The Korean Communications in Statistics **Vol. 14** No. 2, 2007, pp. 355–363

Bayesian Estimation of the Two-Parameter Kappa Distribution*

Mira Oh[1] Sunworl Kim[2] Jeong Soo Park[3] and Young Sook Son[4]

Abstract

In this paper a Bayesian estimation of the two-parameter kappa distribution was discussed under the noninformative prior. The Bayesian estimators are obtained by the Gibbs sampling. The generation of the shape parameter and scale parameter in the Gibbs sampler is implemented using the adaptive rejection Metropolis sampling algorithm of Gilks *et al.* (1995). A Monte Carlo study showed that the Bayesian estimators proposed outperform other estimators in the sense of mean squared error.

Keywords: Two-parameter Kappa distribution; Bayesian estimation; noninformative prior; Gibbs sampling; adaptive rejection Metropolis sampling.

1. 서론

카파분포 (Kappa distribution)는 오른쪽으로 긴 꼬리를 가지는 양의 비대칭 분포로서 감마분포와 로그정규분포와 함께 강수량이나 풍속자료를 예측하는데 유용하게 사용된다 (Hosking와 Wallis, 1997; Park과 Jung, 2002; Mason 등, 1999).

Mielke (1973)에 의해 제안된 2-모수 카파분포의 확률밀도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$f(X \mid \alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left\{\alpha + \left(\frac{X}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}^{-\frac{(\alpha+1)}{\alpha}}, \quad X > 0,\ \alpha,\ \beta > 0, \tag{1.1}$$

여기서 α는 형태 (shape) 모수이고 β는 척도 (scale) 모수이다.

---

* This research was supported by the Program for the Training of Graduate Students in Regional Innovation which was conducted by the Ministry of Commerce Industry and Energy of the Korean Government.

1) Doctoral course, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea. E-mail : omr@chonnam.ac.kr

2) Doctoral course, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea. E-mail : sunworl@gmail.com

3) Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea. E-mail : jspark@chonnam.ac.kr

4) Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea. Correspondence : ysson@chonnam.ac.kr

박경수 (2006)는 적률 추정치, L-적률 추정치, 최우 추정치를 유도하여 이들의 성능을 모의실험을 통하여 비교하였다. 적률 추정치와 L-적률 추정치를 구하기 위하여 α에 대한 제약조건이 있는 경우는 hybrid Newton-Raphson 알고리즘을 사용하였고, 최우 추정치는 quasi-Newton 최적화 알고리즘을 사용하였다. 최우 추정법은 대표본인 경우가 성능이 좋다고 알려져 있으므로, 소표본에 대한 세 가지 추정방법들을 비교한 결과 소표본에서는 L-적률 추정법이 좋다는 결과를 얻었다. 적률 추정치, L-적률 추정치, 최우 추정치를 구하는 절차에 대해서는 박정수 (2006)에 매우 잘 소개되어 있다.

Gilks와 Wild (1992)의 적응 기각 표집 (adaptive rejection sampling: ARS) 알고리즘과 ARS 알고리즘에 Metropolis-Hastings 알고리즘을 추가하여 구성된 Gilks 등 (1995)의 적응 기각 메트로폴리스 표집 (adaptive rejection Metropolis sampling: ARMS) 알고리즘은 표집하고자 하는 확률함수에 매우 근사하게 추정한 함수를 표집확률함수로 사용함으로서 확률분포의 정규화상수 (normalizing constant)를 모를 때 전통적으로 사용되어 온 기각표집 (rejection sampling)방법 (Ross, 1997)을 크게 개선시켰다. 흔히 최우 추정치가 반복에 의한 수치분석이나 근사 (approximation)에 의해 어렵게 구해지는 양의 비대칭분포들의 경우에 ARS 혹은 ARMS를 포함하는 깁스샘플링 (Gibbs sampling)에 의한 베이지안 모수추정치는 기존의 추정치들에 비해 보다 우수한 추정 결과를 보여주었다. 이러한 결과는 Son과 Oh (2006)의 2-모수 감마분포, Oh 등 (2007)의 4-모수 감마분포, 그리고 Son과 Oh (2007)의 2-모수 나카가미 (Nakagami) 분포에 대한 베이지안 모수추정의 모의실험 결과로부터 확인할 수 있다.

