The Korean Communications in Statistics **Vol. 14** No. 2, 2007, pp. 459–479

Understanding Black-Scholes Option Pricing Model

Eun-kyung Lee[1) and Yoon Dong Lee[2)

Abstract

Theories related to financial market has received big attention from the statistics community. However, not many courses on the topic are provided in statistics departments. Because the financial theories are entangled with many complicated mathematical and physical theories as well as ambiguously stated financial terminologies.

Based on our experience on the topic, we try to explain the rather complicated terminologies and theories with easy-to-understand words. This paper will briefly cover the topics of basic terminologies of derivatives, Black-Scholes pricing idea, and related basic mathematical terminologies.

Keywords: Options; no arbitrage principle; Brownian motion; Itô calculus; stochastic differential equation; martingale.

1. 서론

최근 국내 통계학계는, 통계학을 공부한 이후 금융 분야로 진출하는 사람들이나 금융분야로의 진출을 목적으로 통계학을 공부하는 사람들이 느는 이유로 통계학과 금융이론을 접목하여 교육하고 학습해야 할 현실적 필요성을 느끼게 되었고, 학문적 측면에서도 다양한 형태의 무수히 많은 자료가 생성되어 나오는 금융분야에 큰 관심을 두게 되었다. 금융과 금융시장의 이해는 짧은 시간에 한 두 가지 사항을 교육 학습함으로써 이룰 수 있는 것은 아니고, 상당한 기간의 노력과 경험이 필요할 것이다. 그러나 통계학도로서의 장점을 살려서, 그 강점이 될 수 있는 금융의 이론 분야를 잘 학습하고 교육하는 것은 매우 유리한 학습 전략이 될 수 있다. 그러나 최근 20년 동안 금융이론은 금융분야에 대한 이론적 접근법이라기보다는 오히려 확률론의 한 분야라고 해야 할 만큼 그 수학적 깊이가 급속히 깊어졌을 뿐만 아니라, 관련분야의 다양한 용어들에 대한 이해가 필요한 이유로 현재 국내 통계학계에는 많은 관심에도 불구하고 금융이론을 통계학과 접목하여 교육할 만한 소재와 자원이 충분하지 못하다.

1) Senior Researcher, Marketing Lab, Co., 115 Joong-Gu, Seoul, Korea.
E-mail : lee.eunk@gmail.com
2) Assistant Professor, Konkuk University, HwaYang-Dong, Kwang-Jin, Seoul 143-701, Korea.
Correspondence : poisson@dreamwiz.com

현대의 금융시장과 그 이론을 이해하는 과정에서 가장 까다로운 내용은 옵션 (options)과 선물 (futures)같은 파생상품과 관련된 내용이다. 본 논문에서는 금융파생 상품의 성질을 이해하는데 있어서 가장 기초적이고 핵심적인 용어와 이론들을, 블랙-숄즈 모형의 이해라는 주제를 중심으로 하여 설명하게 될 것이다. 금융시장과 파생상품의 이해를 위해서 블랙-숄즈 (Black-Scholes) 공식이 중요한 이유는 블랙-숄즈 모형이 현실과 잘 들어맞기 때문이라기보다는, 블랙-숄즈의 모형이 금융시장의 가장 기본적인 작동 방식을 이해하기에 꼭 필요한 정도로 적절하게 단순화하여 금융시장을 표현하고 있으므로, 금융시장을 이해하는 첫 단계로서 매우 유용하기 때문이다.

본 논문에서의 내용 전개의 수준은 통계학과 학부 고학년이나 석사과정 이상의 대학원 학생들이 통상적으로 학습하는 확률과 수학 지식을 이용하여 가능한 한 쉽고 짧은 시간 내에 이해할 수 있도록 어려운 내용은 생략하도록 하였다. 내용의 전개 과정에서, 이론적 엄밀성과 완벽성을 추구하는 전개 방식을 지양하고, 쉽게 이해할 수 있고 전체적인 구도 파악이 쉽도록 하는데 주안점을 두고 설명하게 될 것이다. 본 논문에서는 크게, 복리 모형과 그 확률적 확장 방법, 옵션과 시장의 원리 등 기초적인 사항들에 대하여 먼저 언급하고, 다음으로 Black과 Scholes (1973)와 Merton (1973)의 이해를 위하여 필수적인 브라운운동 (Brownian motion)과 이또 적분 (Itô integral) 등의 성질을 필요한 범위 안에서 간략하게 정리한다. 또 블랙-숄즈 편미분방정식의 의미와 해결 방법 등에 대하여 살펴보게 될 것이다.

2. 금융시장과 옵션

이 절에서는 금융시장을 이해하는데 필수적인 개념과 용어 그리고 원리들에 대하여 살펴보게 된다. 먼저 기본적인 이자와 이자 계산 모형에 대하여 설명하고, 이의 연속-시간 형태로의 확장과, 확률적 잡음을 가진 이자 계산 모형으로의 확장 방법을 고려하게 될 것이다. 또한 금융시장 연구를 위한 기본 가정적 원리인 무재정원리의 의미에 대하여 살펴보고, 다음으로 옵션과 선물의 의미에 대하여 살펴보게 될 것이다.

2.1. 이자와 이자율

자금 사용에 대한 비용, 기한 (期限)연장을 위한 기회비용 (opportunity cost) 등의 개념으로 해석되는 이자 (interest)는 자본시장의 가장 중요한 기본 개념이다. 시장에서의 이자 계산 방식은 일부 예외적으로 단리법을 사용하는 경우를 제외하고는 복리법 (compound interest)이 기본이다. 특히 금융거래의 상황이 분 혹은 초 단위의 매우 짧은 시간 간격에 따라 영향을 받게 되는 금융시장의 경우에는 복리법을 확장한 연속복리법 (continuous compound interest)에 대한 고려가 필수적이다. 1년 동안의 이자율을 r이라 할 때, 복리법에 의하면 초기 자산 M_0가 n년 후에 $M_n = (1+r)^n M_0$가 된다. 연속복리법에서는 복리 계산의 단위시간간격 D가 매우 짧아지셔서 t시간이 지난 이후에 자산의 명목가치는

$$M_t = e^{rt} M_0 = \lim_{D \to 0} (1 + r\,D)^{t/D} M_0$$

가 된다. 복리법에 대하여는 차분 ($D\,M_n = M_{n+1} - M_n$) 을 구하고 연속복리에 대하여는 미분의 형태로 표현하면, $D\,M_n = rM_n$이고 $d\,M_t = rM_t\,dt$이 된다.

금융자산의 투자는 통제 불가능한 요인에 의한 위험에 노출되어 있다. 따라서 금융 자산의 수익은 자산 사용에 대한 순수 기회비용과 확률적으로 결정되는 위험요인 (risk)의 영향을 받는다. 위험요인이 있는 상황에서 어떤 금융자산의 명목가치를 복리법에 근거하여 차분 형태로 나타내면, 예를들어 가장 단순한 한 경우로

$$D\,S_n = (\mu + \sigma\epsilon_{n+1})S_n, \quad \epsilon_{n+1} \sim^{iid} N(0,1)$$

와 같이 표현할 수 있다. 이 때 위험요인은 $\sigma\epsilon_{n+1}$에 해당된다. 마찬가지 경우에, 위험요인을 갖는 자산의 명목가치의 변화를 연속복리법에 근거하여 미분의 형태로 표현하기로 한다면, 복리법의 경우와 유사하게

$$d\,S_t = (\mu dt + \sigma\epsilon_t^*)S_t$$

와 같은 형태로 표현될 것이라는 점을 짐작할 수 있다. 그러나 이러한 개념적 표현법은 연속-시간 확률과정 ϵ_t^*를 수리적으로 어떻게 정의해야 하는가의 문제에 부딪히게 된다. 이러한 개념을 수리적으로 정확하게 표현하고 설명하려면 연속-시간 확률과정 (continuous time random process)에 대한 기본적인 이해가 필요하므로 정확한 표현법과 그 관련 논의는 3절 이후로 미루기로 하자.

어떤 자산의 평균적 수익률이 μ라고 할 때, 이를 연속복리법의 형태로 표현하면 $E[S_t] = S_0e^{\mu t}$가 된다. 일반적으로 위험이 있는 자산에 대한 투자는 회피되는 경향이 있으므로, 자산의 기대수익률 μ는 순수 기회비용에 해당하는 이자율 r에, 위험보상비용 (risk premium)이 더해진 값을 갖게 될 것이다. 즉, 위험보상비용을 α라 할 때, 어떤 금융자산의 기대수익률 (expected yield)은 $\mu = r + \alpha$의 형태를 보이게 될 것이다.

위험요인이 없는 자산이 있다고 한다면, 그러한 자산의 수익률 μ에는 위험보상비용 α가 개입되지 않고, 순수 자금 사용에 대한 기회비용으로서의 이자율 r만이 개입되어 나타날 것이다. 위험이 전혀 없는 자산에 대한 수익률 r을 무위험수익률 혹은 무위험이자율이라 한다. 즉, $d\,M_t = rM_tdt + 0$과 같이 위험요인을 포함하지 않는 자산의 수익률 r을 무위험수익률이라 한다. 엄밀한 의미의 무위험자산이란 있을 수 없으나, 현실적으로 무위험에 가깝다고 평가되는 미국의 단기 국채 (U.S. Treasury bills)와 같이 무위험에 가까운 자산과 그 거래를 무위험으로 간주하고 이에 대한 수익률을 무위험수익률이라고 본다. 일반 금융시장에서는 런던 은행간 대출 이자율 (LIBOR)을 무위험수익률로 간주하는 경우가 많다.

어떤 자산의 명목가치 S_t는 시간상으로 변동하게 된다. 이러한 명목가치의 변동에서 실질가치의 변동을 파악하기 위해서는, 시간의 경과에 따르는 최소한의 기회비용에 해당하는 무위험이자율의 효과를 제거하고 판단하여야 한다. 이를 위해서 자산의 명목가치를 기준 시점 $t = 0$에서의 실질가치로 변환하는 방법으로, $S_t^r = e^{-rt}S_t$와 같이 무위험이자율로 할인한 값을 사용하기도 한다.

