

Pricing an Equity-Linked Security with Non-Guaranteed Principal*

Jaekoang Cho¹⁾ and Hangsuck Lee²⁾

Abstract

Equity-linked securities (ELS) provide their customers with the return linked to the underlying equity (or equities). Equity-linked products in Korea have recently gained popularity due to relatively low interest rates. This paper discusses an equity-linked security whose principal is not guaranteed. The payoff of the ELS depends on the returns of two underlying assets. This paper presents numerical prices of the proposed product by using Monte-Carlo simulation method. It assumes that the log-returns of two stocks follow either Brownian motion or variance gamma process. Finally, the comparison of the two approaches is discussed.

Keywords: Equity-linked security; geometric Brownian motion; variance-gamma process.

1. 서론

금융시장에는 다양한 종류의 투자자들이 존재한다. 보수적인 투자자들은 은행예금과 같은 위험이 작은 원금보존형 금융상품을 선호 (low-risk low-return)하는 반면, 공격적인 투자자들은 주식투자나 이색옵션 (exotic options) 등을 통하여 당초 투자원금의 몇 배에 해당하는 수익을 단기간 내에 획득하려는 경향 (high-risk high-return)을 보이고 있다. 이와 같은 투자자들의 상이한 투자성향을 모두 충족시키는 금융상품의 한 형태로 주가지수 연동형 상품 (Equity-Linked Security; ELS)이 있다. 개별주식의 가격이나 주가지수에 연동하여 수익률이 결정되는 신종 금융상품으로 주가지수 연동형 상품 (ELS)을 증권회사에서 발행·판매한다. ELS는 주식투자보다는 위험이 낮으며 은행금리보다는 높은 수익률을 기대할 수 있다. 이러한 ELS의 상품특징으로 인하여 2003년 3월부터 발행·판매되기 시작하여 월평균 발행액 추이는 3,459억원 (2003년), 4,672억원 (2004년),

* This work was supported by the Soongsil University Research Fund.

1) Graduate Student, Department of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University, Seoul 156-743, Korea.

E-mail : jaekoang.cho@gmail.com

2) Assistant Professor, Department of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University, Seoul 156-743, Korea.

Correspondence : hslee@ssu.ac.kr

11,913억원 (2005년), 17,944억원 (2006년)으로 매년 급격한 증가 추세에 있다. 또한, ELS가 발행 증권사 당기순이익의 10%를 차지할 정도로 증권사의 주요 수입원이 되면서 증권사간 경쟁이 심화되어 다양한 구조의 ELS 상품이 개발되고 있다. 그러나 ELS 상품구조의 복잡성으로 인하여 정교한 가격계산과정이 필요하며 특히 옵션가격이론 (option pricing theory)의 응용이 필수적이다.

Black과 Scholes (1973)는 주가를 Geometric Brownian Motion (GBM)을 가정하여 option pricing 방법을 발표하였다. 그 이후 많은 연구자에 의하여 이론적으로나 경험적으로 다양한 연구가 이루어졌다. Black (1975)이 Black-Scholes Option Pricing Model (BSOPM)의 시스템적인 가격오차가 발생하는 것을 발표한 후로 많은 사람들은 이것을 해결하기 위하여 관심을 갖기 시작하였다. 옵션가격에 영향을 미치는 하나의 요인으로 기초자산의 수익률 분포를 선택하는 것에 있음을 지적하였고, 실제로 BSOPM에서 가정한 기초자산의 수익률 분포인 로그노말 (log-normal)분포가 정확하지 않음을 발견하였다. 따라서 option pricing의 정확도를 높이기 위하여 실제적인 기초자산의 수익률 분포를 선택하는 것에 초점을 두었고 Heston (1993)은 BSOPM의 가격오차를 기초자산 수익률 분포의 왜도 (skewness)와 첨도 (kurtosis)에 의하여 설명될 수 있음을 언급하였다. Bates (1995)는 수익률의 risk neutral 분포가 두꺼운 왼쪽 꼬리 분포를 가지므로 풋옵션(put option)의 가격이 저평가 될 수 있다는 것을 발견하였다. 또한, De Jong 등 (1990), Engle and Gonzales-Rivera (1989)와 Papaioannou and Temel (1993)은 왜도 (skewness)와 첨도 (kurtosis)가 주가 수익률의 조건부 밀도함수를 특성화하는데 중요한 요소로 이를 포함시킬 것을 강조하였다. 이를 종합적으로 살펴보면 주가의 수익률 분포는 왜도 또는 첨도와 같은 적률모수 (moment parameter)가 고려된 분포가 필요하다. 그 대안으로서 Madan and Milne (1991)이 제안한 Variance-Gamma Process는 로그수익률 분포에 긴꼬리와 왜도의 특징을 포함시켰고, 이를 해석하는데 초점을 두었다. 그 이후에 Madan 등 (1998)이 로그수익률 분포의 세 모수, 즉 변동성 (volatility)과 왜도 (skewness), 첨도 (kurtosis)에 기초한 Variance-Gamma Process를 European Option의 가격결정을 위한 방법론으로 제안하고 가격공식을 유도하였다.

본 논문에서는 최근 많이 출시되고 있는 행사가격 하향조정형의 성격을 가진 '투스톡-스텝다운 (2 stock-step down)형' 주가지수 연동형 상품 (ELS)의 가격 결정을 위한 주가모형으로 Geometric Brownian Motion (GBM)과 Geometric Variance Gamma Process (GVG Process)를 가정한다. 가정된 두개의 주가모형을 통하여 각 주가시나리오를 생성한 후 몬테카를로 시뮬레이션 방법론 (Monte-Carlo Simulation Method)을 적용하여 이 상품의 현재가치 (present value)를 계산하고, 이를 서로 비교한다. 또한, 상품의 현재가치에 영향을 미치는 각 기초자산의 로그수익률에 대한 다양한 변동성 (volatility)의 조합과 상관계수 (correlation coefficient)의 변화에 따라 현재가치가 어떻게 변화하는지 알아보기 위한 민감도 분석 (sensitivity analysis)을 한다.

