

후위순회 피보나치 원형군에 대한 임베딩

김 용 석[†]

요 약

본 논문에서는 후위순회 피보나치 원형군의 임베딩 문제를 고려한다. 후위순회 피보나치 원형군은 피보나치 선형배열, 피보나치 메쉬, 피보나치 트리, 피보나치큐브와 하이퍼큐브를 부 그래프로 갖는다.

키워드: 상호연결망, 지름, 피보나치 수, 원형군, 피보나치 큐브

The Embedding on Postorder Fibonacci Circulant

Yong-Seok Kim[†]

ABSTRACT

In this paper, we consider the embedding problem of postorder Fibonacci circulant. We show that Fibonacci linear array, Fibonacci mesh, Fibonacci tree, Fibonacci cubes and Hypercube are a subgraph of postorder Fibonacci circulant.

Key Words : Interconnection network, Diameter, Fibonacci number, Circulant, Fibonacci cubes

1. 서 론

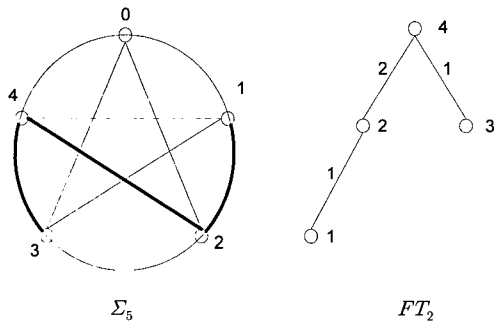
최근 컴퓨터 시스템은 하드웨어 기술의 발달과 함께 단일 프로세서 중심의 처리구조에서 여러 개의 프로세서를 상호 연결하여 처리하는 병렬처리 컴퓨터 구조로 발전해 가고 있다. 이와 같은 컴퓨터 구조에 있어서는 각 처리 장치들 간의 상호연결망이 중요한 부분을 차지하게 되는데[1-2], 이러한 상호연결망 중에서 가장 널리 사용되고 있는 위상들 중 하나가 하이퍼큐브이다. 그런데 하이퍼큐브가 가지고 있는 여러 가지 장점들에도 불구하고 짧은 지름을 갖지 못하는 단점이 있어 이를 해결하려는 많은 연구가 두가지 방향으로 이루어졌다. 첫번째, 분지수를 고정시키고 지름을 줄이는 연구에서는 지름을 반으로 줄이는 데 성공하였다. 그런데 큐브기반의 위상에서는 더 이상의 진전된 결과는 나오지 않고 이것이 최적인지도 아직 증명되지 않았다. 두 번째, 지름은 고정시키고 분지수를 줄이거나, 분지수와 지름을 동시에 줄이는 연구에서는 분지수를 줄이는 부작용으로 위상이 비대칭적이 되고 메시지 정체(message traffic) 현상이 발생할 수 있다[3].

본 논문에서는 짧은 지름을 갖지 못한 하이퍼큐브의 단점

을 해결한 하이퍼큐브의 변형들보다 더 짧은 지름을 가지면서 동시에 하이퍼큐브와 비슷한 장점을 가지면서 피보나치 수의 성질을 이용하고 하이퍼큐브의 대안 중 하나인 피보나치큐브의 단점인 비대칭성을 대칭적인 위상으로 개선한 후위순회 피보나치 원형군[4]이 선형배열, 링, 메쉬, 트리, 하이퍼큐브, 피보나치큐브를 부그래프로 갖음을 증명하였다. n 차원 후위순회 피보나치 원형군, $\Sigma_n, n \geq 2$ 은 f_n 개의 노드를 가지며 그래프 $G = (V_n, E_n)$ 이라고 하면 $V_n = \{0, 1, \dots, f_n - 1\}$ 을 노드집합으로 가지고 $E_n = \{(v, w) \mid v + f_i \equiv w \pmod{f_n}, 2 \leq i \leq n - 2\}$ 을 에지 집합으로 가지는 그래프이다. 특히 Σ_n 은 노드수가 피보나치 큐브[5]와 같지만 지름은 피보나치큐브, Γ_n 가 $n - 2$ 인 반면에 Σ_n 은 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이고 비대칭적인 위상이 노드 대칭적인 위상으로 개선되었다. 연결망에서 지름은 임의의 두 노드간의 최대거리인데, 이는 연결망 전체에 정보를 전파하는데 드는 지연 시간의 하한값이다. 그리고 노드 대칭성은 라우팅에서 노드 밀집도를 줄이는 요인이 된다. 또한 노드 대칭성이 있는 연결망으로 병렬컴퓨터를 설계할 때는 모든 노드가 같은 역할을 수행하므로 한가지 종류의 처리기만 있으면 된다.

