

현장 적용성 향상 및 지반재료 물성의 불확실성 극복을 위한 수치해석법 개발 기초연구

김형목^{1)*}, 신중호²⁾, 井上純哉³⁾

A Study on Numerical Technique to Enhance In-Situ Applicability and to Overcome Uncertainty in Geo-Material Properties

Hyung-Mok Kim, Joong-Ho Synn and Junya Inoue

Abstract Material properties of geomaterials are usually heterogeneous. And the limited number of investigation for the subsurface material properties in terms of borholes are not sufficient enough for identifying the heterogeneity. In most civil engineering work, pre-investigation results can be different from those by in-situ inspection during the construction work. With these points of view, a new analysis concept aiming to evaluate the uncertainty resulted from the heterogeneity of the geomaterial properties as well as to enhance a construction workability and design quality by a prompt feedback of in-situ conditions was proposed. It was accomplished by linking the Element Free analysis and pre-developed stochastic methods represented by Karhunen-Loeve expansion. Simple 1D problem was solved by the developed method, and its validity as well as the characteristic results by different stochastic methods were clarified.

Key words heterogeneity, uncertainty, Element Free analysis, Karhunen-Loeve expansion

초 록 일반적으로 지반재료의 물성은 불균질할 뿐만 아니라 제한된 수량의 시추공을 이용한 지반재료의 물성조사는 그 불균질성을 파악하기에 충분하지 못한 경우가 대부분이다. 또한, 지반 굴착 등의 토목공사에 있어서 굴착 결과로 얻어지는 현장조건은 사전 지반조사와 상이한 경우가 많으며 이를 반영한 해석조건 수정과정은 주요소해석으로 대표되는 기존해석의 경우 상당한 비용과 시간을 요구한다. 이러한 관점에서 본 연구에서는 무요소해석법과 연속확률변수의 급수전개법의 하나인 Karhunen-Loeve 전개법을 결합함으로써, 지반재료물성의 불균질성에 기인한 불확실성의 정량적 평가가 가능하고 현장조건 신속한 반영이 상대적으로 수월한 해석법의 개발을 위한 기초연구를 수행하였다. 이를 위해 개발된 해석법을 1차원 문제에 적용하여 타당성을 검증하고 서로 다른 해석결과의 특징을 비교·분석 하였다.

핵심어 불균질성, 불확실성, 무요소법, Karhunen-Loeve 전개법

1. 서 론

지반 재료 정수의 경우 계측 결과 수량의 부족으로 인한 불확실성 및 재료 정수 자체의 비균질성을 내포한다. 이러한 재료 정수의 불확실성을 평가하기 위한 해석법으로는 Monte Carlo Simulation(MCS)법이 대표

적이라 할 수 있다. MCS법은 기존의 해석수법을 수정 없이 그대로 적용할 수 있다는 장점이 있으나 발생확률이 매우 작은 사건에 대해 유의한 결과를 얻기 위해서는 상당량의 계산이 필요하다는 단점이 있다.

한편, 응답변수(응력계산의 경우 변위)의 평균·분산·확률밀도함수 등과 같은 통계량을 보다 손쉽게 구할 수 있는 해석법으로 Perturbation법(中桐滋 & 久田俊明, 1990, Zhang, 2002) 및 Spectral법(Ghanem & Spanos, 2003)이 보고된 바 있다. Perturbation법에서는 일반적인 결정론적 해석에서의 강성행렬을 응답변수의 통계량 계산에 그대로 사용할 수 있다는 장점이 있는 반면, 입력