2. ELS 가격계산을 위한 상품설명

본 상품은 현재 가장 많이 출시되고 있는 투스톡-스텝다운 (2 stock-step down)형 주가지수 연동형 상품으로 만기 (2년)까지 두 기초자산의 수익률에 의하여 상환금액이 결정된다. ELS 상품의 구조에 대하여 그림 2.1을 살펴보면, 계약시점의 두 기초자산 가격을 기준가격으로 설정하고, 첫 번째 조기상환 평가일인 6개월 시점에서 두 기초자산의 가격이 모두 기준가격대비 85% 이상일 경우 6.6% (연 13.2%)의 수익률로 조기상환이 확정됨과 동시에 계약은 6개월 시점에서 만료된다. 하지만 6개월 시점에서 85% 이하일 경우 두 번째 조기상환 평가일 (계약 후 12개월 시점)에 조기상환이 결정된다. 이때 두 기초자산의 가격이 모두 기준가격대비 80% 이상일 경우 13.2% (연 13.2%)의 수익률로 조기상환이 확정됨과 동시에 계약이 만료된다. 그리고 12개월 시점에 80% 이하일 경우에는 세 번째 조기상환 평가일 (계약 후 18개월 시점)에 두 기초자산의 가격이 모두 기준가격대비 75% 이상의 경우 19.8% (연 13.2%)의 수익률로 조기상환이 확정된다. 그렇지 않으면 만기시점 (계약 후 24개월 시점)에서 두 기초자산의 가격이 기준가격대비 70% 이상의 경우에는 26.4% (연 13.2%)의 수익률이 확정되고, 70% 이하의 경우 투자기간중 한번이라도 기준가격대비 50%이하로 하락한 적이 없으면 20.0% (연 10.0%)의 수익률로 확정된다. 하지만, 기준가격대비 50% 이하로 하락한 적이 있으면 두 기초자산중 수익률이 낮은 종목을 기준으로 기준가격대비 만기가격의 비율로 만기 상환금이 확정된다. 그림 2.1의 각 시점별 조기 또는 만기상환조건 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 은 식 (3.1)을 참고한다.

본 논문에서 다루는 주가지수 연동형 상품 (ELS)의 해약에 관하여 살펴보자. 상품 계약후부터 만기시점 일주일 전까지 해약이 가능하며 해약시 해약환급금을 돌려준다. 해약환급금은 상품 발행사에서 공표하는 ELS의 공정가액을 기준으로 해약에 대한 위약금 (penalty)을 제외한 금액을 상환 (reimbursement)한다. 따라서 상품의 해약시 원금

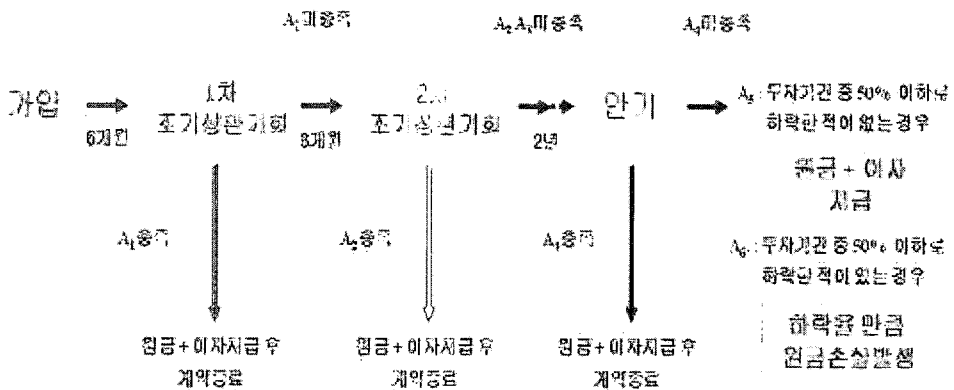


그림 2.1: 가격계산을 위한 ELS상품구조

손실의 위험이 발생할 수 있으므로 해약의 발생가능성은 낮으며 가격계산에서 중요한 요인은 아니다. 본 논문에서 다루는 ELS 상품의 해약률 (lapse rate)로 매주 q 의 일정한 상수값 (constant value)을 가정하도록 한다. 상품 계약 후 1주차에 q 의 해약이 발생하고, 2주차에는 해약이 발생하지 않은 $(1-q)$ 중 q 의 해약이 발생하므로 $(1-q) \cdot q$ 의 해약이 발생한다. 이러한 방식에 의하여 3주차는 $(1-q)^2 \cdot q$, 4주차는 $(1-q)^3 \cdot q$, i 주차는 $(1-q)^{(i-1)} \cdot q$ 가 발생한다. 따라서 매주 해약률은 q 로 일정하지만, 계약기간 전체적으로는 지수적인 감소형태를 보인다.

3. ELS 가격계산 공식

앞에서 설명한 ELS 상품에 대한 현재가치를 계산하기 위하여 만기 (2년)까지 각 시점에 대하여 두 기초자산의 총수익률 (total benefit rate)을

$$R_1(t) = \frac{S_1(t)}{S_1(0)}, R_2(t) = \frac{S_2(t)}{S_2(0)}, 0 \leq t \leq 2$$

라고 하자. 여기서 $S_1(t)$ 는 시점 t 의 첫 번째 기초자산의 가격을 나타내고, $S_2(t)$ 는 시점 t 의 두 번째 기초자산의 가격을 나타낸다. 계약 후 6개월, 12개월, 18개월, 24개월 (만기)의 각 시점의 조기 또는 만기상환 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & - 6개월 (t_1 = 0.5) \\ & \Rightarrow A_1 = \{R_1(0.5) \geq 0.85, R_2(0.5) \geq 0.85\} \quad (3.1) \\ & - 12개월 (t_2 = 1.0) \\ & \Rightarrow A_2 = A_1^c \cap \{R_1(1.0) \geq 0.80, R_2(1.0) \geq 0.80\} \\ & - 18개월 (t_3 = 1.5) \\ & \Rightarrow A_3 = (A_1 \cup A_2)^c \cap \{R_1(1.5) \geq 0.75, R_2(1.5) \geq 0.75\} \\ & - 24개월 (t_4 = 2.0) \\ & \Rightarrow \begin{cases} A_4 = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c \cap \{R_1(2.0) \geq 0.70, R_2(2.0) \geq 0.70\} \\ A_5 = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)^c \cap \{\max_{0 \leq t \leq 2} R_1(t) \geq 0.50, \max_{0 \leq t \leq 2} R_2(t) \geq 0.50\} \\ A_6 = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)^c \end{cases} \end{aligned}$$

다음으로 $F(0)$ 를 원금 (principal)이라 할 때 식 (3.1)의 각 시점별 조기 또는 만기의 상환조건을 만족할 경우 그에 따른 상환 금액은

$$\begin{aligned} & - 6개월 (t_1 = 0.5) \\ & \Rightarrow B_1 = F(0) \{1 + 0.066\}, \text{ if } A_1 \quad (3.2) \end{aligned}$$