Σ_n 에서 특정한 자료구조나 계산구조를 기반으로 하는 작업을 쉽게 처리하기 위해서는 그러한 자료구조나 계산구조를 Σ_n 으로 사상하는 효율적인 방법이 필요하다. 이러한 사

[†] 정 회 원 : 서남대학교 컴퓨터정보통신학과 교수
논문접수 : 2007년 4월 4일, 심사완료 : 2007년 7월 2일



(그림 1) f -에지 번호매김의 예

상을 임베딩(embedding)이라 하며 그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 $f=(\phi, \rho)$ 는 다음과 같이 정의한다. ϕ 는 G 의 정점 v 에서 H 의 정점 $\phi(v)$ 로의 함수이고, ρ 는 G 의 에지 $e=(v,w)$ 에서 $\phi(v)$ 와 $\phi(w)$ 를 잇는 H 의 경로 $\rho(e)$ 로의 함수이다. 임베딩의 비용을 측정하는 척도로는 연장률(dilation), 밀집률(congestion), 확장률(expansion) 등이 있다. G 의 에지 e 의 연장률은 H 상에서의 경로 $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩 f 의 연장률은 G 의 모든 에지의 연장률 중 최대값이다. H 의 에지 e' 의 밀집률은 e' 를 포함하는 $\rho(e)$ 의 개수를 말한다. 임베딩 f 의 밀집률은 H 의 모든 에지의 밀집률 중 최대값이다. 임베딩 f 의 확장률은 G 의 정점의 개수에 대한 H 의 정점 개수의 비를 말한다 [6-7].

임의의 그래프 G 를 Σ_n 에 임베딩하기 위한 방법 중 하나인 그래프 번호매김은 G 의 모든 정점들에 대해 서로 다른 정수 $\{1, 2, \dots, |V|\}$ 를 일대일 대응시키는 것을 말한다. 본 논문에서는 트리의 순회방법 중 하나인 후위순회방법으로 각 정점들을 번호매김하였고 그래프의 각 에지는 이러한 번호매김으로 부터 그 에지의 양끝 정점에 할당된 정수값의 차이인 (그림 1)에서와 같이 에지번호를 갖는다[8]. 그래프 G 에 대한 f -에지 번호매김이란[9] 에지번호가 항상 피보나치 수 $f_n, n \geq 2$ 가 되게 번호매김된 것이고 Σ_n 와 f -에지 번호매김의 정의로 부터 정점수가 f_n 이하이고 f -에지 번호매김이 가능한 그래프는 Σ_n 의 부 그래프임을 알 수 있다.

본 논문에서 다룬 피보나치 트리는 높이가 h 인 AVL 트리 중에서 정점 수가 가장 작은 경우로서 최악의 경우에도 탐색을 $O(\log n)$ 의 복잡도로 가능하다. 이러한 피보나치 트리를 Σ_n 에 효율적으로 임베딩할 수 있다는 것은 Σ_n 에서 피보나치 트리 형태의 자료구조를 쉽게 시뮬레이션할 수 있으며 피보나치 트리를 기반으로 하는 분할정복 알고리즘을 효율적으로 수행할 수 있음을 의미한다[10-11]. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 피보나치 선형배열, 피보나치 메쉬 그리고 피보나치 트리에 대한 정의와 Σ_n 으로의 임베딩을 살펴본다. 제3장에서는 T_n 의 Σ_n 으로의 임베딩에 대해 살펴본다. 제4장에서는 하이퍼큐브의 Σ_n 으로의 임베딩에 대해서 살펴본다. 마지막으로 5장에서는 결론을 맺는다.

2. 피보나치 선형배열, 메쉬와 트리

본 절에서는 피보나치 선형배열, 메쉬 그리고 트리에 대해 정의를 하고 이들 위상들이 Σ_n 에 어떻게 임베딩되는지 살펴본다. 일반적으로 선형배열과 트리는 병렬컴퓨터에서 단순한 망임에도 불구하고 중요하고 흥미로운 많은 알고리즘을 제공한다. 그리고 메쉬는 상호연결망 패턴의 단순성과 규칙성에 의해 VLSI 구현에 이상적이다. 다음은 이들 구조에 대한 정의와 예들이 정의 1과 (그림 2)에 있다.

정의 1.

1) n 차원 피보나치 선형배열 $L_n, n \geq 0$ 은 전체 노드개수가 f_n 이다.