본 논문에서는 2-모수 카파분포의 모수추정을 위하여 깁스샘플링을 사용한 베이지안 모수추정 절차를 제안한다. 형태모수 α와 척도모수 β의 조건부 사후분포 (conditional posterior distribution)는 각각 로그-오목함수라고 확신할 수 없으므로 ARMS 알고리즘에 의해 모수생성을 할 수 있도록 깁스샘플러 (Gibbs sampler)를 구성하였다.

논문의 2절에서는 베이지안 모수추정을 위한 무정보적 사전분포를 정의하고, 완전조건부 사후분포 (full conditional posterior distribution)를 계산하여 모수추정을 위한 깁스샘플링 알고리즘을 구성한다. 3절에서는 2절에서 제안한 베이지안 모수 추정법과 박정수 (2006)에 제시된 적률 추정법, L-적률 추정법, 그리고 최우 추정법의 결과를 비교해 보기 위하여 모의실험을 수행하였다.

2. 베이지안 모수추정

$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$가 2-모수 카파분포 식 (1.1)로부터 추출된 확률표본이라고 하면 우도함수 (likelihood function) $L(\alpha, \beta \mid \mathbf{X})$는 다음과 같이 정의된다.

$$L(\alpha, \beta \mid \mathbf{X}) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \left\{\alpha + \left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}^{-\frac{(\alpha+1)}{\alpha}}, \quad \alpha,\ \beta > 0. \tag{2.1}$$

2-모수 카파분포의 모수들이 서로 독립이라는 가정 하에서 다음과 같은 무정보적 사

전분포 (noninformative prior)를 가정하기로 하자.

$$\pi(\alpha, \beta) \propto \frac{1}{\beta}\,. \tag{2.2}$$

결합사후분포는 우도함수 식 (2.1)과 사전분포 식 (2.2)의 곱에 의하여 다음과 같이 얻어진다.

$$p(\alpha, \beta \mid \mathbf{X}) \propto \frac{\alpha^n}{\beta^{n+1}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left\{\alpha + \left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}^{-\frac{(\alpha+1)}{\alpha}}. \tag{2.3}$$

결합사후분포 식 (2.3)으로 부터 완전 조건부 사후분포는 식 (2.4)와 식 (2.5)로 나타낼 수 있다.

$$p(\alpha \mid \beta, \mathbf{X}) \propto g_\alpha(\alpha) = \alpha^n \cdot \prod_{i=1}^{n} \left\{\alpha + \left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}^{-\frac{(\alpha+1)}{\alpha}}. \tag{2.4}$$

$$p(\beta \mid \alpha, \mathbf{X}) \propto g_\beta(\beta) = \frac{1}{\beta^{n+1}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left\{\alpha + \left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}^{-\frac{(\alpha+1)}{\alpha}}. \tag{2.5}$$