- 12개월 ($t_2 = 1.0$)
 $\Rightarrow B_2 = F(0) \{1 + 0.132\}$, if A_2
- 18개월 ($t_3 = 1.5$)
 $\Rightarrow B_3 = F(0) \{1 + 0.198\}$, if A_3
- 24개월 ($t_4 = 2.0$)
 $\Rightarrow \begin{cases} B_4 = F(0) \{1 + 0.264\}, & \text{if } A_4 \\ B_5 = F(0) \{1 + 0.200\}, & \text{if } A_5 \\ B_6 = F(0) \{\min[R_1(2), R_2(2)]\}, & \text{if } A_6 \end{cases}$

이다. 식 (3.1)과 식 (3.2)에 의하여 해약을 고려하지 않았을 경우, 즉 해약률 (lapse rate)이 0일 때 ‘투스톡-스텝다운 (2 stock-step down)형’ 주가지수 연동형 상품의 현재가치는 자산 가격결정의 기본이론 (fundamental theorem of asset pricing)에 의해서 식 (3.3)과 같다.

$$\begin{aligned} \text{현재가치} &= \{e^{-rt_1} \cdot E^Q[B_1 \cdot I(A_1)]\} + \{e^{-rt_2} \cdot E^Q[B_2 \cdot I(A_2)]\} \\ &\quad + \{e^{-rt_3} \cdot E^Q[B_3 \cdot I(A_3)]\} + \{e^{-rt_4} \cdot E^Q[B_4 \cdot I(A_4)]\} \\ &\quad + \{e^{-rt_5} \cdot E^Q[B_5 \cdot I(A_5)]\} + \{e^{-rt_6} \cdot E^Q[B_6 \cdot I(A_6)]\} \\ &= E^Q \left[\sum_{j=1}^6 e^{-rt_j} B_j \cdot I(A_j) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

단, $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1.0$, $t_3 = 1.5$, $t_4 = t_5 = t_6 = 2.0$ 이다. 여기에서 r 은 이자율 (continuously compound interest rate)을 의미하고, Q 는 Risk-Neutral Measure를 의미한다. 그리고 $I(\cdot)$ 는 indicator function이다. 즉,

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{if } A \text{ is true} \\ 0, & \text{if } A \text{ is false} \end{cases}$$

이다.

다음으로 해약을 고려했을 경우에 현재가치를 표현하여 보자. 6개월 동안 해약이 발생할 확률을 p 라 하고, 해약이 발생하지 않을 확률을 $1 - p$ 라고 하였을 때 q 는 주당 (per week) 해약률이므로

$$p = (1 - (1 - q)^l)$$

이고,

$$1 - p = (1 - q)^l$$

이다. 여기에서 l 은 6개월에 해당하는 주 (weeks)의 개수이다. 따라서 식 (3.3)의 6개월마다 가능한 조기상환은 해약이 발생하지 않은 경우에 해당하므로 해약을 고려할 경우

계약미발생 확률을 식 (3.3)의 각 기대값에 곱해야 한다. 따라서 식 (3.3)은 다음과 같이 수정된다.

$$\begin{aligned} \text{현재가치} &= \{e^{-rt_1} \cdot (1-p) \cdot E^Q[B_1 \cdot I(A_1)]\} + \{e^{-rt_2} \cdot (1-p)^2 \cdot E^Q[B_2 \cdot I(A_2)]\} \\ &+ \{e^{-rt_3} \cdot (1-p)^3 \cdot E^Q[B_3 \cdot I(A_3)]\} + \{e^{-rt_4} \cdot (1-p)^4 \cdot E^Q[B_4 \cdot I(A_4)]\} \\ &+ \{e^{-rt_5} \cdot (1-p)^4 \cdot E^Q[B_5 \cdot I(A_5)]\} + \{e^{-rt_6} \cdot (1-p)^4 \cdot E^Q[B_6 \cdot I(A_6)]\} \\ &= E^Q \left[\sum_{j=1}^6 (1-p)^{2 \cdot t_j} \cdot e^{-rt_j} B_j \cdot I(A_j) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

단, $t_1 = 0.5, t_2 = 1.0, t_3 = 1.5, t_4 = t_5 = t_6 = 2.0$ 이다.

시점 t 에서 해약이 발생하는 경우 해약환급금을 SV_t 라고 할 때 본 논문에서 다루어지는 상품의 특성을 반영하면

$$SV_t = e^{rt} \cdot (F(0) - SC)$$

이다. 여기서 SC 는 surrender charge를 나타내며 위약금 (penalty)에 해당한다. 해약환급금 SV_t 는 주가에 연동하지 않으므로 SV_t 의 현재가치는 SV_t 에 할인요소 (discount factor) e^{-rt} 를 곱하면 된다. 따라서, 시점 t 에서 해약이 발생하였을 경우 SV_t 의 현재가치는

$$\begin{aligned} SV_t \text{의 현재가치} &= e^{-rt} \cdot SV_t \\ &= (F(0) - SC) \end{aligned}$$

이다. 어느 시점에서 해약을 하더라도 현재가치는 모두 동일하다. 해약확률은 6개월 이내이면 p 이고, 6개월에서 12개월 이내이면 $(1-p)p$, 12개월에서 18개월 이내이면 $(1-p)^2p$, 18개월에서 24개월 이내이면 $(1-p)^3p$ 이므로 2년 이내에 해약하는 확률은

$$p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p$$

이다. 따라서 해약 확률이 고려된 해약환급금 SV_t 의 현재가치는

$$\begin{aligned} SV_t \text{의 현재가치} &= \{[p + (1-p)p + (1-p)^2p + (1-p)^3p] \cdot [F(0) - SC]\} \\ &= \left[(F(0) - SC) \cdot \sum_{j=0}^3 (1-p)^j p \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

이다. 따라서 해약이 고려된 주가지수 연동형 상품 (ELS)의 현재가치는 조기 (만기) 상환금의 현재가치인 식 (3.4)와 해약환급금의 현재가치인 식 (3.5)를 합하면

$$E^Q \left[\sum_{j=1}^6 (1-p)^{2 \cdot t_j} \cdot e^{-rt_j} B_j \cdot I(A_j) \right] + \left[(F(0) - SC) \cdot \sum_{j=0}^3 (1-p)^j p \right] \quad (3.6)$$

단, $t_1 = 0.5, t_2 = 1.0, t_3 = 1.5, t_4 = t_5 = t_6 = 2.0$

이 된다. 식 (3.6)의 유도과정에서 해약은 주가와 연동되지 않으므로 해약확률과 주가모형을 동시에 반영하는 Risk-Neutral Measure를 구하여 계산된 것은 아니다. ELS의 가격 계산은 주가모형만을 고려하여 Risk-Neutral Measure하에서 구하였고 해약확률은 Real Probability를 이용하였다. ELS의 이러한 가격계산 방식은 Jaimungal (2004)를 참고한다.