2) $n_1, n_2 > 0$ 인 정수이고 (n_1, n_2) 차원의 피보나치 메쉬, $M_{(n_1, n_2)}$ 는 $f_{n_1} \times f_{n_2}$ 메쉬이다.

3) n 차원 피보나치 트리, $FT_n = G(V_n, E_n)$

$$FT_{-1} = (\phi, \phi), \quad FT_0 = (\{1\}, \phi), \quad FT_n = FT_{n-1} \cup FT'_{n-2} \cup FT''_n, \quad n \geq 1$$

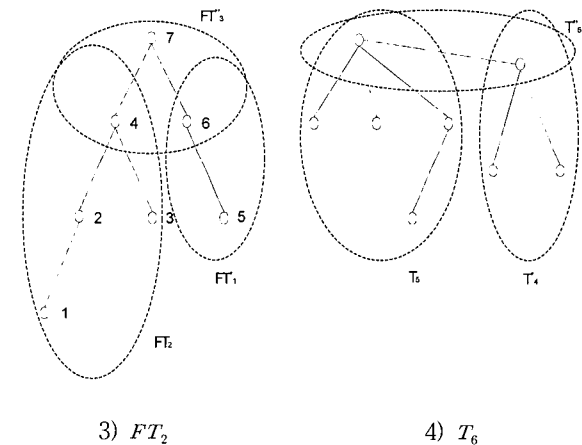
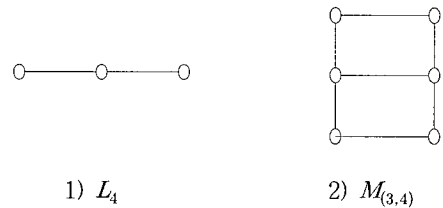
$$FT'_n = (\{i + f_{n+2} - 1 : i \in V_{n-2}\}, \{(i + f_{n+2} - 1, j + f_{n+2} - 1) : (i, j) \in E_{n-2}\})$$

$$FT''_n = (\{f_{n+2} - 1, f_{n+3} - 1, f_{n+3} - 2\}, \{(f_{n+3} - 1, f_{n+2} - 1), (f_{n+3} - 1, f_{n+2} - 2)\})$$

4) 변형된 n 차원 피보나치 트리, $T_n = G(V_n, E_n)$

$$T_0 = (\phi, \phi), \quad T_1 = (\{1\}, \phi) = T_2, \quad T_n = T_{n-1} \cup T'_{n-2} \cup T''_n, \quad n \geq 1$$

$$T'_{n-2} = (\{i + f_{n-1} : i \in V_{n-2}\}, \{(i + f_{n-1}, j + f_{n-1}) : (i, j) \in E_{n-2}\})$$



(그림 2) 피보나치 선형배열, 메쉬, 트리들의 예

$$T_n'' = (\{0, f_{n-1}\}, \{(0, f_{n-1})\})$$

FT_n 와 T_n 의 정의 1에 따른 생성 예가 다음 예1)과 예2)에 있다.

예 1)

$$FT_1 = FT_0 \cup FT_{-1} \cup FT_1'', \quad FT_0 = (\{1\}, \phi), \quad FT_{-1} = (\phi, \phi), FT_1'' = (\{1, 2\}, \{(2, 1)\})$$

$$FT_2 = FT_1 \cup FT_0' \cup FT_2'', \quad FT_1 = (\{1, 2\}, \{(2, 1)\}), \quad FT_0' = (\{3\}, \phi) \\ FT_2'' = (\{2, 4, 3\}, \{(4, 2), (4, 3)\})$$

$$FT_3 = FT_2 \cup FT_1' \cup FT_3'', \quad FT_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(2, 1), (4, 2), (4, 3)\})$$

$$FT_1' = (\{5, 6\}, \{(6, 5)\}), \quad FT_3'' = (\{4, 7, 6\}, \{(7, 4), (7, 6)\})$$

예 2)

$$T_3 = T_2 \cup T_1' \cup T_3'', \quad T_2 = (\{0\}, \phi), T_1' = (\{1\}, \phi), \quad T_3'' = (\{0, 1\}, \{(0, 1)\})$$

$$T_4 = T_3 \cup T_2' \cup T_4'', \quad T_3 = (\{0, 1\}, \{(0, 1)\}), T_2' = (\{2\}, \phi), \\ T_4'' = (\{0, 2\}, \{(0, 2)\})$$

$$T_5 = T_4 \cup T_3' \cup T_5'', \quad T_4 = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (0, 2)\}), \quad T_3' = (\{3, 4\}, \{(3, 4)\}),$$

$$T_5'' = (\{0, 3\}, \{(0, 3)\})$$

$$T_6 = T_5 \cup T_4' \cup T_6'', \quad T_5' = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (3, 4)\})$$

$$T_4' = (\{5, 6, 7\}, \{(5, 6), (5, 7)\}), \quad T_6'' = (\{0, 5\}, \{(0, 5)\})$$

FT_n 에 대한 다음 성질 1과 성질 2가 성립됨이 알려져 있다.