모수 추정은 완전조건부 사후분포들로 구성되는 깁스샘플러를 사용한다. 확률밀도함수 $f(z)$의 정규화 상수 (normalizing constant)를 알 수 없을 때, 즉 $f(z) \propto g(z)$일 때 $g(z)$이 로그-오목성 (log-concavity)을 갖는다면 ARS 알고리즘을 사용하여 확률분포 $f(z)$을 따르는 확률변수를 생성할 수 있다. 그러나 $g(z)$이 로그-오목성을 가지지 않는다면 ARS 알고리즘을 사용할 수 없다. 이 경우에는 $f(z)$에 적합한 함수를 찾는 방법을 제공하는 ARS 알고리즘에 Metropolis-Hastings 알고리즘을 더하여 만들어진 ARMS 알고리즘을 사용한다. 즉, Z의 공간 (support) D_Z위의 $k+2$개의 좌표점들을 $T_k = \{(z_0, z_1, \ldots, z_{k+1}) \mid z_0 \le z_1 \le \cdots \le z_{k+1}\}$이라 놓자. 이때 z_o와 z_{k+1}은 D_z에서 가능한 z의 하한값 및 상한값에 해당한다. $1 \le i \le j \le k$에 대하여 $L_{ij}(z; T_k)$를 두 개의 점들 $(z_i, \ln g(z_i))$과 $(z_j, \ln g(z_j))$를 연결하는 직선이라 놓으면 조각 선형 덮개 (piecewise linear upper hull)함수 $u_k(z)$는 다음과 같이 정의된다.

$$u_k(z) = \max[L_{i,i+1}(z; T_k), \min\{L_{i-1,i}(z; T_k), L_{i+1,i+2}(z; T_k)\}], \quad z_i \le z \le z_{i+1}.$$

ARS단계에서는 $\exp\{u_k(z)\}$가 T_k에서의 기각 덮개 함수(rejection envelope function)로, 또한 표집확률함수로서는

$$S_k(z) = \exp\{u_k(z)\} / \int_{D_z} \exp\{u_k(z)\} dz$$

가 사용된다.

이제 형태모수 α, 척도모수 β의 조건부 사후분포가 로그-오목함수인지를 검토해 보기로 하자. 식 (2.4) 및 식 (2.5)에 각각 로그를 취한 함수들, $\ln p(\alpha \mid \beta, \mathbf{X})$, $\ln p(\beta \mid \alpha, \mathbf{X})$을 각각 α, β에 관해 2차 미분한 함수는

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln p(\alpha \mid \beta, \mathbf{X}) = -\frac{n}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \sum_{i=1}^{n} \ln\left[\alpha + (X_i/\beta)^{\alpha}\right] - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{1 + (X_i/\beta)^{\alpha} \ln(X_i/\beta)}{\alpha + (X_i/\beta)^{\alpha}}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(X_i/\beta)^{\alpha}\left[\ln(X_i/\beta)\right]^2}{\alpha+(X_i/\beta)^{\alpha}}\right\} \\
&+\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1+(X_i/\beta)^{\alpha}\ln(X_i/\beta)}{\alpha+(X_i/\beta)^{\alpha}}\right\}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln p(\beta\mid\alpha,\mathbf{X}) = {}& \frac{(n+1)}{\beta^2}-\frac{(\alpha+1)^2}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(X_i/\beta)^{\alpha}}{\alpha+(X_i/\beta)^{\alpha}}\right\} \\
&+\frac{\alpha(\alpha+1)^2}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(X_i/\beta)^{\alpha}}{\alpha+(X_i/\beta)^{\alpha}}\right\}^2
\end{aligned}
$$

과 같이 표현되므로 이들 값이 항상 음이라고 말할 수학적 증거는 없다. 따라서 형태모수 α와 척도모수 β의 조건부 사후분포는 로그-오목함수라고 단정 지을 수 없다. 이제, α,β의 조건부 사후분포로부터, α,β를 생성하기 위해서 ARMS 알고리즘을 포함하는 깁스샘플러를 다음과 같이 구성한다.

<u>깁스샘플링 알고리즘</u>

[**단계 1**] 초기화 단계 : 척도모수 β의 초기화 값을 $\beta^{(0)}$으로 설정한다.

[**단계 2**] 반복 단계 : $i=0,1,2,\ldots$

- **(i)** $p(\alpha^{(i+1)}\mid\beta^{(i)},\mathbf{X})$로부터 $\alpha^{(i+1)}$을 생성하기 위하여 ARMS 알고리즘을 수행한다.
- **(ii)** $p(\beta^{(i+1)}\mid\alpha^{(i+1)},\mathbf{X})$로부터 $\beta^{(i+1)}$을 생성하기 위하여 ARMS 알고리즘을 수행한다.