4. 주가모형의 가정과 모수추정

4.1. Geometric Brownian Motion 주가모형 가정

두 주가에 대하여 Geometric Brownian Motion (GBM) 주가모형을 가정하고 현재시점의 두 주가를 $S_i(0)_{i=1,2}$ 라고 할 때, t 시점의 주가지수 $S_i(t)$ 는

$$S_i(t) = S_i(0) \exp[Y_i(t)], \quad S_i(0) > 0, (i = 1, 2) \quad (4.1)$$

이다. Real Probability하에서 $Y_i(t) = \mu_i t + \sigma_i W_i(t)$ 이고, $W_i(t)$ 는 Standard Brownian Motion을 따른다는 가정 즉, $W_i(t) \sim N(0, \sqrt{t^2})$ 이므로 $Y_i(t) \sim N(\mu_i t, (\sigma_i \sqrt{t})^2)$ 를 만족한다. 여기에 Risk-Neutral Measure하에서는 $Y_i(t) \sim N((r - 1/2\sigma_i^2)t, (\sigma_i \sqrt{t})^2)$ 이다. 또한, 두개의 주가지수는 서로 상관성을 가지고 움직이므로 $\text{Cov}(W_1(t), W_2(t)) = \rho t$ 이다. Geometric Brownian Motion (GBM) 모형에 대하여 자세한 내용은 Gerber와 Shiu (1996)를 참고한다.

4.2. Geometric Variance-Gamma Process 주가모형 가정

식 (4.1)의 Geometric Brownian Motion 주가모형은 Δt 의 일정한 시간의 변화에 대한 주가의 움직임을 가정하였지만 Geometric Variance-Gamma Process (GVG Process) 주가모형은 주가의 수익률이 Gamma 분포를 따르는 시간의 변화에 대하여 Brownian Motion으로 가정한다. 먼저 drift parameter를 θ , variance parameter를 σ 라고 할 때 Brownian Motion을

$$B(t; \theta, \sigma) = \theta t + \sigma W(t) \quad (4.2)$$

이라 하고, 다음으로 mean rate를 μ , variance rate를 ν 라고 할 때 Gamma Process를

$$G = \{G(t; \mu, \nu) : t \geq 0\} \quad (4.3)$$

라고 하자. 이때 $G(t; \mu, \nu)$ 의 분포 (distribution)는

$$f_G(g) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 t}{\nu}\right)} \frac{\nu}{\mu} \left(\frac{\mu^2 t}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\mu} - 1} \exp\left(-\frac{\mu}{\nu} g\right), \quad g > 0$$

이고, 여기서 $\Gamma(x)$ 는 감마함수이다 (Madan 등, 1998, 참고).

식 (4.2)와 식 (4.3)을 이용하여 Variance-Gamma Process의 $X^{VG}(t)$ 를 나타내면 식 (4.4)과 같다.

$$\begin{aligned} X^{VG}(t) &= B(G(t; 1, \nu), \theta, \sigma^{VG}) \\ &= \theta \cdot G(t; 1, \nu) + \sigma^{VG} \cdot W(G(t; 1, \nu)) \\ &\stackrel{d}{=} \theta \cdot G(t; 1, \nu) + \sigma^{VG} \cdot \sqrt{G(t; 1, \nu)} \cdot Z, \quad Z \sim N(0, 1^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

여기에서 Brownian Motion의 σ 와 구별하기 σ^{VG} 위하여 ρ 로 표시한다. 식 (4.4)를 이용하여 현재시점의 두 주가를 $S_i(0)_{i=1,2}$ 라고 할 때, Risk-Neutral Measure하에서 t 시점의 주가 $S_i(t)$ 는

$$S_i(t) = S_i(0) \exp [(r + w_i)t + X_i^{VG}(t)], \quad S_i(0) > 0, (i = 1, 2) \quad (4.5)$$

이고, 여기에서 $w_i = 1/\nu \cdot \ln \left\{ 1 - \left(\theta_i + 1/2(\sigma_i^{VG})^2 \right) \nu \right\}$ 이다 (Jaimungal, 2004, 참고).

다음으로 식 (4.4)의 세 모수 (θ, σ^{VG}, ν)는 Madan 등 (1998)이 제시한 수익률분포에 대한 중심적률과의 관계를 이용하여 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[X^{VG}(t)] &= \theta t \\ E \left[(X^{VG}(t) - E[X^{VG}(t)])^2 \right] &= (\theta^2 \nu + (\sigma^{VG})^2) t \\ E \left[(X^{VG}(t) - E[X^{VG}(t)])^3 \right] &= (2\theta^3 \nu^2 + 3(\sigma^{VG})^2 \theta \nu) t \\ E \left[(X^{VG}(t) - E[X^{VG}(t)])^4 \right] &= \{ 3(\sigma^{VG})^4 \nu + 12(\sigma^{VG})^2 \theta^2 \nu^2 + 6\theta^4 \nu^3 \} t \\ &\quad + \{ 3(\sigma^{VG})^4 + 6(\sigma^{VG})^2 \theta^2 \nu + 3\theta^4 \nu^2 \} t^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

식 (4.6)을 이용하여 추정된 세 모수 (θ, σ^{VG}, ν)를 이용하여 공분산 (covariance) $\text{Cov}(X_1^{VG}(t), X_2^{VG}(t))$ 을 유도하여 보자. 아래에서 편의상 $G = G(t; 1, \nu)$ 로 나타낸다. 위의 식 (4.4)를 이용하면

$$\begin{aligned} X_1^{VG}(t) &= \theta_1 G + \sigma_1^{VG} W_1(G) \\ X_2^{VG}(t) &= \theta_2 G + \sigma_2^{VG} W_2(G) \end{aligned} \quad (4.7)$$

단, $W_i(G) \stackrel{d}{=} \sqrt{G} Z_i$, $G \sim G(1, \nu)$, $Z_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1^2)$, $\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \rho^{VG}$, ($i = 1, 2$)와 같다. 식 (4.7)의 ρ^{VG} 는 Brownian Motion의 ρ 와 구별하기 위하여 ρ^{VG} 로 표시한다. 그리고 식 (4.7)를 이용하여 $\text{Cov}(X_1^{VG}(t), X_2^{VG}(t))$ 를 유도하면