성질 1 $H(FT_n)$ 을 FT_n 의 높이라고 하면

$$H(FT_{-1})=0, \quad H(FT_0)=1 \quad \text{그리고} \quad H(FT_n)=n+1 \quad \text{이다.}$$

성질 2 $H(T_n)$ 을 T_n 의 높이라고 하면

$$H(T_1)=1, \quad H(T_2)=1 \quad \text{그리고} \quad H(T_n)=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{이다.}$$

$L_n, M_{(n_1, n_2)}, FT_n, T_n$ 에 대해서 다음이 성립한다.

정리 1. $L_n, M_{(n_1, n_2)}, FT_n, T_n$ 은 다음이 성립한다.

1) $\Sigma_n \supseteq L_n, n \geq 0$

2) a) $\Sigma_{2n} \supseteq (M_{(n, n+1)} \cup M_{(n, n-1)})$

b) $\Sigma_{2n+1} \supseteq (M_{(n, n)} \cup M_{(n+1, n+1)})$

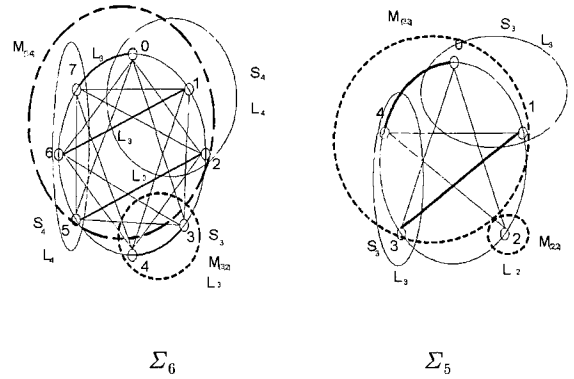
3) $\Sigma_{n+3} \supseteq FT_n, n \geq 0$

4) $\Sigma_n \supseteq T_n, n \geq 0$

증명) 1) Σ_n 이 링 구조를 포함하고 있으므로 노드번호 0에서 $f_n - 1$ 까지의 길이를 갖는 선형 배열을 갖는다.

2) 피보나치 수의 성질에 의해서 $f_{n+k} = f_k \cdot f_{n+1} + f_{k-1} \cdot f_n$ 이 성립한다.

a) $k = n$ 이라고 하면 $f_{2n} = f_n \cdot f_{n+1} + f_{n-1} \cdot f_n = A + B$, 여기에서 A 는 분할의 첫번째 부분으로 $f_n \cdot f_{n+1}$ 이 되고 B 는 분할의 두번째 부분으로 $f_{n-1} \cdot f_n$ 이 된다. 그리고 (그림 3)에서와 같이 Σ_n 에서 정점 f_n 개로 유도된 부 그래프를 S_n 이라고 하면 Σ_{2n} 에서 f_n 개의 S_{n+1} 과 f_{n-1} 개의 S_n 으로 분할할 수 있다. 이때 분할의 첫번째 부분인 f_n 개의 S_{n+1} 은 각각 L_{n+1} 을 포함하고 f_n 개의 S_{n+1} 으로부터 각각 하나의

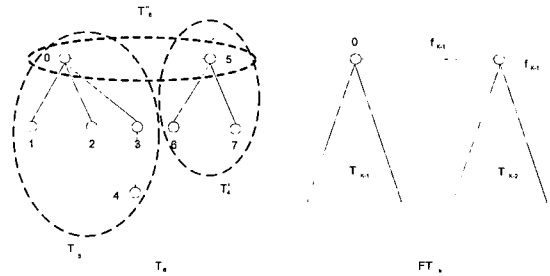
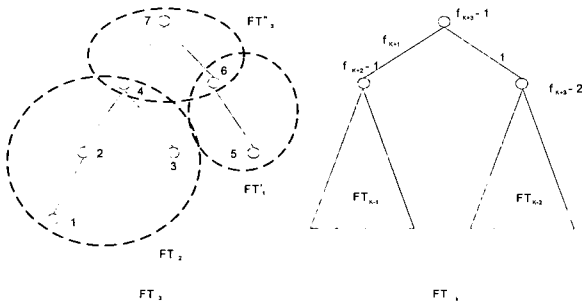
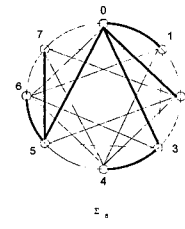
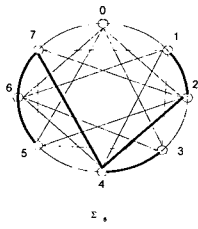