< $\alpha^{(i+1)}$을 생성하기 위한 ARMS 알고리즘 >

[**ARS단계 2.1.1**] 초기화 단계

- $D_\alpha=\{\alpha\mid\alpha>0\}$의 공간에서 α축 좌표점의 수 k와 좌표점 T_k을 정하고 T_k에서의 조각 선형 덮개함수 $u_k(\alpha)$를 구한다.

[**ARS단계 2.1.2**] 표집 단계

- 표집확률함수 $S_k(\alpha)$로부터 α^*를 생성한다.
- 표준균일분포 $U(0,1)$로부터 난수 u를 생성한다.
- $u\leq g_\alpha(\alpha^*)/\exp\{u_k(\alpha^*)\}$이면 $\alpha_A=\alpha^*$으로 채택하고 [MH단계 2.1.4]의 Metropolis-Hastings 단계로 간다. 그렇지 않으면 α^*를 기각하고 [ARS단계 2.1.3]의 갱신단계로 간다.

[**ARS단계 2.1.3**] 갱신 단계

- 기각된 α^*를 α축 좌표점에 추가하여 좌표점 T_{k+1}을 만들어 [ARS단계 2.1.2]를 수행한다.

[**MH단계 2.1.4**] Metropolis-Hastings 단계

- 표준균일분포 $U(0,1)$로부터 난수 u를 생성한다.
- $u \leq \min\left\{1, \frac{g_\alpha(\alpha_A)\ \cdot\ \min\{g_\alpha(\alpha^{(i)}),\ \exp[u_k(\alpha^{(i)})]\}}{g_\alpha(\alpha^{(i)})\ \cdot\ \min\{g_\alpha(\alpha_A),\ \exp[u_k(\alpha_A)]\}}\right\}$이면 $\alpha^{(i+1)} = \alpha_A$으로 갱신하고, 그렇지 않으면 $\alpha^{(i+1)} = \alpha^{(i)}$으로 한다.

< $\beta^{(i+1)}$ 을 생성하기 위한 ARMS 알고리즘 >

[**ARS단계 2.2.1**] 초기화 단계

- $D_\beta = \{\beta \mid \beta > 0\}$의 공간에서 β축 좌표점의 수 k와 좌표점 T_k을 정하고 T_k에서의 조각 선형 덮개함수 $u_k(\beta)$를 구한다.

[**ARS단계 2.2.2**] 표집 단계

- 표집확률함수 $S_k(\beta)$로부터 β^*를 생성한다.
- 표준균일분포 $U(0,1)$로부터 난수 u를 생성한다.
- $u \leq g_\beta(\beta^*) / \exp\{u_k(\beta^*)\}$이면 $\beta_A = \beta^*$으로 채택하고 [MH단계 2.2.4]의 Metropolis-Hastings 단계로 간다. 그렇지 않으면 β^*를 기각하고 [ARS단계 2.2.3]의 갱신단계로 간다.

[**ARS단계 2.2.3**] 갱신 단계

- 기각된 β^*를 β축 좌표점에 추가하여 좌표점 T_{k+1}을 만들어 [ARS단계 2.2.2]를 수행한다.

[**MH단계 2.2.4**] Metropolis-Hastings 단계

- 표준균일분포 $U(0,1)$로부터 난수 u를 생성한다.
- $u \leq \min\left\{1, \frac{g_\beta(\beta_A)\ \cdot\ \min\{g_\beta(\beta^{(i)}),\ \exp[u_k(\beta^{(i)})]\}}{g_\beta(\beta^{(i)})\ \cdot\ \min\{g_\beta(\beta_A),\ \exp[u_k(\beta_A)]\}}\right\}$이면 $\beta^{(i+1)} = \beta_A$으로 갱신하고, 그렇지 않으면 $\beta^{(i+1)} = \beta^{(i)}$으로 한다.

