타내는 막대의 색을 구하여라.

탐구 6. 주황색 막대와 갈색 막대를 각각 전체로 할 때 보라색 막대를 분수로 나타내어라. 그리고 이 탐구를 통하여 발견한 사실을 써라.

4) 분수 연산을 위한 수학적 모델 활용

분수의 사칙연산에 대한 충분한 이해를 위하여 여러 가지 연산 모델을 이용할 수 있다. 일반적으로 수학적 모델은 문제 상황을 기술하기 위해 사용되는 하나의 도구로 수학적 관행에 맞게 구안된 표현 체계를 의미하며, 표나 그래프, 다이어그램, 구체물, 수형도 등이 있다. 분수의 연산에서는 연산 문제를 해결하기 위하여 적절한 모델을 구안하여 연산의 수행 과정에 대한 이해와 연산의 의미를 풍부하게 할 수 있다.



PCK 4-4. 색종이 접기를 이용한 크기가 같은 분수 구하기: 5학년(크기가 같은 분수)

동치분수를 구하기 위한 일반화를 이끌어 내기 위하여 색종이 접기를 활용해 보자. 다음 탐구를 통해 얻은 결과를 이용하여 동치분수를 구하는 방법을 설명해 보아라.

탐구 1-1. 색종이 한 장을 2등분하고 한 부분을 빛금 칠하여 $\frac{1}{2}$ 모형을 만든다. 다음에 이 종이를 다른 방향으로 반으로 접어 만들어진 색종이에서 빛금 친 부분을 분수로 나타내어라.

탐구 1-2. 같은 방법으로 색종이를 6등분, 8등분, 10등분, ...하면서 빛금 친 부분을 분수로 나타내어라.

탐구 1-3. 표현된 분수는 각각 크기가 같다고 할 수 있는가?

탐구 1-4. 크기가 같은 분수를 만드는 방법에 대하여 써라. 왜 그렇게 생각하는가?

초등수학에서 분수에 관한 교수학적 내용 지식 개발 연구

- 탐구 2-1. 색종이 한 장을 8등분하고 그 중 4부분을 빛금 칠하여 $\frac{4}{8}$ 모형을 만든다. 다음에 2부분 씩 조각들을 합하여 전체 8등분을 4등분으로 변형하여라. 새로 만들어진 색종이에서 빛금 친 부분을 분수로 나타내어라.
- 탐구 2-2. 같은 방법으로 색종이를 2등분으로 변형하여라. 새로 만들어진 색종이에서 빛금 친 부분을 분수로 나타내어라.
- 탐구 2-3. 표현된 분수는 각각 크기가 같다고 할 수 있는가?
- 탐구 2-4. 크기가 같은 분수를 만드는 방법에 대하여 써라. 왜 그렇게 생각하는가?
-

5. 평가 방법의 이해

수학 학습의 평가는 학생 개개인의 수학 학습을 돋고, 교사의 교수 활동과 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다. 이를 위해 획일적인 평가 방법을 지양하고, 지필 평가, 관찰, 면담, 자기평가, 프로젝트, 포트폴리오 등 다양하고 적절한 평가 방식을 택하여 실시하되, 수업 목표에 충실한 평가가 될 수 있도록 해야 한다.

특히, 분수 영역의 경우에는 분수의 개념과 분수 연산의 개념적 이해 정도를 확인하기 위하여 단순 사실의 확인을 위한 지필 평가만으로는 충분한 정보를 얻을 수 없으며, 분수 영역에 대한 학생의 이해와 체계적인 오류 등을 확인할 수 있는 평가 방법, 평가 도구의 개발에 관심을 기울여야 한다. 다음은 이를 지원할 수 있는 분수 영역 평가 관련 교수학적 내용 지식의 범주에 속하는 평가 문항이다.



PCK 5-1. 다양한 분수 모델: 3-4학년(분수의 표현)

평가기준: 주어진 분수에 해당하는 모델을 다양하게 제시할 수 있다.

평가유형: 개방형 문제

문항: 분수 $\frac{2}{3}$ 에 해당하는 모델을 가능한 많이 제시하시오.

채점기준: 채점기준은 유창성, 융통성, 독창성, 정교성의 준거에 의해 채점한다.



PCK 5-2. 분수에 대한 개념적 이해: 3학년(분수)

평가기준: 분수가 나타내는 양을 알고, 실생활에서 분수가 나타내는 양을 절대적인 양과 상대적인 양의 관점에서 서로 비교할 수 있다.

평가유형: 서술형

문항: 오늘은 분수에 대하여 학습하였습니다. 수학시간이 끝나고 춘향이와 향단이가 어제 먹은 피자에 대한 기억을 떠올리며, 각자 피자 한판 중 반을 먹었기 때문에 피자 ' $\frac{1}{2}$ '을 먹었다고 하였습니다. 두 친구가 먹은 피자의 양은 어떨까요? 다음에 대하여 답하시오.