(그림 3) $\Sigma_{2 \cdot 3} \supseteq (M_{(3,4n)} \cup M_{(3,2)})$ 과 $\Sigma_{2 \cdot 2+1} \supseteq (M_{(2,2)} \cup M_{(3,3)})$ 의 예

노드를 취하여 만들어진 f_{n+1} 개의 S_n 은 L_n 을 포함하여 $M_{(n, n+1)}$ 을 이룬다. 마찬가지로 분할의 두번째 부분인 f_{n-1} 개의 S_n 은 각각 L_n 을 포함하고 f_{n-1} 개의 S_n 으로부터 만들어진 f_n 개의 S_{n-1} 은 L_{n-1} 을 포함하여 $M_{(n-1, n)}$ 을 이룬다.

b) $k = n + 1$ 이라고 할때 $f_{2n+1} = f_{n+1} \cdot f_{n+1} + f_n \cdot f_n = C + D$ 이다. 여기에서 C 는 분할의 첫번째 부분으로 $f_{n+1} \cdot f_{n+1}$ 이 되고 D 는 분할의 두번째 부분으로 $f_n \cdot f_n$ 이 된다. 그리고 Σ_{2n+1} 에서 f_{n+1} 개의 S_{n+1} 과 f_n 개의 S_n 으로 분할할 수 있다. 이때 분할의 첫번째 부분인 f_{n+1} 개의 S_{n+1} 은 각각 L_{n+1} 을 포함하고 f_{n+1} 개의 S_{n+1} 으로부터 각각 하나의 노드를 취하여 만들어진 f_{n+1} 개의 S_{n+1} 은 L_{n+1} 을 포함하여 $M_{(n+1, n+1)}$ 을 이룬다. 마찬가지로 분할의 두번째 부분인 f_n 개의 S_n 은 각각 L_n 을 포함하고 f_n 개의 S_n 으로부터 만들어진 f_n 개의 S_n 은 L_n 을 포함하여 $M_{(n, n)}$ 을 이룬다.

3) n 에 관한 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다. $n = 1$ 인 경우 정의 1(3)에 의해서 $FT_0 = (\{1\}, \phi)$, $FT_{-1} = (\phi, \phi)$, $FT_1'' = (\{1, 2\}, \{(2, 1)\})$, 그리고 $FT_1 = FT_0 \cup FT_{-1} \cup FT_1'' = (\{1, 2\}, \{(2, 1)\})$ 이다. 이것은 $\Sigma_4 = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\})$ 의 부분집합이 된다. (그림 4)에서와 같이 $n < k, k \geq 3$ 에서 $\Sigma_{n+3} \supseteq FT_n, n \geq 0$ 이 성립한다고 가정하면 $n = k$ 에서는 $FT_k = FT_{k-1} \cup FT_{k-2} \cup FT_k''$ 가 된다. 이때 FT_{k-1} 는 이전 단계의 트리이고 FT_{k-2} 는 FT_{k-2} 의 노드번호에 $f_{k+2} - 1$ 을 더한 노드 번호를 갖고 항상 루트 노드번호는 $f_{k+3} - 2$ 가 된다. 그리고 FT_k 에서 루트노드 $f_{k+3} - 1$ 는 FT_{k-1} 의 루트노드와 인접한 예지 $\{(f_{k+3} - 1), f_{k+2} - 1\}$ 그리고 FT_{k-2} 의 루트노드와 인접한 예지 $\{(f_{k+3} - 1), f_{k+3} - 2\}$ 가 추가되므로 이때 두 정점의 노드 번호 차의 절대값인 예지 번호가 $|(f_{k+3} - 1) - (f_{k+2} - 1)| = f_{k+1}$ 과 $|(f_{k+3} - 1) - (f_{k+3} - 2)| = 1$ 이 된다. 그러므로 추가되는 예지 번호는 1 과 f_{k+1} 이므로 Σ_{k+3} 에서의 점프열은 $\{1, 2, \dots, f_{k+1}\}$ 이고 전체 노드개수는 f_{k+3} 이므로 $\Sigma_{k+3} \supseteq FT_k$ 이 항상 성립한다.