3. 모의실험

본 논문에서 제안된 2-모수 카파분포의 베이지안 모수추정 절차의 평가를 위하여 다음과 같은 모의실험을 수행하였다. 모수 $(\alpha, \beta) = (2.1, 1), (3, 1), (5, 1), (7, 1), (4, 1), (4, 3),$

$(4,5),(4,7)$를 가지는 2-모수 카파분포에 대하여 표본의 크기 $n = 15, 30, 50, 100$의 자료들이 각각 100회 반복 생성되어 모의실험에서 사용되었다.

모든 계산수행은 MATLAB (2002)을 사용하였다. 깁스샘플러의 초기화 단계에서 모수의 초기값으로는 최우 추정치를 사용하였다. ARMS에서 축 좌표점의 초기값으로는 95% 근사최우구간의 하한과 상한의 두 개 좌표점을 사용하였고, 이후 깁스샘플링의 매회 축 좌표점의 초기화 값으로는 직전 반복에서 구해지는 표집확률함수의 10% 및 90% 백분위점을 사용하였다.

깁스샘플링에서는 처음 100번까지는 생성된 표본을 버린 후 반복회수를 100회부터 시작하여 100회씩 증가시킨 각 모수 추정치의 평균제곱오차 (mean squared error: MSE)의 결과들을 살펴보는 것으로 깁스샘플링의 수렴성을 검토하였으며 최종적으로 1,000개의 반복으로 얻어지는 모수 생성값들이 사후분포를 구성하는데 사용되어 사후분포의 평균값을 모수의 베이지안 추정치로 사용하였다.

표 3.1과 표 3.2는 100회 반복한 모의실험의 결과로부터 얻어진 적률 추정치 (MME), L-적률 추정치 (LME), 최우 추정치 (MLE), 그리고 베이지안 추정치 (BAYES)의 평균 (mean), 표준편차 (standard deviation: SD)가 제시되었다. 이때 표에서 MLE의 SD 칸에 괄호안의 수치는 MLE의 근사 표준편차 (asymptotic SD)로서 Fisher의 관측정보행렬 (observed information matrix)의 역행렬의 제곱근에 의해서 계산된다. 특히 소표본 $(n = 15)$에서 근사 표준편차와 모의실험 표준편차 (simulated SD)가 많은 차이가 나는 것은 근사 표준편차가 대표본의 가정 하에서 얻어지기 때문일 것이다. 전반적으로 척도모수를 고정하였을 때는 형태모수가 커질수록, 형태모수를 고정하였을 때는 척도모수가 커질수록, 그리고 표본의 크기가 작을수록 추정의 오차가 커짐을 알 수 있다. 모의실험에서 사용된 모든 모형과 모든 표본의 크기에 대하여 베이지안 모수추정의 결과가 보다 우수함을 확인할 수 있다.

4. 맺음말

본 논문은 2-모수 카파분포에서 형태모수 및 척도모수에 대해 무정보적 사전분포를 가정한 후, 깁스샘플링에 의해 모수를 추정하는 베이지안 절차를 제시하였다. 각 모수를 추정하기 위한 깁스샘플러에서 형태모수와 척도모수의 조건부 사후분포는 로그-오목함수가 아니므로 Gilks 등 (1995)의 적응 기각 메트로폴리스 표집 (adaptive rejection Metropolis sampling: ARMS) 알고리즘을 이용하여 모수를 생성하였다. 본 논문에서는 제안한 베이지안 모수추정 절차의 타당성을 검토하기 위하여 8개의 제한된 모형에 대한 모의실험을 수행하였고 그 결과는 기존의 추정방법 결과보다 우수하였다.