이대현

- (1) 갑동이는 춘향이와 향단이가 먹은 피자의 양이 같다고 하였습니다. 갑동이의 답이 옳다는 것을 보이기 위하여 타당한 이유를 제시하시오.
- (2) 을동이는 춘향이와 향단이가 먹은 피자의 양이 같지 않다고 하였습니다. 을동이의 답이 옳다는 것을 보이기 위하여 타당한 이유를 제시하시오.

채점기준: $\frac{1}{2}$ 에 해당하는 분수의 양을 적절하게 나타낼 수 있는지와 대상이 되는 사물의 크기를 달리함에 따라 먹은 피자의 양이 달라질 수 있다는 것을 설명하는지에 초점을 두고 채점을 한다. 특히 그림이나 다른 방법을 이용해서 자신이 생각하는 것과 문제해결 과정을 효과적으로 전달할 수 있는가를 확인한다.



PCK 5-3. 분수 나눗셈의 의미 이해: 6학년(분수의 나눗셈)

평가기준: 분수의 나눗셈에 맞는 현실적인 상황 문제를 설정할 수 있다.

평가유형: 문제 만들기

문항: 분수의 나눗셈 $1\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$ 의 상황을 적절하게 나타내는 문장제를 제시하시오.

채점기준: 초등학교에서 분수의 나눗셈은 포함제로 다루도록 제시되어 있으며(교육인적자원부, 2006), 분수의 나눗셈 모델에는 다음과 같은 것이 있다. 채점은 제시된 모델에 적합 정도에 따라 판단하되, 현실 맥락의 적합 타당성 정도를 고려해야 한다.

모델: ① 측정모델: $1\frac{1}{2}$ 안에 포함된 $\frac{2}{3}$ 의 개수 알아내기

(예) 10시간에 $\frac{2}{3}$ km의 도로를 건설할 경우, $1\frac{1}{2}$ km의 도로를 건설하는데 걸리는 시간을 구하여라.

② 분할모델: 어떤 수의 $\frac{2}{3}$ 가 $1\frac{1}{2}$ 이 되는 어떤 수 알아내기

(예) 전체 줄의 길이의 $\frac{2}{3}$ 가 $1\frac{1}{2}$ m일 때, 전체 줄의 길이를 구하여라.

③ 인수모델: $\frac{2}{3}$ 를 곱해서 $1\frac{1}{2}$ 이 되는 인수를 알아내기

(예) 직사각형의 가로의 길이가 $\frac{2}{3}$ m이고 넓이가 $1\frac{1}{2}$ m² 일 때 세로의 길이를 구하여라.



PCK 5-4. 분수학습에 대한 자기평가: 4학년(분수)

평가기준: 이산량과 1이 아닌 연속량의 부분이 전체의 얼마인지를 분수로 나타낼 수 있다.

평가유형: 자기평가

문항: 오늘은 수학시간에 이산량과 1이 아닌 연속량(길이)의 부분이 전체의 얼마인지를 분수로

초등수학에서 분수에 관한 교수학적 내용 지식 개발 연구

나타내는 것에 대하여 배웠습니다. 오늘의 수학 학습 대하여 생각해 보고, 다음 항목들이 가능한 많이 포함되도록 수학 일기를 쓰시오.

- 오늘의 학습 내용과 학습한 결과로써 알게 된 것
- 학습 도중 이해가 되지 않았던 것
- 학습한 결과를 일상 생활에 활용할 수 있는 것
- 본인의 수업 태도와 오늘의 수학 학습에 대한 느낌과 의견
- 선생님께 부탁하고 싶은 말

채점기준: 다음과 같은 개인별 기록표를 이용하여 학생 이해를 위한 자료로 활용한다. 그리고 자기평가에서는 학생이 솔직하게 기술하는 것이 중요하므로, 평가 결과를 척도화하여 활용하지 않도록 유의한다.

	긍정적	보통	부정적	참 고
학습내용의 이해 정도				
학습내용의 유용성 및 활용성 인식				
학습 태도				
참 고 사 항				

V. 결론

초등학교 수학의 분수 영역은 교수-학습에서 분수에 대한 개념적 이해보다는 절차적 지식의 숙달에 치중하는 것과 같은 외적 요인과 많은 하위 개념 때문에 분수의 다양한 의미를 충분히 이해하기가 어렵다는 내적 요인 등으로 인해 학생들에게 어려운 주제가 되어 왔다. 따라서 학생들의 참된 이해를 위한 수업 운영을 위하여 효율적인 분수 지도에 대한 노력이 필요하다. 이런 면에서 본 연구에서는 초등 수학에서 학생들이 특히 어려움을 느끼고 있는 분수영역을 선정하여 분수 내용을 지도하는데 필요한 교수학적 내용 지식을 개발하는데 목적을 두었다.