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1^{VG}(t), X_2^{VG}(t)) &= \text{Cov}(\theta_1 G + \sigma_1^{VG} \sqrt{G} Z_1, \theta_2 G + \sigma_2^{VG} \sqrt{G} Z_2) \\ &= \theta_1 \cdot \theta_2 \cdot \text{Var}(G) + \sigma_1^{VG} \cdot \sigma_2^{VG} \cdot \text{Cov}(\sqrt{G} Z_1, \sqrt{G} Z_2) \\ &\quad + \text{Cov}(\theta_1 G, \sigma_2^{VG} \sqrt{G} Z_2) + \text{Cov}(\sigma_1^{VG} \sqrt{G} Z_1, \theta_2 G) \end{aligned} \quad (4.8)$$

이다. 여기에서 G 와 Z_i 는 서로 독립이고, Z_i 는 표준정규분포 $N(0,1^2)$ 를 따르므로 $E[Z_1] = E[Z_2] = 0$ 이고, $\text{Cov}(Z_1, Z_2) = \rho^{VG}$ 이다. 따라서, 식 (4.8)에서

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\sqrt{G}Z_1, \sqrt{G}Z_2) &= E[\sqrt{G}Z_1\sqrt{G}Z_2] - E[\sqrt{G}Z_1]E[\sqrt{G}Z_2] \\ &= E[GZ_1Z_2] - E[\sqrt{G}]E[Z_1]E[\sqrt{G}]E[Z_2] \\ &= E[G]E[Z_1Z_2] \\ &= \frac{t}{\nu}\rho^{VG} = t\rho^{VG} \end{aligned} \quad (4.9)$$

를 구할 수 있고, 위의 식 (4.9)처럼 G 와 Z_i 의 독립성과 표준정규변수 Z_i 의 성질을 이용하면 다음의 식 (4.10)와 식 (4.11)도 얻어진다.

$$\text{Cov}(\theta_1 G, \sigma_2^{VG}\sqrt{G}Z_2) = 0 \quad (4.10)$$

$$\text{Cov}(\sigma_1^{VG}\sqrt{G}Z_1, \theta_2 G) = 0 \quad (4.11)$$

식 (4.8)과 식 (4.9), (4.10), (4.11)를 종합하면 두 주가에 대하여 $X_1^{VG}(t)$ 과 $X_2^{VG}(t)$ 의 공분산 (covariance)은

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1^{VG}(t), X_2^{VG}(t)) &= \theta_1\theta_2\frac{t}{\nu} + \sigma_1^{VG}\sigma_2^{VG}\rho^{VG}t \\ &= \theta_1\theta_2\nu t + \sigma_1^{VG}\sigma_2^{VG}\rho^{VG}t \\ &= (\theta_1\theta_2\nu + \sigma_1^{VG}\sigma_2^{VG}\rho^{VG})t \end{aligned} \quad (4.12)$$

이다.

4.3. 변동성 (volatility)과 상관계수 (correlation coefficient)의 추정

Geometric Brownian Motion 주가모형 가정과 Geometric Variance-Gamma Process 주가모형 가정을 이용하여 두 주가의 로그수익률에 대하여 역사적변동성 (historical volatility) σ_i 와 상관계수 (correlation coefficient) ρ 를 추정하기 위하여 각 주가의 과거 1년 주가데이터 (2005년 9월 13일부터 2006년 9월 12일)의 일별증가를 사용하였다.

우선 Geometric Brownian Motion 주가모형 가정하에서 각 주가의 역사적변동성 (historical volatility) σ_i 의 추정량 (estimator)은

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{\delta t(n-1)} \sum_{k=1}^n (R_i(t_k) - \bar{R}_i)^2} \quad (4.13)$$

단, δt 는 시간구간, n 은 주가데이터 개수, R_i 는 로그수익률, \bar{R}_i 는 로그수익률의 평균이고, 상관계수 (correlation coefficient) ρ 의 추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\delta t(n-1)\sigma_i\sigma_j} \sum_{k=1}^n (R_i(t_k) - \bar{R}_i)(R_j(t_k) - \bar{R}_j) \quad (4.14)$$

단 δt 는 시간구간, n 는 주가데이터 개수, R_i 는 로그수익률, \bar{R}_i 는 로그수익률의 평균이다. 여기에서 식 (4.13)과 식 (4.14)는 Wilmott (2001, p. 196)을 참고하였다.

다음으로 Geometric Variance-Gamma Process 주가모형 가정하에서 각 주가의 변동성 (volatility) σ_i^{VG} 는 식 (4.6)의 각 주가 수익률분포의 중심적률과의 관계를 나타내는 공식 중 두 번째와 네 번째 공식을 이용하여 추정할 수 있고, 상관계수 (correlation coefficient) ρ^{VG} 는 식 (4.12)에 의하여 식 (4.15)과 같이 나타낼 수 있고 이를 활용하면 ρ^{VG} 의 추정량을 구할 수 있다.

$$\rho^{VG} = \frac{\left(\frac{\text{Cov}(X_1^{VG}(t), X_2^{VG}(t))}{t} \right) - \theta_1 \theta_2 \nu}{\sigma_1^{VG} \sigma_2^{VG}} \quad (4.15)$$

다음으로 Geometric Brownian Motion 주가모형 가정하의 상관계수와 Geometric Variance-Gamma Process 주가모형 가정하의 상관계수가 어떤 관계를 갖는지 알아보도록 하자. 우선, Geometric Brownian Motion 주가모형에서의 공분산 (covariance)은 $\text{Cov}(Y_1(t), Y_2(t)) = \rho \sigma_1 \sigma_2 t$ 이고, Geometric Variance-Gamma Process 주가모형에서의 공분산은 $\text{Cov}(X_1^{VG}(t), X_2^{VG}(t)) = \theta_1 \theta_2 \nu t + \rho^{VG} \sigma_1^{VG} \sigma_2^{VG} t$ 이다. 이때 두 공분산은 동일하므로 그 관계식은

$$\rho \sigma_1 \sigma_2 t = \theta_1 \theta_2 \nu t + \rho^{VG} \sigma_1^{VG} \sigma_2^{VG} t \quad (4.16)$$

이다. 따라서 식 (4.16)을 이용하여 Geometric Variance-Gamma Process 주가모형 가정하의 상관계수를 구하면 식 (4.17)과 같다.

$$\rho^{VG} = \frac{(\rho \sigma_1 \sigma_2 - \theta_1 \theta_2 \nu)}{\sigma_1^{VG} \sigma_2^{VG}} \quad (4.17)$$

5. Monte Carlo Simulation을 이용한 ELS 가격계산 과정

Geometric Brownian Motion (GBM) 가정하의 주가모형과 Geometric Variance-Gamma Process (GVG Process) 가정하의 주가모형의 시나리오를 각각 생성하여 ‘투 스톡-스텝다운 (2 stock-step down)형’ 주가지수 연동형 상품 (ELS)의 현재가치를 몬테카를로 시뮬레이션 방법론 (Monte-Carlo Simulation Method)을 적용하여 이 상품의 현재가치 (present value)를 계산하고, 이를 서로 비교한다. 또한, 상품의 현재가치에 영향을 주는 여러 가지 요소중에서 변동성 (volatility)과 상관계수 (correlation coefficient)의 변화에 따라 ELS의 현재가치가 어떻게 변화하는지 알아보도록 하자.