2.2. 무재정원리

미시경제학에서 거론되는 일물일가의 법칙은 (the law of one price) 특정 시점에서 동일 물건의 가격은 구매자에 무관하게 (indifferently) 하나의 가격으로 결정된다는 원리이다. 이 원리는 현실적 원리라기 보다는 시장이 완전경쟁 상태이고 정보의 흐름에 제약이 없다는 점 등의 이상적 시장 상황을 가정하는 경우의 이상적 원리이다.

금융자산에 대한 이자란 금융자산의 일정 기간의 사용에 대한 비용, 즉 가격의 의미를 갖는다. 그러므로 금융시장에도 마찬가지의 논리가 적용될 수 있다. 그러나 금융자산의 이자를 결정하는 수익률은 특정 시점에서 곧바로 결정되는 개념이 아니고 시간상으로 일정 기간의 경과를 요구하는 개념이다. 뿐만 아니라 금융자산은 수익률이라는 특성 이외에 위험요인이라는 특성도 함께 갖는다. 여기서 위험요인은 확률적 특성을 갖는 것으로 해석된다. 때문에 일물일가 (一物一價)의 원리를 확률적 위험요인과 시간적 경과의 개념이 있는 금융자산과 금융시장에 적용하려면 논리의 확장이 필요하다. 이를 확장 정리한 논리가 무재정원리이다. 보통 무재정원리를 'No free lunch' 혹은 '눈 먼 돈은 없다' 등의 용어로 함축적으로 표현하기도 한다. 무재정원리의 표현법은 다양하다. 블랙-숄즈 방정식도 그 의미를 따져보면 무재정원리의 한 형태라고 볼 수 있다. 무재정원리를 간단히 설명하면, 모든 금융자산에서 각 자산이 갖는 위험요인을 시장의 가격평가 방법에 따라 평가하여 제거하게 되면 그 수익률은 무위험수익률과 항상 같다라는 뜻이다. 여기서 핵심이 되는 사항은 위험요인을 제거할 때, 시장의 가격평가 기준에 따라 제거한다는 점이다. 모호한 내용을 좀 더 명확하게 하고자 수리적 표현법을 이용하여 설명하기로 하자.

위험요인을 갖는 금융자산 (S_t)과 무위험자산 (M_t)이 있다 하자. 금융자산이 갖는 확률적인 위험요인을 제거하는 방법으로는 기대치를 취하는 방법이 사용된다. 즉, 확률적 위험요인을 포함하는 S_t에 기대치를 취하여 얻어진 $E[S_t]$에는 확률적 위험요인이 개입되어 있지 않다. 또한, 무위험자산에는 처음부터 확률적 위험요인이 없었으므로 모든 $t \in [0,T]$에 대하여 $M_t = E[M_t]$인 관계가 성립한다. 현재시점을 $t=0$이라 할 때, 두 자산의 미래 시점 T까지의 기대수익에는 $E[S_T]/S_0 \geq E[M_T]/M_0$인 관계가 있어야 한다 (여기서 $E[M_T]/M_0 = e^{rT}$이다). 만약 그 반대가 되어 위험자산에 대한 수익률이 무위험자산에 비하여 낮다면, 시장에는 위험자산에 대한 투자를 회피하는 경향이 있어서 위험자산에 대한 거래가 이루어지지 않을 것이기 때문이다. 위험자산에 대한 시장의 회피경향은 위험자산에 대한 가치를 낮게 평가하게 할 것이다. 즉, 시장에는 위험을 회피하려는 가격평가 기준이 있고 이를 의미하는 확률측도 Q_0가 있어서 $E^{Q_0}[S_T]/S_0 \leq E[S_T]/S_0$인 특성을 나타낼 것이다. 또한, 위험요인에 대한 회피경향 등을 고려하여, 위험자산에 대한 가격평가가 시장에서 제대로 이루어진 것이라면, 일물일가의 원칙에 의하여, 위험요인이 제거된 $E^{Q_0}[S_T]/S_0$은 무위험자산의 수익 $E[M_T]/M_0$과 같아야 한다. 즉, $E^{Q_0}[S_T]/S_0 = E^{Q_0}[M_T]/M_0 = e^{rT}$이다. 또한, 이러한 관계식은 자산의 종류에 관계없이 성립해야 한다. 즉 시장 내의 모든 자산에 대하여 $E^{Q_0}[S_T]/S_0 = e^{rT}$인 성질을 만족하게 하는 확률측도 Q_0가 존재해야 한다.

이자율은 시차를 두고 발생하는 자산의 존재 시점에 따른 시간적 차이에 대한 시장

의 가격평가 기준을 나타내는 개념이다. 확률적 위험요인과 자산 존재 시점의 시간적 차이를 동시에 고려하여 이를 바로잡는 시장의 가격평가 기준이 있고 이를 의미하는 확률측도 Q가 있다고 하자. Q는 위험요인에 따라 수익률을 바로잡는 기능과 함께 자산 존재 시점의 차이에서 오는 자산의 명목가치의 차이를 바로잡는 역할을 동시에 하므로 $E^Q[M_T]/M_0 = 1$, 즉 $E^Q[M_T] = M_0$인 결과를 주게 될 것이고, 모든 자산들에 대하여 $E^Q[S_T] = S_0$인 성질을 만족하게 될 것이다. 동일한 의미를 현재시점을 $t = 0$이라고 가정하지 않고 일반적으로 표현하여, 모든 자산에 대하여 $E^Q[S_T|S_t] = S_t$인 마팅게일[3)] 성질을 만족하도록 하는 동일한 확률측도 Q가 존재한다라고 표현할 수 있다. 또 시장의 무위험이자율 r을 명시적으로 표현하는 것이 가능하다면 할인된 확률과정 S_t^r을 이용하여, 모든 자산에 $E^{Q_0}[S_T^r|S_t^r] = S_t^r$인 성질을 만족하는 동일한 확률측도 Q_0가 존재한다고 말할 수 있다. 이것을 무재정원리 (no arbitrage principle) 혹은 자산가격평가 제1기본정리 (the first fundamental theorem of asset pricing)이라고 한다.

시장에서 자산이 갖는 시간상 차이와 위험요인의 차이를 고려하여 시장가격을 매기는 역할을 하는 가격평가 확률측도 Q를 위험중립 (risk-neutral) 확률측도 혹은 동치마팅게일 (equivalent martingale) 확률측도라고 부른다. 자산가격평가 제1기본정리가 시장에서의 가격평가 작용을 의미하는 확률측도 Q의 존재성을 말하는 것이라면 자산가격평가 제2기본정리 (the second fundamental theorem of asset pricing)는 확률측도 Q의 유일성을 말한다. 일물일가의 원칙에서는 시장에서 가격이 하나라고 했던 것을 자산가격평가 제2기본정리에서는 금융시장에서 금융자산의 가격을 매기는 시장의 힘은 확률측도로 표현되고 그것은 유일하다고 말하는 것이다. 시장의 모든 자산에 대하여 $E^Q[S_T - S_t|S_t] = 0$이 되는 확률측도 Q가 유일하게 정의되는 경우를 시장이 완비 (complete)되었다고 말한다. 즉, 시장의 완비성은 무재정원리보다 강력한 조건이고, 완비된 시장에서 작동하는 가격평가 확률측도 Q는 유일하다. 완비성을 갖춘 시장에서는 서로 다른 무위험 포트폴리오 (portfolio, 투자분산전략)의 현재가치는 동일하다. 즉, 무위험자산에 대하여 일물일가의 법칙이 성립하려면 시장의 완비성 조건이 필요하다. 더욱 자세한 논의는 Harrison과 Kreps (1979), Harrison과 Pliska (1981) 등에서 찾을 수 있다.

2.3. 옵션과 가격

미래의 불확실성이 가진 확률적 성격을 이용한 투기적 수단으로 사용될 수 있다는 가능성이 있음에도 금융 파생상품이 도박 (gambling)과 뚜렷이 구별되는 이유는 금융 파생상품의 경우 헷징이라는 현실적으로 유익한 필요성을 갖고 있다는 점이다. 헷징 (hedging)이란 금융자산의 불확실한 미래 가치에서 오는 피해를 줄여줄 목적으로 행하는 제반 금융 행위를 말한다. 헷징의 대표적인 수단이 파생상품의 거래이다. 물론 파생상품 거래자의 상당수는 오히려 그 반대 측면, 즉 기초 자산 가치의 변동을 이용한 투자 혹은 투기를 위하여 파생상품을 거래하기도 한다. 주식 파생상품 거래의 목적은 미래 주식 가격의 급격한 변동으로부터 오는 자산의 손실을 막거나 혹은 이를 이용한 투

3) 마팅게일에 대하여는 3절에서 따로 언급한다.

자이다.

옵션의 특성을 가장 쉽게 이해하는 방법은 '주식 가격에 대한 보험'의 개념으로 주식 옵션을 이해하는 것이다. 예를 들어 주주총회에서의 의결권과 관련하여 2007년 12월 기준으로 A사의 주식을 1만 주 보유하고자 하는 사람 '갑'이 있다 하자. 갑의 자금 흐름에서 현재 (2007년 8월)에는 해당 주식을 매입할 자금여력이 없으나 2007년 12월에 7억 원의 수입이 잡혀 있으므로, 2007년 12월에 A 회사의 주가가 7만 원을 넘지 않는다면 갑은 A사의 주식 1만 주를 매입할 수 있을 것이다. 그러나 만약 2007년 12월 A사의 주가가 7만 원을 넘게 된다면 갑은 원하는 만큼의 주식을 구입할 수 없게 된다. 이런 경우 만약 누군가가 있어서 2007년 12월 A사의 1주당 주가와 7만 원의 차익을 보전해주기로 한다면, 갑은 A사의 주가 변동에 관계없이 2007년 12월 A사의 주식 1만 주를 매입하는 것이 가능해진다. 또 반대로 A사 주식 1만 주를 가진 사람 '을'이 있고, 어떤 이유가 있어 2007년 11월까지 주식을 보유해야 하고 2007년 12월에 그 주식을 이용하여 최소 7억 원 이상의 돈을 마련 해야 할 필요가 있다면, 을은 2007년 12월의 주식 가격이 7만 원 미만으로 떨어지는 경우에 누군가 그 차익을 보전해 줄 사람을 필요로 한다.