(그림 4) $\Sigma_n \supseteq FT_n$ 의 예

(그림 5) $\Sigma_n \supseteq T_n$ 의 예

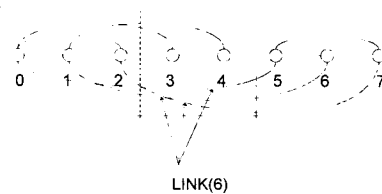
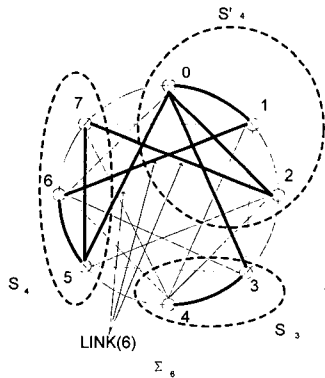
4) $n=1$ 인 경우 정의 1(4)에 의해서 $T_1 = (\{0\}, \phi) = T_2$ 이고 $T_3 = T_2 \cup T_1' \cup T_3'$ 이므로 $T_2 = (\{0\}, \phi)$ 이고 T_1' 는 T_1 의 노드 번호에 f_2 를 더한 노드 번호를 가지므로 $(\{1\}, \phi)$ 이 된다. $T_3' = (\{0, 1\}, \{(0, 1)\})$ 즉 T_2 의 루트노드 0과 T_1' 의 루트노드 1에 인접한 에지를 추가한다. 이때 에지 번호는 f_2 가 된다. 이것은 $\Sigma_3 = (\{0, 1\}, \{(0, 1)\})$ 이 된다. (그림 5)에서와 같이 $n < k, k \geq 5$ 에서 $\Sigma_{k-1} \supseteq T_{k-1}$ 이 성립한다고 가정하면 $n=k$ 에서는 $T_k = T_{k-1} \cup T_{k-2}' \cup T_k'$ 가 된다. 이때 T_{k-1} 는 이전 단계의 트리이고 T_{k-2}' 는 T_{k-2} 의 노드 번호에 f_{k-1} 을 더한 노드 번호를 가지고 루트 노드번호는 f_{k-1} 이 된다. 그리고 T_k' 는 T_{k-1} 의 루트 노드 0과 T_{k-2}' 의 루트 노드 f_{k-1} 에 인접한 에지를 추가하므로 T_k' 에서 새로 추가되는 에지 번호는 f_{k-1} 뿐이다. 그리고 Σ_k 의 점프열은 $\{f_2, f_3, \dots, f_{k-2}\}$ 인데 피보나치 수의 성질 $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ 과 노드 대칭적인 성질을 이용하여 $f_k - f_{k-2} = f_{k-1}$ 가 되므로 f_{k-2} 의 점프값은 반대방향의 점프값 f_{k-1} 과 같다. 그러므로 새로 추가되는 에지없이 $T_k \subseteq \Sigma_k$ 이 성립한다.

3. 피보나치큐브와 후위순회 피보나치 원형군 간의 임베딩

본 절에서는 피보나치큐브, Γ_n 가 Σ_n 의 부분 그래프임을 보인다. Γ_n 는 임의의 자연수가 피보나치 수들의 합으로 나타낼 수 있다는 성질을 이용한 상호연결망으로서 비대칭적 구조와 에지의 성감성(sparsity)에도 불구하고 하이퍼큐브, Q_n 를 부분 그래프로 가지고 망 척도면에서 여러가지 장점을 가지고 있어 Q_n 의 대안으로 제안되었다.

정리 2 $\Sigma_n \supseteq \Gamma_n$ 이다.

증명) $\Sigma_n = G(V_n, E_n)$ 이고 $\Gamma_n = G'(V'_n, E'_n)$ 이라고 하면 $1 \leq n \leq 3$ 인 경우에는 $G \cong G'$ 임을 쉽게 알 수 있다. 만약 $n < k, k \geq 4$ 인 경우에 성립한다고 가정하면 $n=k$ 인 경우에는 (그림 6)에서와 같이 Γ_k 는 Γ_{k-1} 과 Γ_{k-2} 로 분할할 수 있고 다시 Γ_{k-1} 는 Γ_{k-2}' 와 Γ_{k-3} 으로 분할할 수 있다. 그리고 이들 중 Γ_{k-2}' 와 Γ_{k-2} 두 부분 그래프의 각각의 두 노드들은 $LINK(k) = \{(i, j) \mid |i-j|=f_{k-1}, (i, j) \in E'_k\}$ 에 의해서 연결되고 Γ_{k-2}' 의 두 분할 Γ_{k-3}' 와 Γ_{k-4} 중 Γ_{k-3}' 와 Γ_{k-3} 의 두 부분 그래프