우선 Geometric Brownian Motion (GBM) 가정하의 주가모형과 Geometric Variance-Gamma Process (GVG Process) 가정하의 주가모형으로 각각의 주가지나리오를 생성한다. 그리고 생성된 각 주가지나리오에 대하여 몬테카를로 시뮬레이션 방법론을 적용하여 ELS의 현재가치를 계산한다. 위의 과정을 단계별로 살펴보면 다음과 같다. 아래의 [1단계]와 [2단계]를 $M(k = 1, 2, 3, \dots, M)$ 번 반복하여 실행한다.

[1단계] 주가시나리오의 생성

Geometric Brownian Motion (GBM) 가정의 주가모형은 1)의 알고리즘 (algorithm)을 따르고, Geometric Variance-Gamma Process (GVG Process) 가정의 주가모형은 2)의 알고리즘 (algorithm)을 따른다.

1) GBM 가정

GBM 가정하에서 i 를 주가의 종류라고 할 때 주가모형은

$$S_i(t + \Delta t) = S_i(t) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) \cdot \Delta t + \sigma_i \sqrt{\Delta t} \cdot Z_i \right] \quad (5.1)$$

$$\text{단, } (t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 2N\Delta t), \Delta t = \left(\frac{1}{N} \right), (i = 1, 2)$$

이다. 여기서 N 은 1년 동안의 주식 거래일수를 나타내며, 시뮬레이션 (simulation)에서는 246을 사용한다. 따라서, $2N$ 은 492를 나타낸다. 그리고 주가를 생성하기 위하여 정규난수 (normal random number) Z_i 가 필요한데, Z_1 과 Z_2 는 서로 상관성을 가지므로 식 (5.2)에 의하여 Z_1 과 Z_2 가 서로 상관관계를 가지도록 발생시켜야 한다.

$$V_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1^2) \text{이라 할때, } Z_1 = V_1 \\ Z_2 = \rho \cdot V_1 + \sqrt{(1 - \rho^2)} \cdot V_2, (i = 1, 2) \quad (5.2)$$

식 (5.1)과 식 (5.2)의 변동성 σ_i 와 상관계수 ρ 는 식 (4.13)과 식 (4.14)에 의하여 추정된 역사적 변동성 (historical volatility)과 상관계수 (correlation coefficient)이다.

2) GVG Process 가정

GVG Process 가정하에서 i 를 주가의 종류라고 할 때 주가모형은

$$S_i(t + \Delta t) \\ = S_i(t) \exp \left[(r + w_i) \Delta t + \theta G(\Delta t; 1, \nu) + \sigma_i^{VG} \sqrt{G(\Delta t; 1, \nu)} Z_i \right] \quad (5.3)$$

$$\text{단, } (t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 2N\Delta t), \Delta t = \left(\frac{1}{N} \right), (i = 1, 2),$$

$$w_i = \frac{1}{\nu} \cdot \ln \left\{ 1 - \left(\theta_i + \frac{1}{2} (\sigma_i^{VG})^2 \right) \cdot \nu \right\}$$

이고 주가를 생성하기 위하여 감마난수 (gamma random number) $G(\Delta t; 1, \nu)$ 는 Berman (1971)의 감마난수 생성방법에 의하여 구할 수 있고, 정규난수 (normal random number) Z_i 는 식 (5.4)에 의하여 구할 수 있다.

$$V_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1^2) \text{이라 할때, } Z_1 = V_1 \\ Z_2 = \rho^{VG} \cdot V_1 \\ + \sqrt{(1 - (\rho^{VG})^2)} \cdot V_2, (i = 1, 2) \quad (5.4)$$

식 (5.3)과 식 (5.4)의 $(\theta, \sigma^{VG}, \nu)$ 는 식 (4.6)의 수익률분포에 대한 중심적률과의 관계를 이용하여 구할 수 있고, 상관계수 ρ^{VG} 는 식 (4.15)에 의하여 구할 수 있다.

[2단계] 각각의 주가 시나리오에 대한 총수익률 계산

[1단계]에서 GBM 가정의 주가모형과 GVG Process 가정의 주가모형에 의하여 생성된 M 개의 주가시나리오에 대하여 각각 만기 (2년)까지 각 시점의 두 기초자산의 총수익률인

$$R_1(t) = \frac{S_1(t)}{S_1(0)}, R_2(t) = \frac{S_2(t)}{S_2(0)}, (t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 2N\Delta t)$$

를 구한다. 그리고 식 (3.1)의 각 시점의 조기 또는 만기상환 조건과 식 (3.2)의 상환조건 만족시 지급하는 상환금액에 의하여 해약을 고려할 경우 각각의 주가시나리오 M 개에 대하여

$$C = \sum_{j=1}^6 (1-p)^{2 \cdot t_j} \cdot e^{-rt_j} B_j \cdot I(A_j) \quad (5.5)$$

$$\text{단, } (t_1 = 0.5, t_2 = 1.0, t_3 = 1.5, t_4 = t_5 = t_6 = 2.0)$$

를 계산한다.