만약 미래 특정시점에서 어떤 주식의 시장가격이 미리 정해진 금액 이상으로 올랐을 때 그 차액을 보전해 주는 보험상품이 있다면, 갑은 당연히 해당 보험상품을 구매하고자 할 것이다. 주식 가격의 차액을 보전해 보전해 주는 보험의 역할은 미래의 특정 시점에서 해당 주식의 시장가격에 관계없이 그 주식을 미리 정해진 금액에 살 (call) 것인지 아니면 말 것인지를 결정할 수 있는 선택권리 (options, 옵션)를 주는 것과 같다. 이러한 콜옵션 (call option)을 가진 사람은 주가가 미리 정해진 가격보다 낮아진다면 그 권리 행사를 포기할 것이고, 주가가 정해진 가격보다 높아진다면 그 권리를 이용해서 시장가격보다 낮은 미리 정해진 가격에 주식을 매입할 수 있기 때문에 결국 정해진 가격이상으로 주가가 오르는 경우 그 차액을 보상받게 되는 것이다. 마찬가지로 위의 예에서 언급한 을의 경우에는, 미래의 특정시점에 미리 정해진 가격에 주식을 팔 (put) 것인지 말 것인지를 결정할 수 있는 선택권리를 갖고자 할 것이다. 이러한 풋옵션 (put option)은 미래 특정시점에서 주식의 시장가격이 미리 정해진 가격 이하가 되었을 때 그 차액을 보전해 주는 보험상품과 동등한 효과를 주게 된다. 이처럼 옵션 거래의 원래 목적은 자산의 가치 변동에서 오는 위험을 줄이기 위한 보험 (헷징)의 수단으로서 고려되었다. 옵션을 이용해서 주식을 사거나 팔 때 지급 해야 할 미리 정해진 금액을 행사가격이라 한다.

갑은 2007년 12월 기준 A사의 주식 1만 주에 대한 행사가격 7만 원인 콜옵션을 매입 (long)하고, 을은 동일한 조건의 풋옵션을 매입함으로써 보험계약을 맺는 것과 같은 효과를 얻게 된다. 즉, 콜옵션은 주가가 특정가격 이상으로 올랐을 때 그 차익을 보전받는 보험과 같고, 풋옵션은 주가가 특정가격 이하로 내렸을 때 그 차익을 보전받는 보험과 같다. 보험 계약자가 있다면 반대로 보험을 파는 보험사가 있어야 한다. 해당 옵션을 매입하는 하려는 사람들에게, 보험사의 입장이 되어 옵션을 판매하는 것을 옵션을 매도 (short) 한다고 한다. 파생상품 시장은 콜옵션과 풋옵션이라는 보험계약 상품을 거래하는 시장과 같은 역할을 한다.

옵션의 만기시점을 T라고 표시하고 (앞의 예에서는 2007년 12월), 그 시점에서 A사

의 주가를 S_T라고 나타내기로 할 때, 콜옵션을 보유한 사람이 만기시점에서 얻게되는 수익은 S_T가 높을수록 커지게 되나, 주식가격 S_T가 행사가격 K보다 (앞의 예에서는 7만 원) 낮은 가격으로 결정되는 경우는 해당 옵션으로 얻는 수익이 하나도 없다. 즉, 콜옵션을 구입한 사람이 만기시점에 얻게 되는 수익은 $(S_T - K)^+$라고 표현된다. 여기서 x^+의 의미는 $\max(x, 0)$이다.

콜옵션이나 풋옵션을 매입하거나 매도한 사람들의 만기시점에서의 수익구조는 마찬가지로 만기시점의 주가 S_T와 행사가격 K의 함수로 나타나는데 이와 같은 만기시의 수익구조를 F_T라고 하면, 함수 F_T의 형태는 콜옵션이냐 풋옵션이냐 매도냐 매수냐에 따라 각기 다른 형태로 나타난다. 콜옵션을 매도한 경우는 $F_T = -(S_T - K)^+$이고, 풋옵션을 매입, 매도한 경우는 각각 $F_T = (K - S_T)^+$와 $F_T = -(K - S_T)^+$인 형태를 갖는다. 그림 2.1은 이런 관계를 나타낸 것이다.

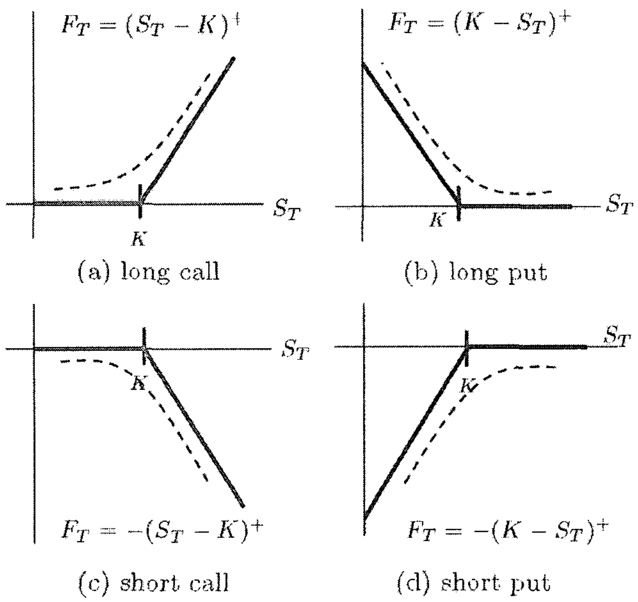

그림 2.1: 콜옵션과 풋옵션의 매도 (long)와 매수 (short)에 따른 만기 수익구조

옵션은 그 행사 시기에 따라 유럽형 옵션과 미국형 옵션으로 구분된다. 유럽형 옵션의 행사시기는 해당 옵션의 만기시점인 T로 고정되어 있는데 반하여, 미국형 옵션은 그 옵션 행사시기가 매입시점에서 만기시점 사이의 어떤 시점에서도 옵션 보유자의 의향에 따라 행사가 가능하다. 미국형 옵션은 행사시점을 보유자 의향에 따라 선택할 수 있다는 장점 때문에 그 만기수익이 유럽형 옵션보다 크게 나타난다. 위의 그림 2.1에서 굵은 점선은 미국형 옵션의 만기 수익구조를 나타낸 것이다. 시장에서 거래되는 옵션의 대부분은 미국형 옵션이다. 그러나 미국형 옵션의 수리적 성질을 이해하기 위하여는, 유

럽형 옵션 연구에 필요한 이론에 더하여 선택적 정지시간 (optional stopping time) 이론 등의 더욱 복잡한 고려 사항들이 필요하므로 본 논문에서는 기본적으로 유럽형 옵션을 중심으로 논의를 진행한다. 통계에 의하면 미국형 옵션중 만기 이전에 옵션을 행사를 하는 경우는 5% 미만이라고 한다.

어떤 사람 '병'이 만기시점이 T이고 행사가격이 K인 A사 주식에 대한 콜옵션을 1단위 매입하고, 또 풋옵션을 1단위 매도했다고 하자. 이때 병이 만기시점에서 얻게 되는 수익구조는 위의 그림 2.1에서 (a)와 (d)를 더한 형태로 나타날 것이다. 즉 $F_T = (S_T - K)$이다. 이런 만기 수익구조는, A사의 주식을 미래 시점 T에서 시장주가 S_T와 관계없이 정해진 가격 K로 팔기로 미리 계약을 맺은 사람이 얻게 되는 수익구조와 동일하다. 또, 반대로 동시에 콜옵션을 매도하고 풋옵션을 매입한 경우를 고려해 보자. 이때의 만기 수익구조는 $F_T = K - S_T$로 나타나게 될 것이다. 이러한 형태의 만기 수익구조 $F_T = S_T - K$나 $F_T = K - S_T$를 갖는 거래는, 미래 T시점의 상품 (미래 시점의 주식)을 미리 정해진 가격 K에 거래하기로 계약하는 상황에 해당한다. 이와 같은 계약을 선물 계약이라고 한다. 콜옵션과 풋옵션을 결합하여 선물계약과 같은 효과를 낼 수 있다는 점을 풋-콜 짝짓기 (put-call parity)라고 한다.

금융 파생상품 거래에서 가장 큰 과제는 파생상품의 가치를 어떻게 파악할 것이고, 시장에서 파생상품의 가격을 어떻게 산정할 것인가 하는 점이다. 즉, 위에서 설명한 바와 같이 콜옵션이나 풋옵션을 거래하는 경우 매입위치 (long position)을 취하는 사람은 매도위치 (short position)을 취하는 사람에 비하여 항상 유리하다. 위에서 설명한 만기 수익구조를 보자. 매입위치에 있는 사람은 만기시 수익이 항상 0 이상이고, 매도위치에 있는 사람은 만기시 수익이 항상 0 이하이다. 그래서 옵션을 매입하고자 하는 사람은 매도하고자 하는 사람에게, 거래의 양 당사자가 만족할 만한 적절한 보상을 하여야 거래가 성립될 수 있을 것이다. 이러한 보상액이 옵션의 가격이다. 옵션을 보험의 개념으로 이해하는 경우, 옵션의 만기수익은 보험금에 해당하고, 옵션의 가격은 보험계약자가 보험회사에 지급하여야 할 보험료와 동일한 개념이다. 여기서 한 가지 주의해야 할 점은, 미래시점의 주가 S_T와 옵션의 행사가격 K의 지급 기준 시점은 미래시점인 T인데 반하여, 옵션의 가격을 산정하는 기준 시점은 옵션의 거래가 이루어지는 현재시점 t (위의 예에서는 2007년 8월) 이다. 지급 기준 시점이 서로 다른 금액의 비교를 위해서는 이자율에 의한 할인이 필요하다. 콜옵션에 대하여, 현재시점의 주가 S_t가 행사가격 K보다 크게 되면, 즉 $S_t > K$이면 내가격 (in-the-money) 상태에 있다고 하고, $S_t = K$이면 등가격 (at-the-money) 상태, 반대로 $S_t < K$이면 외가격 (out-of-the-money) 상태에 있다고 한다. 풋옵션에 대하여는, $S_t > K$이면 외가격 상태라고 하고 $S_t < K$이면 내가격 상태라고 한다.