한편, 지금까지 카파분포의 공액사전분포 (conjugate prior)는 개발되지 않았으므로 본 논문에서는 무정보적 사전분포를 사용하였다. 이때, 무정보적 사전분포가 부적절한 (improper) 분포이므로 결합 사후분포가 적절한 (proper) 분포임을 증명하는 것이 선결되어야 할 과제이다. 그러나 이에 대한 해석학적인 증명이 아직까지는 불가능하다. 본 연구에서 수행한 다양한 모의실험에서 모수의 추정치가 발산하는 징후는 전혀 발견되

표 3.1: 모수추정에 대한 모의실험 결과, ($\alpha = 2.1, 3, 5, 7, \beta = 1$, 반복 100회)

n	추정방법	$\alpha = 2.1$		$\beta = 1$		$\alpha = 3$		$\beta = 1$	
		Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
	MME	3.8159	2.0036	1.3714	0.4297	4.9060	3.3243	1.1919	0.3460
	LME	2.8263	1.8018	1.0530	0.3643	3.6789	3.0566	0.9989	0.3332
15	MLE	2.9428	1.8493	1.1205	0.4050	4.2054	2.6353	1.0854	0.4173
			(2.1611)		(0.3960)		(4.1153)		(0.3812)
	BAYES	2.1951	0.7208	1.0091	0.1889	3.2752	1.2972	1.0178	0.1780
	MME	3.0901	0.7950	1.3173	0.3413	4.5638	2.4954	1.1557	0.2149
	LME	2.3917	0.8164	1.0219	0.2615	3.7382	1.9490	1.0403	0.2337
30	MLE	2.3519	0.9318	1.0213	0.2400	3.9883	2.4094	1.0721	0.2195
			(0.8369)		(0.2546)		(2.4514)		(0.2395)
	BAYES	2.1567	0.3594	1.0198	0.1334	3.1152	1.0061	1.0126	0.1145
	MME	2.9552	0.5276	1.2848	0.2232	3.9177	1.2215	1.0937	0.1637
	LME	2.3052	0.5384	1.0413	0.1921	3.4824	1.4741	1.0262	0.2360
50	MLE	2.2691	0.5451	1.0383	0.1924	3.4889	1.1971	1.0199	0.1800
			(0.5940)		(0.1944)		(1.1090)		(0.1715)
	BAYES	2.1152	0.3273	1.0089	0.0906	3.0587	0.6592	1.0093	0.0933
	MME	2.7035	0.3194	1.2598	0.1578	3.5672	0.6500	1.0837	0.1109
	LME	2.2082	0.3788	1.0380	0.1449	3.2447	0.6670	1.0260	0.1253
100	MLE	2.1551	0.3407	1.0295	0.1414	3.2528	0.6168	1.0332	0.1229
			(0.3532)		(0.1372)		(0.6412)		(0.1213)
	BAYES	2.1098	0.2482	1.0076	0.0300	3.0252	0.3575	1.0041	0.0265 0

n	추정방법	$\alpha = 5$		$\beta = 1$		$\alpha = 7$		$\beta = 1$	
		Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
	MME	7.2164	5.3668	1.0320	0.2548	8.6122	5.4744	0.9439	0.2020
	LME	5.9366	4.9746	0.9840	0.3072	6.0043	5.4827	0.9395	0.3760
15	MLE	6.8872	4.0006	1.1294	0.3211	9.0468	4.3104	1.0229	0.2142
			(10.1077)		(0.3717)		(18.1787)		(0.3856)
	BAYES	5.5625	1.7092	1.0273	0.1715	7.5642	2.3933	1.0159	0.1691
	MME	6.8603	4.4072	1.0649	0.2057	8.3901	5.0099	0.9818	0.1643
	LME	5.6530	4.7459	1.0692	0.4992	6.7324	4.9474	0.9893	0.3410
30	MLE	6.5828	3.4875	1.0731	0.2369	8.8100	4.2302	1.0277	0.1500
			(4.2681)		(0.2181)		(7.5065)		(0.2060)
	BAYES	5.2788	1.3965	1.0106	0.1158	7.4182	2.0651	1.0115	0.0959
	MME	6.5480	3.9960	1.0331	0.1806	8.8936	5.2392	1.0070	0.1670
	LME	5.8064	4.5344	1.0070	0.3336	7.7725	4.3178	0.9943	0.2709
50	MLE	6.4680	3.0346	1.0415	0.1746	8.5330	3.8428	1.0113	0.1311
			(3.3126)		(0.1591)		(4.4913)		(0.1476)
	BAYES	5.1470	0.9739	1.0081	0.0819	7.1249	1.4750	1.0035	0.0911
	MME	6.0050	2.7345	1.0188	0.1153	8.6492	4.4442	1.0153	0.1249
	LME	5.6606	2.5251	1.0217	0.2339	7.8510	4.7581	0.9964	0.2209
100	MLE	5.5350	1.4447	1.0072	0.0980	8.3734	2.8748	1.0282	0.0985
			(1.4300)		(0.1049)		(2.6889)		(0.0966)
	BAYES	5.0971	0.8617	1.0052	0.0400	7.0963	0.9728	1.0031	0.0400