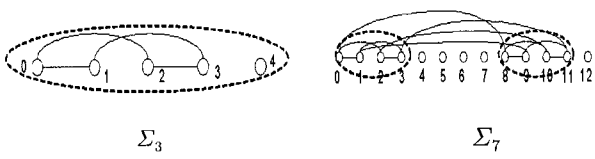
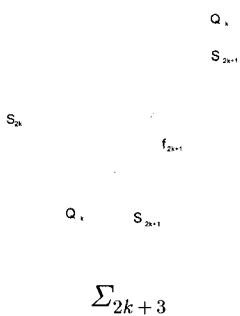
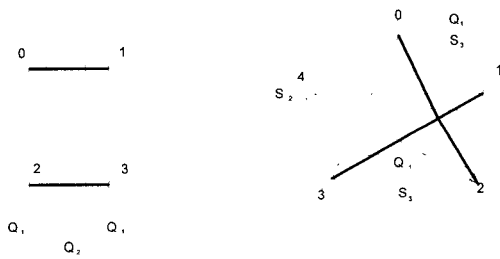


(그림 6) $\Sigma_n \supseteq \Gamma_n$ 의 예

의 각각의 노드들은 $LINK(k) = \{(i, j) \mid |i - j| = f_{k-2}, (i, j) \in E_k\}$ 에 의해서 연결된다. 또한 Σ_k 에서 f_k 개의 노드들의 집합으로 유도된 부 그래프를 S_k 라고 하면 Σ_k 는 S'_{k-2}, S_{k-3} 그리고 S_{k-2} 로 분할되고 S'_{k-2} 와 S_{k-2} 는 Γ_{k-2} 와 Γ_{k-2} 를 S_{k-3} 는 Γ_{k-3} 을 부 그래프로 포함한다. 그리고 S'_{k-2} 의 노드들과 S_{k-2} 의 노드들 사이에 인접한 에지를 갖는다면 피보나치 수의 성질 $f_{k-1} = f_k - f_{k-2}$ 에 의해서 최대 점프값 f_{k-2} 가 반대 방향의 점프값 f_{k-1} 로 치환되어 $LINK(k)$ 와 같게 되고 S'_{k-2} 의 노드들과 S_{k-3} 의 노드들 사이에 인접한 에지를 갖는다면 점프값 f_{k-2} 로 $LINK(k)$ 와 같게 된다. 그러므로 Σ_k 는 Γ_k 를 부 그래프로 포함한다.

4. 하이퍼큐브와 후위순회 피보나치원형군 간의 임베딩

본 절에서는 n 차원 하이퍼큐브, Q_n 가 Σ_{2n+1} 의 부 그래프임을 보인다. 임베딩에서 하이퍼큐브를 부 그래프로 갖는



(그림 7) $Q_n \subseteq \Sigma_{2n+1}, n \geq 1$ 의 예

다는 의미는 확장률, 연장률, 그리고 밀집률 측면에서 추가되는 비용없이 하이퍼큐브를 시뮬레이션할 수 있고 하이퍼큐브에서 개발된 알고리즘을 그대로 사용할 수 있음을 뜻한다. 상호연결망 중 가장 널리 알려지고 사용되고 있는 것 중의 하나인 Q_n 는 2^n 개의 노드를 갖고, 분지수는 n 이고 각 노드를 이진수로 표현했을 때 정확히 한 비트 서로 다른 노드들 사이에 에지를 둔 연결망이다. Q_n 는 여러 가지 측면, 즉 정규성, 재귀적 구조, 분할 가능성, 강한 연결도, 많은 구조들의 시뮬레이션의 가능 등의 좋은 특성을 가진다.

정리 4. $\Sigma_{2n+1}, n \geq 1$ 은 Q_n 이다.

증명(그림 7)에서와 같이 $n=2$ 인 경우 Q_2 는 두 개의 Q_1 이 서로 매칭되는 형태이다. 그리고 Σ_5 에서는 두 개의 S_3 와 하나의 S_2 로 분할할 수 있는데 이때 S_3 는 Q_1 과 서로 동형이고 이들 두 S_3 사이에서 서로 매칭되므로 Σ_5 는 Q_2 를 부 그래프로 포함한다. $n \leq k, k \geq 3$ 인 경우 Σ_{2n+1} 이 Q_n 을 부 그래프로 포함한다고 가정하면 $n=k+1$ 인 경우에는 Σ_{2k+3} 은 두 개의 S_{2k+1} 과 하나의 S_{2k} 로 분할되고 각각의 S_{2k+1} 에는 Q_k 가 포함된다. 그리고 이들 두 S_{2k+1} 사이에는 Σ_{2k+3} 의 최대 점프값 f_{2k+1} 로 매칭된다. 그러므로 Σ_{2k+3} 은 Q_{k+1} 을 부 그래프로 포함된다.