옵션의 공정한 가격을 얼마로 해야 하는 지에 대하여 가장 확실한 답을 제시한 것이 1973년에 발표된 블랙-숄즈 (Black-Scholes) 공식이다. 앞서, 선물은 풋-콜 짝짓기에 따라서 풋옵션과 콜옵션의 결합으로 해석이 가능하다고 하였으므로 옵션의 가격 산정이 가능하다면, 선물의 가격 산정도 가능해진다. 풋옵션의 가격 산정이나 콜옵션의 가격 산정이나 그 과정에 큰 차이가 없으므로 한쪽을 이해한다면 다른 한쪽도 이해가 가능하

다. 그러므로 이후에는 콜옵션을 중심으로, 블랙-숄즈 공식에서 그 가격을 어떻게 결정하게 되는지에 대하여 살펴보게 된다. 다음 절에서는 먼저 블랙-숄즈 공식을 이해하는데 필요한 브라운운동을 중심으로 한 연속-시간 확률과정과 그 미적분에 대하여 간단히 살펴보기로 한다.

3. 연속-시간 확률과정

여기서는 브라운운동, 백색잡음 등의 연속-시간 확률과정에 대한 기본적인 사항과 이또 미적분과 관련된 사항들을 살펴보게 될 것이다. 마팅게일과 이또 포뮬러 등 블랙-숄즈 공식의 해석에 필수적인 내용을 중심으로 정리하게 된다.

3.1. 백색잡음, 브라운운동, 기하브라운운동

통계학에서 다루는 통계모형 중에서 가장 단순하고 간단한 모형은, 표준정규분포로부터의 확률표본들이 이루는 모형으로, $\epsilon_u \sim^{iid} N(0,1)$, $u = 1, 2, \ldots$와 같이 표현된다. 여기서 iid의 의미는 확률변수 ϵ_u들이 서로 독립이고 동일한 분포를 따른다는 의미이다. 이때, $W_n = \sum_{u=1}^{n} \epsilon_u$로 정의되는 W_n을 확률보행 (random walk) 과정이라 부른다. 확률보행과정 W_n은 평균이 0이고 분산이 n인 정규분포 $N(0,n)$을 따르고, $\text{Cov}(W_n, W_k) = \min(n,k)$인 성질을 만족한다. 역으로, 확률보행과정 W_n을 차분하여 얻어지는 $DW_n = W_{n+1} - W_n$, $n = 0, 1, \ldots$은, iid인 특성을 갖고 결국 $\epsilon_n = DW_n$, $n = 1, 2, \ldots$인 관계가 있음을 살펴볼 필요가 있다.

브라운운동은 Wiener 확률과정이라고도 불리며 개념적으로는 확률보행과정에서 보행에 필요한 단위시간간격 D를 매우 작게 했을 때 얻어지는 확률과정이다. 그러나 확률보행과정의 극한과정으로써 브라운운동을 정의하다 보면 수리적으로 어려움을 만나게 된다. 이를 피하고자, 공리적 방법으로, 안정증분 (stationary increment)과 독립증분 (independent increment)을 갖는 연속-시간 확률과정 중 연속형 분포를 (결국은 정규분포를) 갖는 확률과정을 브라운운동이라고 정의한다. W_t를 브라운운동이라 할 때, 별다른 언급이 없다면 $W_0 = 0$인 것이 가정된다. 브라운운동은 시간연속성을 갖는다. 즉, 확률과정 W_t의 표본경로는 (t의 함수로서 살펴본 W_t는), 모든 $t \in [0, \infty)$에서 연속이다. 반면 W_t의 표본경로는 모든 $t \in [0, \infty)$에서 미분 불가능한 특성을 갖는 것으로 알려져 있다. W_t는 $N(0,t)$인 분포를 하고, $\text{Cov}(W_t, W_s) = \min(t,s)$인 특성이 있다. 브라운운동 확률과정이 갖는 시간연속성 조건을 약화하여 얻어지는 Lévy 확률과정은, 독립증분과 안정증분의 성질을 가지면서 확률적시간연속성을 만족하는 확률과정으로 정의된다. 어떤 확률과정 L_t가 $t \to s$일 때, $P(|L_t - L_s| > \epsilon) \to 0$인 조건을 만족하면 L_t는 확률적시간연속성을 만족한다고 한다. Lévy 확률과정은 브라운운동 확률과정, 이산형 분포를 갖는 포아송 확률과정 등을 포함한다.

이산-시간 모형의 경우에서 차분의 시간 단위는 1이었으나, 연속복리법에서와 같은 연속-시간 모형에서의 차분을 위해서는 단위시간간격 D를 이용하여,

$$DW_n = W_{(n+1)D} - W_{nD}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

와 같이 차분을 정의하기로 하자. 안정증분과 독립증분의 조건은, 브라운운동 확률과정을 일정한 단위시간간격 D로 차분할 때 얻어지는 확률변수들 DW_n, $n = 1, 2, \ldots$이 iid임을 말하는 것이다. 안정증분 조건은 DW_n들이 동일한 분포를 따른다는 의미이고, 독립증분 조건은 DW_n들이 서로 독립이라는 의미이다. 단위시간간격 D가 매우 작아지는 경우의 차분된 확률과정 DW_n을 미분 형식을 빌어 dW_t라고 표현한다. dW_t를 보통 백색잡음 (white noise) 확률과정이라고 하고, $\epsilon_u \sim^{iid} N(0,1)$, $u = 1, 2, \ldots$인 (표준정규분포) 확률표본 모형이 연속-시간형으로 확장된 확률과정으로 본다. 다만, 백색잡음 확률과정 dW_t에 대하여는 정규분포를 따른다는 가정을 굳이 하지 않더라도, 중심극한 정리에 의하여 그 적분형으로 얻어지는 $W_t = \int_0^t dW_u$가 정규분포 $N(0, t)$를 따른다는 것을 알 수 있다. 그림 3.1은 확률표본, 확률보행, 브라운운동, 백색잡음 사이의 관계를 정리하여 도식화한 것이다.

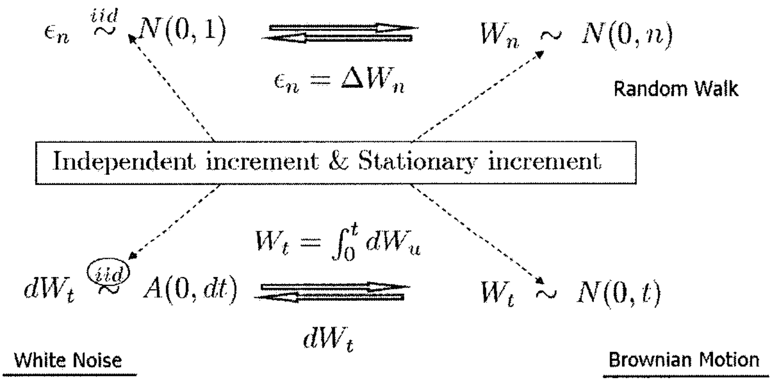

그림 3.1: 브라운운동과 백색잡음

앞서 2.1 절에서 위험요인이 있는 자산을 연속복리법에 따라 계산하기로 할 때 그 관계식을 차분 형태로 $dS_t = (\mu dt + \sigma\epsilon_t^*)S_t$와 같이 표현한 적이 있다. 그러나 이를 수리적으로 정확하게 표현하려면 ϵ_t^*대신에 백색잡음 dW_t를 사용하여

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{3.1}$$

와 같이 나타내어야 한다. 이렇게 정의된 확률과정 S_t를 기하브라운운동 (Geometric Brownian Motion; GBM)이라 한다. 기하브라운운동을 처음 소개한 것은 Samuelson (1965)에 의해서였고, 그 이후 블랙-숄즈 모형에서도 동일한 방법이 사용되었다.

일반적으로, 추세함수 $\mu_t = \mu(S_t)$와 확산함수 $\sigma_t = \sigma(S_t)$를 어떻게 정의하느냐에 따라 확률 미분방정식

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \tag{3.2}$$

의 형태로 표현되는 확률과정 S_t는 매우 다른 성질을 나타낸다. $\mu_t = \beta S_t + \gamma$이고 $\sigma_t = \sigma$일 때의 S_t를 Ornstein-Uhlenback (OU) 확률과정이라 하고, 이를 금융분야에서는 Vasicek 모형, 물리학에서는 Langevin 방정식 등의 이름으로 부른다. 또, $\mu_t = \beta S_t + \gamma$이고 $\sigma_t = \sigma\sqrt{S_t}$일 때를 Feller의 제곱근 확률과정이라 하고, 금융분야에서는 Cox-Ingresoll-Ross (CIR) 모형으로 부르기도 한다.

3.2. 이또 미적분과 마팅게일

통계학 학습과정에서 어떤 확률변수열 X_i에 대한 가중합 $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$를 구하는 작업은 매우 자주 나오게 된다. 만약 이런 과정을 연속-시간 확률과정의 경우로 확장하는 것을 생각해 보자. 앞서 위험요인이 있는 경우의 복리계산법을 차분 형태로 표현하면 $D\,S_n = (\mu + \sigma\epsilon_{n+1})S_n$와 같이 됨을 보았다. 이때 어떤 이유로 $\sum_{n=1}^{N} e^{-rn} S_n(D\,S_n)$인 값을 계산해야 한다고 하자. 또, 복리계산에서 단위시간간격 D가 매우 짧아져서 0에 가까워질 때 위의 값들은 어떻게 될 것인지를 생각해 보자. 비슷한 상황에서, 연속-시간 모형인 기하브라운운동 S_t의 표본경로에 대한 적분형태로 정의되는 $\int_0^T e^{-rt} S_t dS_t$를 계산해야 한다고 해보자. 이러한 형태의 연속-시간 확률과정의 표본경로를 이용한 적분을 하려면, 연속-시간 확률과정의 가장 단순한 형태인 브라운운동 W_t의 표본경로를 이용한 적분 $\int_0^T f(W_t)dW_t$를 어떻게 정의해야 할 지에 대한 검토가 필요하다.