표 3.2: 모수추정에 대한 모의실험 결과, ($\alpha = 4, \beta = 1, 3, 5, 7$, 반복 100회)

n	추정방법	$\alpha = 4$		$\beta = 1$		$\alpha = 4$		$\beta = 3$	
		Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
15	MME	6.1016	4.3967	1.0702	0.2640	6.1531	4.4792	3.1922	0.8773
	LME	5.2420	4.4715	0.9569	0.3132	5.4785	4.3374	3.0010	1.3726
	MLE	5.8161	3.8488	1.1012	0.3033	5.7135	3.4636	3.2620	0.9296
			(7.5805)		(0.3811)		(7.1414)		(1.3553)
	BAYES	4.2420	1.3909	1.0326	0.1603	4.1541	1.3215	3.0963	0.6548
30	MME	5.7488	4.2394	1.0840	0.2175	5.4259	4.5857	3.2339	0.6254
	LME	4.9909	4.3596	1.0041	0.2110	4.9419	3.9420	3.0798	0.7663
	MLE	4.9938	2.7551	1.0471	0.2198	5.3008	3.1739	3.1798	0.6639
			(2.8099)		(0.2210)		(3.8632)		(0.6884)
	BAYES	4.2903	1.0764	1.0282	0.1114	4.1217	1.0001	3.0428	0.5226
50	MME	5.3933	2.8311	1.0834	0.1860	5.1536	2.4331	3.1704	0.4775
	LME	4.6639	2.1828	1.0675	0.3239	4.7548	2.8382	3.0565	0.6768
	MLE	5.0422	2.3872	1.0591	0.1855	4.8991	2.6817	3.0947	0.5063
			(1.9518)		(0.1670)		(2.1315)		(0.4932)
	BAYES	4.1799	0.8703	1.0300	0.0949	4.1025	0.8414	3.0566	0.2742
100	MME	4.8277	1.3612	1.0409	0.1158	4.5638	1.2118	3.0768	0.3730
	LME	4.2823	1.5112	1.0301	0.1926	4.3226	1.3670	3.0466	0.6608
	MLE	4.2466	0.9830	1.0197	0.1049	4.3826	1.1982	3.0354	0.3499
			(0.9680)		(0.1126)		(1.0064)		(0.3308)
	BAYES	4.0920	0.4987	1.0013	0.0728	4.0281	0.5063	3.0087	0.1131
n	추정방법	$\alpha = 4$		$\beta = 5$		$\alpha = 4$		$\beta = 7$	
		Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
15	MME	6.1947	4.9592	5.2855	1.4214	6.3997	4.8302	7.3401	2.1238
	LME	4.4358	4.0896	4.5730	1.6814	5.0226	4.0519	6.7946	2.8452
	MLE	5.4185	3.6890	4.9933	1.3099	6.0334	3.7533	7.1913	2.2044
			(8.4912)		(1.9017)		(7.8662)		(2.6188)
	BAYES	4.1065	1.1454	5.0586	0.8744	4.1164	1.0930	7.0896	0.9068
30	MME	5.5574	3.4580	5.3134	0.9380	5.6814	4.3308	7.4247	1.4501
	LME	5.0136	3.9651	5.0422	1.1780	4.9419	3.6091	7.1389	2.1159
	MLE	5.1532	3.0723	5.1469	1.0075	5.4046	3.2571	7.2768	1.5916
			(3.4656)		(1.1077)		(3.4648)		(1.5367)
	BAYES	4.0896	1.0003	5.0436	0.6989	4.1112	1.0465	7.0422	0.8853
50	MME	5.3449	2.7820	5.3679	0.8444	4.9571	2.1433	7.3573	1.1893
	LME	4.9289	2.6748	5.2132	1.1704	4.4612	2.4517	7.0721	1.6247
	MLE	4.9402	2.3798	5.1937	0.8749	4.6848	2.2974	7.1902	1.2179
			(1.9537)		(0.8196)		(1.8609)		(1.1472)
	BAYES	4.0834	0.7224	5.0140	0.3324	4.0938	0.7239	7.0283	0.2540
100	MME	4.5199	1.0989	5.1656	0.5820	4.6462	1.4083	7.2953	0.8185
	LME	4.2150	1.2683	5.1038	1.0427	4.4261	1.9054	7.1654	1.3979
	MLE	4.2940	1.0289	5.0839	0.5727	4.2642	0.9760	7.1090	0.8022
			(0.9861)		(0.5595)		(0.9998)		(0.7873)
	BAYES	4.0336	0.4887	5.0171	0.2110	4.0178	0.4892	7.0056	0.3076