[3단계] Monte-Carlo Simulation을 이용한 ELS 상품의 현재가치 계산

해약을 고려하는 경우 식 (5.5)를 Risk-Neutral Measure하에서 구하면 다음과 같다.

$$E^Q \left[\sum_{j=1}^6 (1-p)^{2 \cdot t_j} \cdot e^{-rt_j} B_j \cdot I(A_j) \right] \quad (5.6)$$

$$\text{단, } t_1 = 0.5, t_2 = 1.0, t_3 = 1.5, t_4 = t_5 = t_6 = 2.0$$

위에서 생성한 M 개의 주가시나리오에 대하여 몬테카를로 시뮬레이션 방법론 (Monte-Carlo Simulation Method)을 이용하면

$$E^Q \left[\sum_{j=1}^6 (1-p)^{2 \cdot t_j} \cdot e^{-rt_j} B_j \cdot I(A_j) \right] \cong \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M C_k, (k = 1, 2, \dots, M) \quad (5.7)$$

를 구할 수 있다. 따라서 해약을 고려한 주가지수 연동형 상품 (ELS)의 현재가치

$$\text{현재가치} \cong \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M C_k + \left[(F(0) - SC) \cdot \sum_{j=0}^3 (1-p)^j p \right] \quad (5.8)$$

를 구할 수 있다. 여기에서 C_k 는 [2단계]의 식 (5.5)에 의하여 계산된 $C(k = 1, 2, 3, \dots, M)$ 를 나타낸다.

6. ELS의 현재가치 계산 결과

앞에서 각 단계별로 설명한 주가지수 연동형 상품 (ELS)의 현재가치를 계산하는 방법을 적용하여 ‘투스톡-스텝다운 (2 stock-step down)형’ 주가지수 연동형 상품 (ELS)의 현재가치를 계산하여 보자. 우선, Geometric Brownian Motion (GBM) 가정의 주가모형과 Geometric Variance-Gamma Process (GVG Process) 가정의 주가모형에 의한 주가지수나리오 생성과 ELS의 현재가치를 계산하기 위한 기본가정은 표 6.1과 같다. 여기에서 주가1(S_1)은 하이닉스 보통주이고 주가2(S_2)는 삼성물산 보통주로 기준가격은 2006년 8월 24일의 종가와 2006년 8월 25일 종가 (closing price)의 산술평균 (arithmetic average)이다. 이자율 (interest rate)과 해약률 (lapse rate)은 각각 5%와 0.1%의 상수값 (constant value)으로 가정하였다. 또한, GBM 및 GVG Process 가정하의 주가지수나리오에 대하여 몬테카를로 시뮬레이션 방법론 (Monte-Carlo Simulation Method)을 적용하여 10,000번의 경로를 생성한 후 ELS의 가격을 계산하였으며 시뮬레이션 오차를 살펴보기 위하여 동일 과정을 100회의 반복하였다.

표 6.1: 주가지수나리오 생성을 위한 기본가정

구분	값	
투자금	100	
주가1 기준가격(S_1)	35,100원	
주가2 기준가격(S_2)	26,000원	
이자율(r)	5%	
해약률(q)	0.1%	
Surrender Charge(SC)	0	
만기(년)	2	
만기(일; $2N$)	492	
시뮬레이션	경로수(회; m)	10,000
	횟수	100

다음으로 표 6.2는 4장의 각 가정된 주가모형에서 제시한 공식에 의하여 추정된 모수추정량 (parameter estimator)을 나타낸다. 각 주가의 변동성 (volatility)과 상관계수 (correlation coefficient) 등의 모수추정량은 과거 1년(2005년 9월 20일~2006년 9월 18일)의 주가데이터를 이용하여 추정 (estimation)하였다. 우선, GBM 가정의 주가모형에서 역사적변동성 (historical volatility)과 상관계수 (correlation coefficient)는 식 (4.13)과 식 (4.14)를 이용하여 추정하였다. 다음으로 GVG Process 가정의 주가모형에서 세 모수 (θ, σ^{VG}, ν)는 식 (4.6)의 수익률 분포의 중심적률과의 관계를 통하여 추정량을 구하였고, 상관계수는 식 (4.15)를 활용하여 구하였다.

표 6.1의 기본가정과 표 6.2의 모수추정량을 이용하여 가정된 두 주가모형인 GBM 가정하의 주가모형과 GVG Process 가정하의 주가모형을 이용하여 10,000번의 경로를

생성한 후 가격을 계산하였으며 시뮬레이션 오차의 통계량을 계산하기 위해서 100회를 반복하였으며 계산한 결과는 표 6.3과 같다.

표 6.3을 살펴보면 Geometric Variance-Gamma Process (GVG Process) 주가모형 가정하의 ELS 현재가치는 90.90으로 Geometric Brownian Motion (GBM) 주가모형 가정하의 ELS 현재가치 86.61보다 약 4.29정도 큰 값을 가진다. 이러한 결과는 1장에서 언급한 GBM 가정하의 주가모형을 이용한 option pricing은 저평가될 수 있다는 기존의 연구결과를 뒷받침한다. 또한, VG Process 주가모형 가정하의 표준편차가 GBM 가정하의 표준편차보다 약 0.04정도 작다. 이로 미루어 VG Process 가정하의 주가모형의 결과가 좀 더 안정적으로 나오는 것을 확인할 수 있다.

다음으로 변동성 (volatility)과 상관계수 (correlation coefficient)의 변화에 따른 민감도 분석 (sensitivity analysis)을 한다. 가정된 각 주가모형에서 상관계수를 고정시킨 후, 두 주가모형의 변동성이 변화하면서 ELS의 현재가치에 어떤 영향을 미치는지 분석한

표 6.2: 가정된 각 주가모형의 모수추정량

주가모형 종류	구분	추정량
GBM 가정의 주가 모형	Volatility1(σ_1)	0.4716
	Volatility2(σ_2)	0.3935
	Correlation(ρ)	0.4077
GVG Process 가정의 주가 모형	Volatility1 (σ_1^{VG})	0.4689
	Volatility2 (σ_2^{VG})	0.3912
	Correlation (ρ^{VG})	0.4087
	drift1 (θ_1)	0.6167
	drift2 (θ_2)	0.5329
	variance rate (ν_1)	0.0021
	variance rate (ν_2)	0.0021

표 6.3: 가정된 각 주가모형의 현재가치

	GBM 가정 (A)	VG Process 가정 (B)	차이 (B-A)
반복 횟수	100	100	
평균	86.6099	90.9002	4.2903
표준편차	0.2293	0.1916	-0.0377
최소값	86.1503	90.6866	4.5363
중앙값	86.6053	90.7541	4.1488
최대값	87.1154	91.2014	4.0860
왜도	0.3783	0.3844	
첨도	-0.4349	-1.5681	

표 6.4: GBM 가정

변동성1(σ_1)	변동성2(σ_2)	현재가치
0.4716	0.3935	86.61
0.20	0.20	101.49
	0.50	87.82
	0.80	74.88
0.50	0.20	88.35
	0.50	80.39
	0.80	70.85
0.80	0.20	77.32
	0.50	65.69
	0.80	59.86