브라운운동의 표본경로를 이용한 적분의 정의에는 잘 알려진 Itô (1915-현재)의 정의 외에 러시아의 수학자 Stratonovich (1930-1997)가 정의한 방법이 있다. 이들을 함께 설명하는 것은 이또의 적분법의 의미를 대비적으로 살펴볼 수 있는 좋은 방법이다. 이와 함께 t에 대한 비확률적 함수 w_t가 있다고 하고, 이에 대한 Rieman-Stieltjes 적분법을 대비적 함께 살펴보기로 하자. Stratonovich 적분법을 특별히 $\int_0^T f(W_t) \circ dW_t$라고 표현하여 이또의 적분법을 의미하는 $\int_0^T f(W_t)dW_t$와 구별하기로 하자. 각각의 정의는 다음과 같다. 이또의 적분법에서는 구간 $[t, t+D]$사이를 대표하는 $f(\cdot)$값으로, 구간 좌측에서의 값 $f(W_t)$를 이용하고, Stratonovich 적분법에서는 구간의 중간에서의 값 $f(W_{t+D/2})$를 이용한다. 비확률적 함수를 다루는 Rieman-Stieltjes 적분법에서는 w_c와 $f(w_c)$가 불연속이 되지 않는 구간내의 임의의 점 $c \in [t, t+D]$을 선택하는 것이 가능하다.

$$
\begin{aligned}
\int_0^T f(W_t)dW_t &=^{L^2} \lim_{D\to 0} \sum f(W_t)(W_{t+D} - W_t), \\
\int_0^T f(W_t) \circ dW_t &=^{L^2} \lim_{D\to 0} \sum f(W_{t+D/2})(W_{t+D} - W_t), \\
\int_0^T f(w_t)dw_t &= \lim_{D\to 0} \sum f(w_c)(w_{t+D} - w_t), \quad c \in [t, t+D]
\end{aligned}
$$

다음의 그림 3.2는 브라운운동 표본경로에서 정의되는 이또 적분의 정의와 Stratonovich 적분의 정의의 차이를 보여주고 있다. 구체적으로 $f(x) = x$인 경우를 예로 들어 살펴보

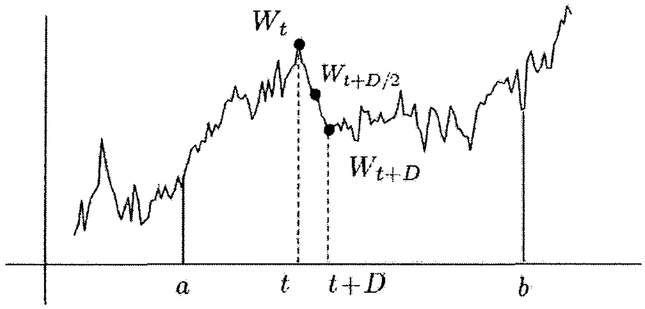

그림 3.2: 확률 적분법의 비교

면, $w_0 = 0$이라 할 때, $\int_0^T w_t dw_t = (1/2)w_T^2$이고 $\int_0^T W_t \circ dW_t = (1/2)W_T^2$인데 반하여,

$$\begin{aligned}
\int_0^T W_t dW_t &= \lim_{D\to 0} \sum_{j=1}^{[T/D]} W_{(j-1)D}(W_{jD} - W_{(j-1)D}) \\
&= \lim_{D\to 0} \sum_{j=1}^{[T/D]} (1/2)[(W_{jD}^2 - W_{(j-1)D}^2) - (W_{jD} - W_{(j-1)D})^2] \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)(W_T^2 - T)
\end{aligned}$$

이다. 즉, 적분 경로가 비확률적 함수로 주어지는 경우에는 적분 과정의 작은 구간 $[t, t+D]$내에서 함수 값 $f(\cdot)$를 대표 시키기 위하여 사용하는 $f(w_c)$를 결정할 때, $c \in [t, t+D]$를 어떻게 정하느냐에 따라 그 값이 달라지지 않지만, 적분 경로가 브라운운동과 같이 확률적으로 결정된 경우에는 그 결과에 차이가 난다.

그러면 왜 이또는 구간 좌측의 값을 기준으로 적분법을 정의하였을까? 이또가 이런 적분법을 고려한 까닭은, 확률적 특성이 있는 시스템에 대한 순간적 제어를 연속적으로 수행하는 경우 어떤 결과가 일어나는지를 알아보는데 필요한 적분법이라고 생각했기 때문이다. 예를 들어 순항미사일 시스템의 위치를 제어하고자 하는 경우를 생각해 보자. 그 위치에 확률적 성분 W_t가 포함되어 있다면 위치제어를 위하여 그에 필요한 함수 $f(W_t)$를 계산하고 제어를 하게 될 것이다. 그 과정에서 시스템의 위치에는 $W_{t+D} - W_t$만큼의 변화가 일어나게 되므로, 다시 반복적인 제어작업이 필요해진다. 이처럼 순간적 제어를 연속적으로 수행했을 때 그 종국적 결과를 알아보려 할 때 이또의 적분법에 의한 계산이 필요해진다.

이또 적분법은 다른 적분법들과 마찬가지로 마땅히 가져야 할 좋은 성질들, 예를 들면 선형성이나 구간가법성 등의 좋은 성질을 갖는다. 그러면 다른 적분법들에 비하여 이또 적분법이 갖는 장점은 무엇일까? 그 대표적인 답은 이또 적분과 마팅게일과의 관계에서 찾을 수 있다. 마팅게일 (martingale)의 사전적 의미를 우리말로 번역하면 '곱태우기'다. 도박에서 베팅 방법을 말하는 용어다. 그러나 확률론에서 마팅게일의 정의는, 어떤

확률과정 V_t가 있을 때, 모든 $T \geq t$에 대하여, $E[V_T|V_t] = V_t$인 성질을 만족할 때, V_t는 마팅게일이다라고 말한다. 마찬가지로, $E[V_T|V_t] \geq V_t$이면 열마팅게일 (submartingale)이라 하고, $E[V_T|V_t] \leq V_t$이면 우마팅게일 (supermartingale)이라고 부른다. 열마팅게일은 현재시점에서 미래시점을 고려할 때 그 기댓값이 현재보다 커질 것으로 예상되는 경우이고, 우마팅게일은 그 기댓값이 현재보다 줄어들 것으로 예상되는 경우이다. 마팅게일은 그 기댓값이 현재와 같아 질 것으로 예상되는 경우이다. 확률보행과정이나 브라운운동은 전형적인 마팅게일의 예이다.

이또 적분법의 가장 큰 특징 중의 하나는, 이또 적분의 형태를 이용하여 정의한 $I_t = \int_0^t f(W_u)dW_u$는 항상 마팅게일이 된다는 점이다. 또한, 역으로 어떤 확률과정 V_t가 마팅게일이라면 V_t는 이또 적분을 이용하여 표현할 수 있어야 한다는 점이다. 즉, $V_t = V_0 + \int_0^t \sigma(W_u)dW_u$를 만족하는 $\sigma(W_u)$가 항상 존재한다는 것이다. 더욱 줄여 표현하면, V_t가 마팅게일이라면, $dV_t = \sigma(W_t)dW_t$인 $\sigma(W_t)$가 항상 존재한다. 이를 마팅게일 표현정리 (martingale representation theorem)라 한다. 마팅게일 표현정리에 의하면, (3.1) 과 같이 정의된 기하브라운운동 S_t가 마팅게일이 되기 위한 필요충분조건은 추세모수 μ가 0 이다는 (즉, $\mu = 0$) 의미이다. 이를 이용하여, 이또 적분의 표현법을 확장하는 것이 가능하다. V_t가 마팅게일이라면, $dV_t = \sigma(W_t)dW_t$이므로 $C_t = \int_0^t b(V_u)dV_u$와 같이 V_t의 경로를 따라 적분 형태로 표현하는 것도 결국 이또 적분법에 의한 해석이 가능하다. 또, 어떤 확률과정 C_t가 마팅게일인 V_t의 함수, 즉 $C_t = C(V_t)$라고 하자. 이때 만약 C_t도 마팅게일이 된다면, $dC_t = b(V_t)dV_t$인 $b(V_t)$가 항상 존재하고, $C_t = C_0 + \int_0^t b(V_u)dV_u$이다.

이또 미적분 (Itô calculus)에서 가장 핵심이 되는 사항은 $(dW_t)^2 = dt$로 표현되는 관계이다. 이에 대한 정확한 표현은

$$\int_0^T (dW_t)^2 = \int_0^T dt = T$$

인 관계를 말한다. 이러한 관계가 성립하는 것은, $V(T,D) = \sum_{j=1}^{[T/D]}(D\,W_j)^2$라고 할 때, $\int_0^T (dW_t)^2 =^{L^2} \lim_{D\to 0} V(T,D)$이기 때문이다. 즉, $\lim_{D\to 0} E[V(T,D) - T]^2 = 0$이다 (여기서 $[x]$는 x를 초과하지 않는 최대 정수를 말한다). 이에 대한 증명들은 관련 수학 서적에 잘 나와 있다. 이또 미적분에서의 수렴의 개념은 Hilbert 함수 공간상에서의 수렴의 개념으로 파악되므로 기본적으로 L^2수렴의 개념이 사용된다. 통계학 전공자들이 $(dW_t)^2 = dt$가 되는 관계를 좀 더 쉽게 이해할 수 있는 방법으로, $D \to 0$대신에 $T \to \infty$인 경우를 고려해보자. 브라운운동의 특성상, $(DW_j) \sim^{iid} N(0,D)$이므로, $(DW_j)^2 \sim^{iid} D\chi^2(1)$인 관계가 있다. 즉, $(DW_j)^2$은 평균이 D이고 분산이 $2D^2$인 자유도 1인 카이제곱 분포를 따른다. 이때, T가 D에 비해 매우 커서 $[T/D]$가 충분히 크다면, 강대수법칙에 의하여, $[T/D]^{-1}\sum_{j=1}^{[T/D]}(DW_j)^2 \simeq^{w.p.1} D$와 같이 될 것이다. 따라서 $\sum_{j=1}^{[T/D]}(DW_j)^2 \simeq^{w.p.1} [T/D]\,D \simeq T$인 관계를 볼 수 있다. 강대수법칙에 의한 이러한 해석은, $\lim_{D\to 0} V(T,D) =^{L^2} T$가 되는 엄밀한 논리를 제공해주지는 못하지만, 매우 손쉽게 그 값이 T가 될 수밖에 없는 이유를 짐작할 수 있게 한다. 참고로, $\int_0^T (dW_t)^2 = T$이지만, $\int_0^T d(W_t^2) = W_T^2$은 규모모수가 T이고 자유도가 1인 카이제곱분포 $T\chi^2(1)$를 따르는 확률변수가 된다는 점은 구별해서 살펴볼 필요가 있다.