지 않았다.

향후의 연구에서는 Mielke (1973)의 3-모수 카파분포와 Hosking (1994)의 4-모수 카파분포에 대해서도 베이지안 모수추정을 적용하고자 한다.

참고문헌

박정수. (2006). 2-모수 카파분포에서의 추정 방법들의 비교. *Journal of the Korean Data Analysis Society*, **8**, 1199–1207.

Gilks, W. R., Best, N. G. and Tan, K. K. C. (1995). Adaptive rejection metropolis sampling within Gibbs sampling. *Applied Statistics*, **44**, 455–472.

Gilks, W. R. and Wild, P. (1992). Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling. *Applied Statistics*, **41**, 337–348.

Hosking, J. R. M. (1994). The four parameter Kappa distribution. *IBM Journal of Research and Development*, **38**, 251–258.

Hosking, J. R. M. and Wallis, J. R. (1997). *Regional Frequency Analysis: An Approach based on L-moments.* Cambridge University Press, Cambridge.

Park, J. S. and Jung, H. S. (2002). Modelling Korean extreme rainfall using a Kappa distribution and maximum likelihood estimate. *Theoretical and Applied Climatology*, **72**, 55–64.

Mason, S, J., Waylen, P. R., Mimmack, G. M., Rajaratnam, B. and Harrison, J. M. (1999). Changes in extreme rainfall events in South Africa. *Climatic Change*, **41**, 249–257.

Mielke, P. W. (1973). Another family of distributions for describing and analyzing precipitation data. *Journal of Applied Meteorology*, **12**, 275–280.

Oh, M., Kim, K., Cho, W. H. and Son, Y. S. (2007). Bayesian parameter estimation of the four parameter gamma distribution. *The Korean Communications in Statistics*, **14**, 255–266.

Ross, S. M. (1997). *Simulation.* 2nd ed., Academic Press.

Son, Y. S. and Oh, M. (2006). Bayesian estimation of the two-parameter gamma distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **35**, 285–293.

Son, Y. S. and Oh, M. (2007). Bayesian estimation of the Nakagami-m fading parameter. To appear in *The Korean Communications in Statistics.*

The MathWorks Inc. (2002). MATLAB/Statistics Toolbox. Version 6.5. Natick, MA.

[Received April 2007, Accepted June 2007]