교수학적 내용 지식에 대한 관심은 학생들이 수학을 학습할 때 학습 내용을 잘 이해할 수 있도록 교사가 교육 내용을 효과적으로 지도할 수 있는 '효율적인 교수 방법의 개발'에 초점을 두고 있다. 이런 면에서 분수 영역에 대한 교수학적 내용 지식의 개발은 학생들이 분수의 학습내용을 보다 잘 이해하도록 하기 위하여 교사는 학생에 대해 충분히 이해하고 교수학적 내용 지식을 바탕으로 학생들이 교육 내용에 대한 효과적인 이해가 이루어지도록 해야 한다는 전제에서 출발하였다.

본 연구에서 교수학적 내용 지식의 범주로는 교육과정에 대한 이해, 학생과 학생 지식에 대한 이해, 교사와 교사 지식에 대한 이해, 수업 방법, 내용, 운영에 대한 이해, 평가 방법 이해를 제시하였다. 그리고 이에 따라 각각에 해당하는 교수학적 내용 지식을 분수 관련 교수-학습 상황에 관련하여 수학 교사가 숙지해야 할 내용과 더불어, 수업에서 활용할 수 있

는 학습 자료를 제시하는 것에 초점을 두었다.

교육과정에 대한 이해에서는 제7차 수학과 교육과정과 신교육과정에서 분수 영역에 대한 변화된 내용과 그 이유 등에 관해 살펴보았고, 학생과 학생 지식에 대한 이해에서는 학생들이 분수를 어려워하는 이유와 분수 관련 내용에서의 주요 오류와 그 처리 방안에 대해 알아보았다. 교사 지식에 대한 이해에서는 교사들의 분수지도에 대한 곤란도와 중요성에 대한 인식 정도, 그리고 교사들의 분수 영역에 대한 이해 정도에 대한 선행 연구 결과를 제시함으로써 분수 영역에 대한 개념적 이해의 필요성을 제시하였다.

수업 방법, 내용, 운영에 대한 이해에서는 분수 영역의 지도에서 직접 활용할 수 있는 학습 자료의 개발에 초점을 두었다. 이 자료는 분수 지도에 직접 활용하거나 교실 상황에 맞게 변형하여 사용할 수 있는 기초가 될 수 있을 것이다. 마지막으로 평가 방법 이해에서는 분수 영역에 대한 이해 정도를 평가할 수 있는 문항을 제시하였다.

본 연구에서 제시된 교수학적 내용 지식은 학습 자료의 개발에 국한하지 않고 분수를 지도하는데 있어서 교사가 숙지해야 할 여러 가지 메타 정보를 포함하고 있다. 이것은 한 주제를 가르친다는 것은 그 주제와 관련된 다양한 상황의 이해가 바탕이 되어야 한다는 믿음 때문이다.

본 연구에서 개발된 분수 관련 교수학적 내용 지식은 교육 내용과 그에 적절한 교수 방법, 그리고 교육 내용과 관련된 풍부한 소재의 개발과 보급을 통하여 학생의 삶에 유의미한 도구로서의 수학을 인식시킬 수 있는 의미 있는 수학교육으로 변화를 유도할 수 있을 것이다. 또한, 초등수학의 타 영역뿐만이 아니라, 중등 수학의 여러 내용 영역에 대한 교수학적 내용 지식을 개발하는 초석이 될 것이며, 이를 통해 교사 스스로 학생의 이해를 위한 교수학적 내용 지식의 개발과 활용을 통해 전문직으로서 교사의 능력과 역할에 대한 정체성을 확립하는데 한층 기여할 것이다.

마지막으로 본 연구에 터하여 추후에 다음과 같은 연구가 지속적으로 요구된다.

첫째, 본 연구에서 개발한 분수 영역 관련 교수학적 내용 지식은 일부에 지나지 않는다. 현장 교사의 교육 경험과 수학교육학적 이론에 바탕을 두고 좀 더 풍부한 교수학적 내용 지식의 개발이 요구된다.

둘째, 초등학교에서 다루는 여러 주제에 대한 교수학적 내용 지식의 개발이 요구된다. 이것은 ‘학생의 이해를 위한 수업 운영’이라는 수학 교실의 내실화를 위해 필요하다.