블랙-숄즈 공식과 관련하여 이또의 미적분법이 직접 적용되는 방식은 이또 포뮬러(formula)라고 알려진 다음 관계식에 의해서이다. $(dW_t)^2 = dt$와 마찬가지 방법으로 $(dt)(dW_t) = 0$이고 $(dt)^2 = 0$임을 확인할 수 있다. 이를 이용하면, 식 (3.2)에 의하여 정의되는 확률과정 S_t에 대하여,

$$(dS_t)^2 = (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 = \sigma_t^2 (dW_t)^2 = \sigma_t^2 dt$$

임을 알 수 있다. 여기서 S_t에 대한 어떤 함수 $f(t, S_t)$의 미분소 $df(t, S_t)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} df(t, S_t) &= \dot{f}_t dt + \dot{f}_s dS_t + \left(\frac{1}{2}\right) \ddot{f}_{ss} (dS_t)^2 \\ &= [\dot{f}_t + \mu_t \dot{f}_s + \left(\frac{1}{2}\right) \sigma_t^2 \ddot{f}_{ss}] dt + \sigma_t \dot{f}_s dW_t \end{aligned} \tag{3.3}$$

여기서 $\dot{f}_t = \dot{f}_t(t, S_t) = (\partial/\partial t) f(t, s)|_{t,S_t}$이며, $\dot{f}_s = \dot{f}_s(t, S_t) = (\partial/\partial s) f(t, s)|_{t,S_t}$이고 $\ddot{f}_{ss} = \ddot{f}_{ss}(t, S_t) = (\partial^2/\partial s^2) f(t, s)|_{t,S_t}$이다. 예를 들어, $dY_t = \mu dt + \sigma dW_t$라하고, $f(t, Y_t) = e^{Y_t}$라고 하자. 이때, $Y_t = \mu t + \sigma W_t$이 고

$$d\, e^{Y_t} = df(t, Y_t) = (\mu + \sigma^2/2) e^{Y_t} dt + \sigma e^{Y_t} dW_t$$

인 관계가 있다. 이를 비확률적 함수 y_t의 경우에는 $de^{y_t} = e^{y_t} dy_t$인 관계가 성립하는 것과 비교해볼 필요가 있다. 또, $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$이고, $f(t, Y_t) = \log S_t$ 라하여 이또 포뮬러를 적용하면,

$$d \log(S_t) = \left(\frac{1}{S_t}\right) dS_t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_t^2}\right)(dS_t)^2 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dW_t$$

가 되는 것도 함께 살펴볼 필요가 있다.

4. 블랙-숄즈 옵션 가격 모형

옵션의 가격을 결정하기 위한 블랙-숄즈의 방법을 살펴보기로 하자. 콜옵션을 기준으로 하여 설명하기로 하자. 콜옵션의 만기 수익구조는 $F_T = (S_T - K)^+$이다. 먼저, 연속-시간 확률과정이 갖는 수리적 어려움을 덜고자, 이산-시간 모형에서 블랙-숄즈의 아이디어를 설명하고, 이를 연속-시간 확률과정으로 변환하는 과정에서 발생하는 차이점을 살펴보기로 하자.

4.1. 이산-시간 모형

여기서는 시간변수 t가 단위시간간격 D의 배수인 값만을 갖게 되는 이산-시간 모형을 고려한다. 먼저 어떤 기초자산과 그 자산에 대한 콜옵션이 있다 하자. 현재 시점 $t = nD$를 기준으로 해당 기초자산과, 만기가 $T = ND$인 콜옵션의 현재가격은 각각 S_n이고 $F_n = F(nD, S_n)$이다. 어떤 사람 A는 해당 기초자산과 콜옵션에 P_n만큼의 자금

을 투자하기로 하고, 그 비율을 적당한 값 θ를 기준으로 하여, $P_n = F_n + \theta S_n$가 되도록 하기로 하였다. 단위시간간격 D만큼의 기간이 지나 $t = nD + D$가 되었을 때 기초자산의 가격 S_{n+1}은 여러 가지 불확실성에 의하여 발생하는 위험요인들에 영향을 받아 변동하게 될 것이다. 자산가치의 변화를 꺼리는 A의 투자전략은 자신이 구성한 포트폴리오가 가능한 불확실한 위험에 노출되지 않도록 (혹은 이를 최소한으로 줄일 수 있도록) θ를 조정하는 것이다.

A가 이처럼 투자할 때 D기간 후 자산의 증분 $DP_n = P_{n+1} - P_n$은 F_n의 증분 $DF_n = F_{n+1} - F_n$과 S_n의 증분 $DS_n = S_{n+1} - S_n$에 따라, $DP_n = DF_n + \theta DS_n$가 될 것이다. 이때, 콜옵션의 현재가격을 결정하는 함수 $F(t,s)$는 두 변수 t와 s의 함수이다. 즉 $t = nD$이고 $s = S_n$일 때, 함수 $F(t,s)$의 값이 해당 콜옵션의 현재가격 $F_n = F(nD, S_n)$이 되는 것이다. 변수 s는 S_n으로 일정하고, 변수 t만 nD에서 $nD+D$로 변화하는 경우 $F(t,s)$의 변화는 $D_tF_n = [F(nD+D, S_n) - F(nD, S_n)]$와 같이 될 것이고, $t = nD$는 일정하고 변수 s만 S_n에서 S_{n+1}로 변화하는 경우 $F(t,s)$의 변화는 $D_sF_n = [F(nD, S_{n+1}) - F(nD, S_n)]$와 같이 될 것이다. 현재시점 nD에서 $(n+1)D$시점까지에서의 콜옵션의 가격변화 $DF_n = F(nD + D, S_{n+1}) - F(nD, S_n)$은 D_tF_n과 D_sF_n의 합으로 근사될 수 있을 것이다. 즉, $DF_n \approx D_tF_n + D_sF_n$이다 (이는 단위시간간격 D가 작을수록 잘 근사된다). 이를 정리하면, $DP_n \approx D_tF_n + D_sF_n + \theta DS_n$와 같이 쓸 수 있다. 이때, $\tilde{\Delta}_S$를 콜옵션 가격 F_n의 기초자산 가격 S_n에 대한 한계변화량이라고 하자. 즉 $\tilde{\Delta}_S = [F(nD, S_{n+1}) - F(nD, S_n)]/DS_n$이라 하자. 그러면 $D_sF_n = \tilde{\Delta}_S\, DS_n$이다. 여기서 $\tilde{\Delta}_S$의 값이 매우 정확한 정도로 $\bar{\Delta}_S = [F(nD, S_n) - F(nD, S_{n-1})]/DS_{n-1}$로 근사된다고 하자. 그러면 $D_sF_n \doteq \bar{\Delta}_S DS_n$가 된다. 이를 적용하여, DP_n을 다시 정리하면,

$$DP_n \approx D_tF_n + \bar{\Delta}_S DS_n + \theta DS_n$$

와 같이 나타난다. 이때, $\theta = -\bar{\Delta}_S$라고 하자. 그러면 $DP_n \approx D_tF_n$와 같이 된다. 여기서 $D_tF_n = [F(nD + D, S_n) - F(nD, S_n)]$에는 S_n만 개입이 되고, 불확실성을 포함하는 S_{n+1}은 개입되어 있지 않음을 주목할 필요가 있다. 즉, $\theta = -\bar{\Delta}_S$라 하면, nD시점에서 $nD + D$시점 사이에 자산 P_n의 증분 DP_n은 더 이상 확률적인 특성을 갖지 않는 값 D_tF_n으로 근사될 수 있다.

이때 어떤 사람 B는 같은 기간에 동일한 금액 $P_n = F_n - \bar{\Delta}_S S_n$을 수익률 r인 무위험자산에 투자하였다고 하자. 무위험자산에 의한 수익은 $DP_n = rP_n$인 관계가 성립하므로 $DP_n = r[F_n - \bar{\Delta}_S S_n]$이 된다. 여기서 무재정원리를 적용하면 두 사람 A와 B가 해당기간 동안 무위험으로 올린 수익은 (근사적으로) 동일해야 한다. 즉,

$$r[F_n - \bar{\Delta}_S S_n] \approx D_tF_n$$

이다. 이산-시간 모형에서 사용되는 근사식을 정확한 관계식으로 표현하기 위해서는 연속-시간 모형에 대한 고려가 필요하다.

4.2. 연속-시간 모형과 동적헷징

먼저 이산-시간 모형과의 비교를 위하여, 연속-시간 모형하에서의 블랙-숄즈 편미분

방정식을 정리해 보면 다음과 같다.

$$r[F_t - \dot{F}_s S_t] = \left[\dot{F}_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \ddot{F}_{ss}\right]. \tag{4.1}$$

여기서 시점 t에서의 기초자산의 가격 S_t는 식 (3.1)을 만족하는 기하브라운운동 확률과정 이라고 가정되고, 옵션의 가격은 $F_t = F(t, S_t)$이고, 옵션의 만기기점에서의 가격은, 콜옵션을 가정하므로, $F_T = (S_T - K)^+$이다. 함수 $F(t,s)$의 편도함수 들은 $\dot{F}_t = (\partial/\partial t)F(t,s)|_{t,S_t}$, 이고 $\dot{F}_s = (\partial/\partial s)F(t,s)|_{t,S_t}$와 $\ddot{F}_{ss} = (\partial^2/\partial s^2)F(t,s)|_{t,S_t}$으로 정의되었다.