표 6.5: VG Process 가정

변동성1(σ_1^{VG})	변동성2(σ_2^{VG})	현재가치
0.4689	0.3912	90.90
0.20	0.20	101.72
	0.50	91.32
	0.80	78.96
0.50	0.20	91.94
	0.50	83.05
	0.80	71.87
0.80	0.20	79.26
	0.50	71.51
	0.80	62.52

표 6.6: GBM 가정

상관계수(ρ)	현재가치
0.4077	86.61
-0.80	77.36
-0.60	79.69
-0.40	77.76
-0.20	81.02
0.00	79.06
0.20	83.20
0.40	84.18
0.60	84.72
0.80	88.24

표 6.7: VG Process 가정

GBM 상관계수(ρ)	VG Process 상관계수(ρ^{VG})	현재가치
	0.4087	90.90
-0.80	-0.813	87.04
-0.60	-0.611	85.82
-0.40	-0.409	85.20
-0.20	-0.206	86.41
0.00	-0.004	86.30
0.20	0.199	87.29
0.40	0.401	88.04
0.60	0.603	89.04
0.80	0.806	89.63

결과는 표 6.4과 표 6.5이다. 결과를 살펴보면, 변동성의 변화에 따른 ELS 현재가치는 변동성의 크기가 작은 조합일수록 현재가치가 큰 값을 가지고, 변동성이 큰 조합일수록 작은 값을 가지는 것을 확인할 수 있었고 그 차이는 약 40이다. 즉, 변동성의 크기가 클수록 주가가 상승할 가능성이 커서 조기상환 평가일에 상환될 가능성도 크지만, 반면에 하락할 가능성도 커서 만기시점에 상환이 된다면 원금손실의 가능성도 배제할 수 없다.

Geometric Brownian Motion (GBM) 가정하의 주가모형 변동성은 0.4716과 0.3935의 역사적 변동성 (historical volatility)으로 고정하고 Geometric Variance-Gamma Process (GVG Process) 가정하의 주가모형 변동성은 0.4689와 0.3912로 고정한 후, 상관계수를 0.2씩 변화시키면서 상관계수가 ELS의 현재가치에 어떤 영향을 미치는지 분석한 결과는 표 6.6와 표 6.7과 같다.

표 6.7의 GVG Process 가정하의 상관계수는 식 (4.17)의 ρ 와 ρ^{VG} 의 관계를 이용하여 GBM 상관계수에 대응하는 VG Process의 상관계수를 구하여 분석하였다. 전반적으로 GBM 가정하의 주가모형과 GVG Process 가정하의 주가모형에서의 가격계산의 결과는 서로 비슷한 형태를 가지나 GVG Process 주가모형 가정하에서 약간 큰 값을 가진다. 또한, 상관성이 0에 가까우면 현재가치가 작아지고 상관성이 커지면 현재가치가 커지는 경향을 가지는 것을 확인할 수 있다.

7. 결론

본 연구의 의의는 최근 많이 출시되고 있는 ‘투스톡-스텝다운 (2 stock-step down)형’ 주가지수 연동형 상품 (ELS)에 대하여 Geometric Brownian Motion (GBM) 가정하의 주가모형과 Geometric Variance-Gamma Process (GVG Process) 가정하의 주가모형을 이용하여 현재가치를 계산하고, 이를 서로 비교하여 보았다. 그 결과 GVG Process 주가모형 가정하의 ELS 현재가치는 GBM 주가모형 가정하의 ELS 현재가치보다 큰 값을 가지는 것을 확인할 수 있다. 이는 현재 파생금융상품의 가격결정에 널리 사용되고 있는 GBM 가정하의 주가모형을 이용한 option pricing은 저평가될 수 있다는 기존의 연구를 뒷받침할 수 있다. 따라서 기초자산의 이상적인 수익률 분포를 위하여 변동성 (volatility)뿐만 아니라 왜도 (skewness)와 첨도 (kurtosis)의 적률모수를 고려하여야 한다는 것을 알 수 있다. 또한, ELS의 현재가치에 영향을 미치는 여러 가지 요소 중 변동성과 상관계수의 변화에 따른 민감도 분석 (sensitivity analysis)도 함께 제시함으로써 변동성의 변화에 따른 ELS 현재가치는 변동성의 크기가 작은 조합일수록 현재가치가 큰 값을 가지고, 변동성이 큰 조합일수록 작은 값을 가지는 것을 확인할 수 있다.

아울러 Geometric Variance-Gamma Process (GVG Process) 주가모형 가정하에서 적률모수를 추정할 때 보다 정교한 모수적 또는 비모수적인 추정방법을 적용한다면 더 정확한 ELS의 현재가격을 산출할 수 있을 것이고 또한 이러한 상품의 현재가치 계산시 명시적인 공식 (explicit formula) 형태로 유도하는 등의 추가적인 분석이 필요할 것이라고 생각한다.

참고문헌

- Bates, D. S. (1995). Post-crash moneyiness biases in S&P 500 futures options. Rodney, L. *White Center working paper*, Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA.
- Berman, M. B. (1971). Generating gamma distribution variates for computer simulation models. *Technical Report*, R-641-PR, Rand Corporation.
- Black, F. (1975). Fact and fantasy in the use of option. *Financial Analyst Journal*, **31**, 36-72.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and other corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659.

- De Jong, F., Kemna, A. and Kloeck, T. (1990). *The Impact of Option Expirations on the Dutch Stock Market*. Erasmus University.
- Engle, R. F. and Gloria, G.-R. (1989). Semiparametric ARCH Models. *Economics Working Paper Series*, Department of Economics, University of California, San Diego.
- Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1996). Actuarial bridges to dynamic hedging and option pricing. *Insurance: Mathematics and Economics*, **18**, 183–218.
- Heston, S. L. (1993). Invisible parameters in option prices. *The Journal of Finance*, **48**, 933–947.
- Jaimungal, S. (2004). Pricing and hedging equity indexed annuities with variance-gamma deviates. *Working Paper*, Department of Statistics, University of Toronto.
- Madan, D. B., Carr, P. P. and Chang, E. C. (1998). The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, **2**, 79–105.
- Madan D. B. and Milne, F. (1991). Option pricing with VG martingale components. *Mathematical Finance*, **1**, 39–55.
- Papaioannou, M. G. and Temel, T. (1993). Portfolio performance of the SDR and reserve currencies: Tests using the ARCH methodology. *International Monetary Fund, Staff Papers - International Monetary Fund*, Washington.
- Wilmott, P. (2001). *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, New York.

[Received November 2006, Accepted July 2007]