셋째, 초등 수학뿐만이 아니라, 중등 수학에서도 교수학적 내용 지식의 개발에 관심을 가져야 한다. 특히 중등수학은 좀 더 추상화되는 특성으로 인해 학습 결손 현상이 심각하다. 따라서 학생의 이해를 촉진하고 수업의 내실화를 꾀할 수 있는 풍부한 교수학적 내용 지식의 개발이 요구된다.

참고문헌

- 강문봉 외12 (2006). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.
강지영, 김수환, 라병소, 박성택, 이의원, 이정재, 정은실 (2003). 7차 교육과정에 의한 초등 수학교육. 서울: 동명사.
교육부 (1997). 수학과 교육과정. 서울: 대한 교과서 주식회사.
교육인적자원부 (1998). 초등학교 교육과정 해설(IV). 서울: 대한 교과서 주식회사.

초등수학에서 분수에 관한 교수학적 내용 지식 개발 연구

- 교육인적자원부 (2006). 초등학교 교사용 지도서 수학 6-나. 서울:(주)천재교육.
- 교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제2007-79호[별책8].
- 김민경 (2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석. 학교수학 5(2), 223-240.
- 김옥경 (1997). 초등학교 6학년 학생들의 분수 개념 이해 및 분수 수업 방안에 대한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 박정임 (2001). 분수의 나눗셈 개념에 관한 연구: 초등학교 6학년 학생을 중심으로. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 서관석, 전경순 (2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점. 수학교육학 연구, 10(1), 103-113.
- 서동엽 (2005). 분수의 역사발생적 지도 방안. 수학교육학연구, 15(3), 233-249.
- 안재구 (2000). 수학문화사 I: 원시에서 고대까지. 서울: 일월서각.
- 우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부.
- 이종욱 (2005). 분수에 대한 교사 지식의 변화에 관한 연구. 한국교원대학교 박사학위논문.
- 이화진, 오은순, 송현정, 전효선, 조일수, 강대현, 권점례, 곽영순, 유정애, 이경언, 양윤정, 이윤, 김명화, 오상철, 송선주, 김완수 (2005). 2005 KICE 교수학습개발센터 콘텐츠 개발·운영-내용교수법(PCK) 및 온라인 수업 장학 지원 프로그램 개발을 중심으로-. 한국교육과정평가원 연구보고 RRI 2005-1.
- 임재훈, 이대현 (2004). 수학과 교육내용 적정성 분석 및 평가. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRC 2004-1-5.
- 전평국, 박혜정 (2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석. 수학교육논문집, 15, 71-76.
- 홍성윤 외 (1994). 학교 및 사회·산업기관의 교육과정 개발론. 서울: 교육과학사.
- Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Lenchner, G. (1983). *Creative Problem Solving in School Mathematics*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Liping Ma (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United State*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- National Council of Teachers of Mathematics(1989). *Curriculum and Evaluation standards for school mathematics*. Reston, V.A: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Reys, R. E., Suydam, M. N., Limdquist, M. M, & Smith, N. L. (1999). 초등 수학 학습 지도의 이해. (강문봉 외 18, 역). 서울: 양서원. (영어 원작은 1998 출판)
- Shulman, L. S. (1986). Those Who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), pp. 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: The foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, pp. 1-22.

A Study on the Development of Pedagogical Content Knowledge on Fraction in the Elementary School Mathematics

Lee, Dae-hyun⁷⁾

Abstract

This study is aimed at development of pedagogical content knowledge on fraction in the elementary school mathematics. Elementary students regard fraction as the difficult topic in school mathematics. Furthermore, fraction is the fundamentally important concept in studying mathematics. So it is important to develop the pedagogical content knowledge on fraction.

The reason of attention to the pedagogical content knowledge is that improving the quality of teaching is the central focus of a high quality mathematics education. Shulman suggested that various knowledges are required for teacher to improve their classes. Of course, pedagogical content knowledge is the most valuable in teaching mathematics. Pedagogical content knowledge is related to the promotion of students' understanding about the learning.

Pedagogical content knowledges are categorized by five factors in this study. These are understanding about curriculum, understanding about students and students' knowledge, understanding about teachers and teachers' knowledge, understanding about the methods, contents, and management of class, and understanding about methods of assessments. I develop the pedagogical content knowledge on fraction according to the these categories.

I concentrate on the two types of pedagogical content knowledges in developing. That is, I present knowledges which teachers have to know for teaching fraction effectively and materials which teachers can use during the teaching fraction.

Pedagogical content knowledges guarantee teachers as the professionals. Teachers should not teach only content knowledges but teach various knowledges including the meta-knowledges which have relation to fraction.

Key Words : Pedagogical content knowledge, Subject matter content knowledge,
Curricular knowledge, Fraction, Enrichment of teaching and learning

7) Gwangju National University of Education (leedh@gnue.ac.kr)