이산-시간 모형의 경우와 비교하면, 이산-시간 모형에서의 한계변화량 $\bar{\Delta}_S$와 D_tF_n이 연속-시간 모형에서는 각각 $\dot{F}_s$와 $\dot{F}_t$로 대체되어 있고, 이차 미분항 $1/2\sigma^2 S_t^2 \ddot{F}_{ss}$이 새로이 개입되어 있음을 알 수 있다. 이차 미분항 $1/2\sigma^2 S_t^2 \ddot{F}_{ss}$은, 이산-시간 모형에서 $D_sF_n = \tilde{\Delta}_S\, DS_n$인 관계를 사용하는 대신에 근사적으로 $D_sF_n \doteq \bar{\Delta}_S DS_n$라고 가정한 것을 연속-시간 확률과정에서 이또 미적분법을 적용하여 정확하게 바로잡아주는 과정에서 나타나게 된다. 다음에서는 이산모형에서 설명된 내용을 연속-시간 모형으로 변환하는데 필요한 수식을 정리해보기로 하자. A와 B의 투자액은 $P_t = F(t, S_t) + \theta S_t$이고, A의 투자 방식에 의한 증분은 $dP_t = dF(t, S_t) + \theta dS_t$이다. 여기서 이또 포뮬러에 의하여,

$$dF(t, S_t) = \left[\dot{F}_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \ddot{F}_{ss}\right] dt + \dot{F}_s dS_t$$

이므로 dP_t에서 S_t와 관계되어 있는 항을 상쇄시키려면 $\theta = -\dot{F}_s$이어야 한다. 즉 $\theta = -\dot{F}_s$일 때, $dP_t = dF(t, S_t) - \dot{F}_s dS_t$는 S_t와 무관하게

$$dP_t = \left[\dot{F}_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \ddot{F}_{ss}\right] dt$$

와 같이 나타난다. 앞서 이산-시간 모형의 경우와 마찬가지 논리로, 무위험자산에 투자한 B의 수익은 $dP_t = rP_t = r[F_t - \dot{F}_s S_t]$이 되는 이유로 A와 B의 투자수익을 등가로 놓아 위와 같은 블랙-숄즈 편미분방정식 (4.1)을 얻게 된다.

위의 의미는 옵션의 가격변동률 $\Delta_S = \dot{F}_s$를 계산하여 포트폴리오에서 1단위의 옵션당 Δ_S만큼의 기초자산을 매도하는 것을 의미한다. 이와 같은 방법으로 자산을 헷지하는 방법을 델타헷징 (delta hedging)이라 한다. 이때, $\Delta_S = \dot{F}_s(t, S_t)$의 값은 매 순간마다 변하게 된다. 주기적으로 매 순간 델타헷징과 같은 헷징 전략을 적용하는 방법을 동적 헷징 (dynamic hedging)이라 한다. 이에 대비하여, 정적헷징은 초기에 구축한 헷징 전략을 재조정하지 않는 방법을 말한다. 참고로, 헷징과 관련된 용어에서는 $\dot{F}_s$를 델타(Δ)라 하고 $\dot{F}_t$를 쎄타(Θ), 또 $\ddot{F}_{ss}$를 감마(Γ)라고 부른다.

4.3. 블랙-숄즈 편미분방정식의 해와 의미

블랙-숄즈 편미분방정식 (4.1)의 해를 구하는 대표적인 방법은, 편미분방정식의 일반적 해법을 적용하여 기계적으로 그 해를 구하는 방법을 들 수 있고, 앞서 2절에서 언

급한 위험중립 (risk-neutral) 확률측도를 이용하는 방법을 들 수 있다. 편미분방정식의 일반적 해법을 이용하는 방법은, 통계학 전공자들에게 나름대로 퓨리에적분과 그 성질에 대한 이해를 높여 수리통계학이나 시계열이론 학습에 도움이 될 수 있다는 장점은 있으나, 아무래도 통계학 전공자 입장에서는 위험중립 확률측도를 이용하는 방법이 이해하기 쉬울 뿐만 아니라, 그 과정에서 금융시장에서 블랙-숄즈 방정식이 가지는 본질적 의미를 새길 수가 있어서 상대적으로 더욱 바람직한 접근 방법이라고 판단된다. 최병선 (2004)과 최병선과 김철응 (2003)은 편미분방정식의 일반적 해법을 이용한 블랙-숄즈 방정식의 해법에 대하여 잘 다루고 있다. 본 논문에서는 위험중립 확률측도를 이용하는 방법을 중심으로 내용을 전개한다.

먼저 기초자산의 가격 S_t가 식 (3.2)에 의하여 정의되는 확률과정 이라고 하자. 이때 이를 무위험이자율 r로 할인한 확률과정 $S_t^r = e^{-rt}S_t$에 이또 포뮬러를 적용하면

$$d\,S_t^r = d[e^{-rt}S_t] = e^{-rt}(\mu_t - rS_t)dt + e^{-rt}\sigma_t dW_t$$

이 됨을 볼 수 있다. 여기서 $W_t \sim N(0,t)$인 분포가 가정되었으므로 마팅게일 기본정리에 의하면, $\mu_t - rS_t = 0$가 아니라면 S_t^r은 마팅게일이 아니므로 $E[S_T^r|S_t^r] = S_t^r$일 수 없다. 그러나 자산가격평가 기본정리에 의하면, 무위험이자율로 할인된 미래자산 가치 S_T^r에, 위험요인을 보상하도록 적당하게 기대치를 취해서, 할인된 현재가치 S_t^r와 동일하도록 만드는 확률측도 Q_0가 존재한다. 즉 S_t^r이 마팅게일이 되어 $E^{Q_0}[S_T^r|S_t^r] = S_t^r$인 성질을 만족하는 확률측도 Q_0가 존재한다. 확률측도 Q_0를 적용하는 경우

$$d\,S_t^r = e^{-rt}(\mu_t - rS_t)dt + e^{-rt}\sigma_t dW_t = e^{-rt}\sigma_t dW_t^*$$

인 관계를 만족하는 브라운운동 W_t^*가 존재한다. 복잡한 말을 빼고 간단하게 말하자면, $m_t = -(\mu_t - rS_t)/\sigma_t$이라 할 때, $W_t \sim N(0,t)$이고 $W_t^* \sim N(-m_t,t)$이지만, 적당한 확률측도 Q_0를 잡아서 $W_t^* \sim^{Q_0} N(0,t)$이고 $W_t \sim^{Q_0} N(m_t,t)$가 되도록 할 수 있다는 의미이다.

이러한 확률측도 Q_0를 찾아내는 일반적 방법에 관한 정리가 Girsanov 정리이다. Girsanov 정리는 결국 블랙-숄즈 방정식과 관련된 가장 중요한 수학적 정리라고 할 수 있다. 다양한 형태의 Girsanov 정리가 있는데, 그 중 한 경우를 간단히 정리하면 다음과 같다. 어떤 확률측도 P가 있어서, 이 확률측도에 대하여 W_t가 브라운운동 확률과정이고, Y_t와 $\xi_t = e^{Y_t-(1/2)[Y]_t}$가 마팅게일이 된다면, 이로부터 얻어지는 새로운 확률과정 W_t^*와 새로운 확률측도 Q는

$$W_t^* = W_t - [Y,W]_t \qquad \text{이고} \qquad dQ(w_t) = \xi_t dP(w_t)$$

인 관계로부터 정의되고, 이때 W_t^*는 확률측도 Q하에서 브라운운동 확률과정이 된다. 여기서, $[Y]_t = \int_0^t (dY_u)^2$이고 $[Y,W]_t = \int_0^t (dY_u)(dW_u) = \int_0^t \mu_s ds = m_t$이다. Girsanov 정리가 성립하기 위한 전제조건인 $Ee^{[Y]_t} < \infty$을 Novikov 조건이라 한다.

자산가격평가 기본정리에 의하여, S_t^r이 마팅게일이 되게 하는 확률측도 Q_0에 대하여 옵션의 (할인된) 현재가격 $F_t^r = e^{-rt}F_t$도 동시에 마팅게일이 된다. 즉, $F_t^r =$

$E^{Q_0}[F_T^r|F_t^r]$이어야 한다. 다시 말해서, 옵션의 현재가격 F_t^r은 미래 만기시점의 가격 $F_T^r = e^{-rT}(S_T - K)^+$에 대한 현재시점에서의 조건부 기대치로 구할 수 있다는 뜻이다. 단지 이때 기대치를 취하는 과정에서 사용할 확률측도는, 옵션의 가격 F_t^r이 갖는 불확실성은 기초자산의 미래가격 S_T^r이 갖는 불확실성에 기인하는 것이므로, S_t^r을 마팅게일이 되게 하는 확률측도 Q_0를 동일하게 사용하여야 한다는 뜻이다. 이를 다시 살펴보면, 옵션의 할인된 가격 F_t^r에 이또 포뮬러를 적용하면, $dF_t^r = d[e^{-rt}F_t]$이므로

$$dF_t^r = e^{-rt}\left[-rF_t + \dot{F}_t + \mu_t \dot{F}_s + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \ddot{F}_{ss}\right]dt + e^{-rt}\sigma_t \dot{F}_s dW_t \tag{4.2}$$

$$= e^{-rt}\left[-rF_t + \dot{F}_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \ddot{F}_{ss} + rS_t\dot{F}_s\right]dt + e^{-rt}\sigma_t \dot{F}_s dW_t^* \tag{4.3}$$

이 된다. 위험중립 확률측도 Q_0하에서 W_t^*는 브라운운동 확률과정이 되므로 마팅게일 표현정리에 따라 $-rF_t + \dot{F}_t + (1/2)\sigma_t^2\ddot{F}_{ss} + rS_t\dot{F}_s = 0$이어야 한다. 기초자산의 가격 S_t를 정의한 식 (3.2)에서 $\mu_t = \mu S_t$라고 하고 $\sigma_t = \sigma S_t$라고 하여 이를 식 (3.1)과 동일하게 하기로 하면, 이로부터 앞서 블랙-숄즈가 얻은 편미분방정식 (4.1)과 완전히 동일한 결과를 얻는다. 여기서 눈여겨볼 만한 사항은 식 (4.2)과 식 (4.3)에서의 추세함수의 차이이다. (4.2)의 추세함수에는 S_t의 추세항 μ_t가 개입되어 있으나, (4.3)에는 그렇지 않다. 위험중립 확률측도 Q_0의 역할은 결국 (4.2)의 추세함수를 (4.3)의 추세함수로 바꾸는 것이다.