5. 결론

본 논문에서는 $L_n, M_{(n,n)}, FT_n, T_n$ 등이 Σ_n 의 부 그래프임을 보였다. 그리고 상호연결망 중 가장 널리 알려진 것들 중 하나인 Q_n 가 Σ_{2n+1} 의 부 그래프이고 또한 Q_n 의 대안으로 피보나치 수를 이용하고 비대칭적인 구조의 특성에도 불구하고 비슷한 성능을 가진 Γ_n 도 Σ_n 의 부 그래프임을 보였다. 이것의 의미는 첫째 상호연결망 중에서 가장 널리 알려진 것들 중 하나인 Q_n 을 부그래프로 가지고 있으므로 추가되는 비용없이 Q_n 을 시뮬레이션할 수 있으므로 Q_n 에서 개발된 모든 알고리즘을 구현할 수 있다. 둘째 피보나치 수를 이용한 상호연결망인 Γ_n 를 부그래프로 가지므로 이진수가 아닌 피보나치 수의 성질을 이용한 알고리즘을 구현하기가 쉽다. 셋째 대칭적인 구조인 Q_n 과 비대칭적인 구조인 Γ_n 을 동시에 부그래프로 포함한다. 넷째 Σ_n 는 하이퍼큐브를 부그래프로 포함하지만 하이퍼큐브 변형들 보다 더 짧은 지름을 갖는다.

역으로 대칭적인 Σ_n 를 비대칭적인 Γ_n 에 임베딩하는 문제는 정규형인 Σ_n 의 분지수는 n 이고 Γ_n 의 최소 분지수는 $\lfloor \frac{(n-2)}{3} \rfloor$ 이다. 그리고 Σ_n 를 Q_{n-2} 에 임베딩하는 문제 역시 Σ_n 의 분지수는 n 인 반면에 Q_{n-2} 의 분지수는 $n-2$ 이므로 연장률과 밀집률의 값은 현실적으로 클 수 밖에 없다.

참 고 문 헌

[1] D. F. Reed and R. M. Fujimoto, Multicomputer Networks: Message-based Parallel Processing, MIT Press, 1987.

[2] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: arrays, trees, hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, California, 1992.

[3] Nitin K. Singhvi, "The Connection Cubes : Symmetric, Low Diameter Interconneci on Networks with Low Node Degree," Parallel Processing Symposium, 1993., Pro ceedings of Seventh International Volume, Issue, 13-16 Apr 1993, pp.260-267.

[4] 김용석, "피보나치 후위순회 원형군", 한국정보처리학회 춘계학술발표대회 논문집 제13권 제1호 2006. 5, pp.743-746.

[5] W.-J. Hsu, "Fibonacci cubes-A new Interconnection Topology," IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, vol. no. 1, Jan. 1993.

[6] S. N. Bhatt, F. R. K. Chung, F. T. Leighton, and A. L. Rosenberg, "Efficient embeddings of trees in hypercubes," SIAM J. Compt. 21 (1992) pp.151-162.

[7] F. R. K. Chung, "On optimal linear arrangment of tree," Comput. Math. Appl. 10(1984) pp.43-60.

[8] 임형석, 그래프의 번호매김과 그의 응용, 이학박사 논문, 한국과학기술원, 1993.

[9] 김용석, "그래프 임베딩과 관련된 이항 트리에서의 Q-에지 번호매김에 관한 연구", 전자공학회논문지 제42권 CI 제1호, 2005, pp.27-34.

[10] E. Horowitz and S. Sahni, Fundamentals of Computer Algoritms. Rckville, MD: Computer Science Press, 1978, pp.188-191.

[11] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, "Special numbers," in Concrete Mathematics. Reading, MA: Addisson-Wesley, 1989, ch. 6.



김 용 석

e-mail : yskimsky320@naver.com

1987년 전남대학교 계산통계학과(이학사)

1989년 전남대학교 전산통계학과(이학석사)

1997년 전남대학교 전산통계학과(이학박사)

1992년~현재 서남대학교 컴퓨터정보통신학과 교수

관심분야 : 계산이론(알고리즘, 그래프 이론), 병렬처리, 상호연결망, 임베딩