일반적으로, 식 (3.2)를 따르는 어떤 확률과정 S_t의 함수로 정의되는 어떤 함수 $f(t, S_t)$, $t \in [0, T]$가 있을 때, $f(T, S_T) = f_T$를 경계 값 조건으로 갖는 편미분방정식

$$\dot{f}_t + \mu_t \dot{f}_s + (1/2)\sigma_t^2 \ddot{f}_{ss} = 0$$

은 일종의 Fokker-Planck 방정식 또는 콜모고로프 후향방정식 (Kolmogorov's Backward Equation)의 한 형태가 된다. Feynman-Kac 포뮬러는 콜모고로프 후향방정식의 해결방법으로 사용된다. 함수 $f(t, S_t)$에 이또 포뮬러를 적용하면 식 (3.3)과 같은 결과를 얻는다. 마팅게일 표현정리에 의하여, 콜모고로프 후향방정식은 $df(t, S_t)$의 추세함수가 0이 된다는 것을 의미하므로 함수 $f(t, S_t)$가 마팅게일이 된다는 의미이다. 이로부터 Feynman(1918-1988)과 Kac은 편미분방정식의 해가 $f(t, S_t) = E[f_T|S_t]$와 같이 조건부 기대치를 이용하여 쉽게 구할 수 있다는 것을 보였다. 기대치를 구하는 과정이 매우 복잡하다면 몬테칼로 시뮬레이션으로 처리하여 편미분방정식의 해를 구할 수도 있다는 의미이기도 하다. 동일한 방법을 (4.3)에 적용하여 블랙-숄즈 편미분방정식의 해를 구할 수 있다. 해를 구하기 위하여 기대치를 취할 때, 식 (4.3)의 추세함수가 0이 되는 확률측도, 즉 W_t^*를 브라운운동이 되도록 하는 위험중립 확률측도 Q_0를 가정하여 기대치를 취하게 된다. 블랙-숄즈 편미분방정식의 해법에서 위험중립 확률측도를 이용하여 기대치를 구하는 과정은 그다지 어렵지 않은 이유로 몬테칼로 방법이 아닌 해석적인 방법으로 그 해를 구하는 것이 가능하다.

이러한 점들을 고려하면 블랙-숄즈 방정식의 의미는 기초자산 S_t^r을 마팅게일로 만드는 확률측도와 동일한 확률측도 Q_0에 의하여 F_t^r이 마팅게일이 된다는 점을 발견한

것이라고 하겠다. 동일한 의미를 더욱 일반적인 형태로 말하면, S_t를 마팅게일로 만드는 확률측도와 동일한 확률측도 Q에 의하여 F_t이 마팅게일이 된다는 의미이다. 이는 물론 1980년대 초반 이후 정립된 무재정원리 혹은 자산가격평가 기본정리에 따르면 당연한 이론이겠지만, 블랙과 숄즈는 동적헷징 방법을 고안하여 기초자산과 그 기초자산으로 부터 파생한 옵션을 연계하여 무위험 포트폴리오를 구성하는 방법을 고안하였고, 수리적으로 그 이유를 명시적으로 보였다.

이제 마지막 남은 과정은 블랙-숄즈의 편미분방정식 (4.1)의 해를 구체적으로 구하는 작업일 것이다. 먼저 블랙-숄즈의 모형에서와 같이 기초자산의 가격 S_t가 식 (3.1)를 만족하는 기하브라운운동 확률과정이라 하자. 이때 S_t^r을 마팅게일로 만드는 확률측도 Q_0하에서, $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^*$를 만족하는 브라운운동 $W_t^* \sim^{Q_0} N(0,t)$가 있다. 이로부터 간단히

$$S_t^r = S_0 e^{-(1/2)\sigma^2 t + \sigma W_t^*} \quad \text{이고} \quad S_T^r | S_t^r = S_t^r e^{-(1/2)\sigma^2 (T-t) + \sigma W_{T-t}^*}$$

임을 알 수 있다. 여기서 조건부 확률변수 $S_T^r|S_t^r$의 의미는 S_t^r이 주어진 경우의 S_T^r을 의미한다. 이 조건들과 함께, $F_t^r = E^{Q_0}[F_T^r|F_t^r]$에 콜옵션의 만기조건 $F_T^r = e^{-rT}(S_T - K)^+$을 대입하여

$$F_t^r = E^{Q_0}[e^{-rT}(S_T - K)^+ | S_t^r] = E^{Q_0}[(S_T^r - e^{-rT}K)^+ | S_t^r]$$

을 계산하면 블랙-숄즈 편미분방정식 (4.1)의 해를 얻게 된다. 표준정규분포의 밀도함수와 누적분포함수를 각각 $\phi(\cdot)$와 $\Phi(\cdot)$라고 하고, 간결한 표현을 위하여 $a = \sigma\sqrt{T-t}$라고 하자. 그러면, $W_{T-t}^* \sim^{Q_0} N(0, T-t)$이므로 $W_{T-t}^* = \sqrt{T-t}\, Z$라고 하면, $Z \sim N(0,1)$이고 $S_T^r|S_t^r = S_t^r e^{-(1/2)a^2 + aZ}$이 된다. 여기서, S_t^r이 조건으로 주어졌다고 할 때, '$(S_T^r - e^{-rT}K) > 0$' 인 조건을 바꿔 쓰면 '$S_t^r e^{-(1/2)a^2 + aZ} > e^{-rT}K$' 가 된다. 이를 정리하여

$$d_2 = [\log(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)]/[\sigma\sqrt{T-t}]$$

라고 정의하면, '$(S_T^r - e^{-rT}K) > 0$' 인 조건은 '$Z > -d_2$' 와 동일한 의미임을 알 수 있다. 또한 정규분포의 특성에 따라,

$$\int_{z \geq -d_2} e^{-(1/2)a^2 + aZ} \phi(z) dz = \Phi(d_2 + a)$$

인 관계가 있다. 이를 정리하면, 손쉽게

$$F_t^r = E^{Q_0}[(S_T^r - e^{-rT}K)^+ | S_t^r] = S_t^r\, \Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-rT}\, \Phi(d_2)$$

이 됨을 확인할 수 있다. 여기서, $\Phi(d_2) = 1 - \Phi(-d_2)$이고, 그 의미는 현재상태 S_t를 조건으로 해서, 콜옵션이 만기시에 내가격 $(S_T > K)$ 상태가 될 확률, 즉 $P(S_T > K|S_t)$을 의미한다.

5. 결론

본 논문에서는 대표적인 금융 파생상품인 옵션의 개념을 알아보고, 그 가격 결정을 위한 블랙-숄즈 모형의 해법과 의미 그리고 관련 용어와 수리적 해석 등등을 종합적으로 살펴보았다. 블랙-숄즈 모형이 현실 금융시장을 충분히 정확하게 설명하지는 못한다는 것이 모형의 개발 당사자인 숄즈와 머튼의 세기적인 금융 실험으로부터 이미 확인되기도 하였다. 그럼에도, 블랙-숄즈 모형을 이해하는 것이 중요한 의미를 갖게 되는 것은, 블랙-숄즈의 모형이 금융시장의 기본적인 작동 방식에 대하여 필수적으로 필요한 최소한의 이해를 가능하게 하기 때문이다. 본 논문에서는 통계학 전공자의 입장에서 블랙-숄즈 방정식과 관련된 제반 용어와 의미를 가능한 한 간결하게 정리하였다. 금융 파생상품과 관련된 기초 용어와 그 수리적 의미를 공부하고자 하는 경우 본 논문의 내용이 충분하지는 못하더라도 처음 길을 잡는데 도움이 될 수 있을 것으로 기대한다.

후기

무려 20여년 전에 발표된 블랙-숄즈의 논문에 대한 철늦은 공부를 정리하였습니다. 가능한 쉽게 내용을 전개하여 혹시나 마찬가지 입장이신 분들에게 조금의 도움이나마 될까한다는 억지에 가까운 나름대로의 의미 부여에도 불구하고, 블랙-숄즈의 원 논문보다도 훨씬 읽기 어렵고 산만한 글이 되고 말았습니다. 그나마 두 분 심사위원님들의 세심한 검토가 있어 부족한 점을 많이 덜 수 있었습니다. 공부하는 과정에서 Neftci (2000), Baxter와 Rennie (1996), Etheridge (2002), Björk (1998)의 도움을 받았습니다. 그러고 보니 처음에는 내용이 산만하게만 보이던 Hull (1993)이나 어려워만 보이던 Karatzas와 Shreve (1998)도 그때 그때 좋은 상담자였습니다. 또 D. Pelletier와 P. Carr를 비롯한 많은 분들이 인터넷에 올려 놓은 강의 노트와 다양한 자료들이 도움이 되었습니다.

참고문헌

최병선, 김철응 (2003). <Black-Scholes 방정식 입문>, 세경사.

최병선 (2004). <금융파생상품의 수리적 배경>, 세경사.

Baxster, M. and Rennie, A. (1996). *Financial Calculus: An Introduction to Derivatives Pricing.* Cambridge University Press, Cambridge.

Björk, T. (1998). *Arbitrage Theory in Continuous Time.* Oxford University Press, New York.

Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654.

Etheridge, A. (2002). *A Course in Financial Calculus.* Cambridge University Press, Cambridge.

Harrison, J. M. and Kreps, D. M. (1979) Martingales and arbitrage in multiperiod security markets. *Journal Economic Theory*, **20**, 381–408.

Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1981). Martingales and Stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes & Their Applications*, **11**, 215–260.

Hull, J. (1993). *Options, Futures and Other Derivative Securities.* Prentice Hall.

Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1998). *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, New York.

Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model. *Econometrica*, **41**, 867–887.

Neftci, S. N. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.* 2nd ed., Academic Press.

Samuelson, P. A. (1965). Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 13–31. Reprinted in Cootner (1967), 506–532.

[Received July 2007, Accepted July 2007]