¹⁾ 한국지질자원연구원 지반안전연구부 선임연구원

²⁾ 한국지질자원연구원 지반안전연구부 책임연구원

³⁾ 일본 동경대학교 재료공학과 조교수

* 교신저자 : kimh@kigam.re.kr

접수일 : 2007년 7월 30일

심사 완료일 : 2007년 8월 22일

재료정수의 분산이 평균 주위의 비교적 작은 범위에 분포한다는 가정에 기초하고 있기 때문에 재료 정수의 분산이 큰 문제에는 적용이 곤란한 결점이 있다. Spectral 법은 재료정수를 확률변수로 보고 Karhunen-Loeve(KL) 전개 및 Polynomial Chaos(PC) 전개를 적용함으로써 응답변수의 확률밀도함수를 단 한번의 계산을 통해 효율적으로 구할 수 있는 장점과 행렬계산을 위한 계산용량이 막대하게 증가한다는 단점을 가진다(Kim & Inoue, 2004).

상기 Perturbation법 혹은 Spectral법은 대부분 유한 요소해석과 결합된 확률유한해석법으로 다양한 문제에 적용되어오고 있다. 유한요소해석은 광범위한 공학문제에서 신뢰성 높은 해석을 임에 틀림없지만 복잡한 기하학적 문제 해석을 위해서는 해석시간 그 자체보다 해석 요소의 작성을 위한 전처리 과정에서 더욱 많은 시간을 소비하는 단점이 있다. 또한, 재료 비균질성 및 조사 수량의 한계에 기인한 불확실성을 내포하는 지반재료를 대상으로 하는 문제 해석에 있어서는 시공 중의 조사관측 결과를 해석에 feedback시켜 해석조건을 수정하는 경우도 자주 발생한다. 이러한 경우, 기 작성된 해석용 메쉬를 수정하는 것은 특히 3차원 문제의 경우 많은 시간과 노력이 필요할 것으로 예상된다. Belytschko et al. (1994)은 점점 정보만을 이용해 해석용 메쉬를 작성하지 않고 유한요소법과 동일한 계산과정을 가지는 Element Free Galerkin Method(EFGM)을 제안한 바 있다.

이에 본 연구에서는 EFGM을 Perturbation법 및 Spectral법을 이용하여 확장하고, 비균질성 현장지반재료에 유용한 해석틀로서 활용하기 위한 기초연구로서 1차원 문제에 적용해 보았다. 또한, MCS, Perturbation 및 Spectral법에 의한 해석결과를 비교하여 각 해석법의 특성을 파악하고 그 적용성 및 한계를 명확히 함을 목적으로 하였다.

2. Element Free Galerkin Method(EFGM)

본 장에서는 Belytschko et al.(1994)에 의해 제안된 Element Free Galerkin Method(EFGM)에 사용되는 이동최소자승법(Moving Least Squares Method) 및 가중함수(Weight Function)에 관해 간략히 설명한다.

2.1 이동최소자승법에 의한 형상함수의 유도

EFGM에 있어 적분영역 내 함수 $u(x)$ 에 대하여 평가점(X)에서의 근사함수($u^h(x)$)는 평가점 근방 영향영역 내에 분포하는 절점치를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$u^h(x) = \sum_j^m p_j(x) a_j(X) \equiv p(x) a(X) \quad (1)$$

여기서, $p(x)$ 는 기저함수로 1차원 문제에서는 $(1, x, x^2, \dots)$ 와 같다.

$a(X)$ 는 평가점 좌표 X 의 함수인 미정계수로 다음과 같이 정의되는 잔차(J)를 최소화($\frac{\partial J}{\partial a} = 0$)함으로써 계산된다.

$$J = \sum_i^n w(X-x_i) \left[\sum_j^m p_j(x_i) a_j(X) - u(x_i) \right]^2 \quad (2)$$

여기서 w 는 가중함수(weight function)로 두 점간의 거리($X-x_i$)의 함수로 정의된다.

따라서, 잔차 J 를 최소로 하는 계수 $a_j(X)$ 는 식 (3)과 같이 정의될 수 있다.

$$a(X) = A^{-1}(X) B(X) u \quad (3)$$

이때, 행렬 A , B 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A(X) &= P^T W(X) P \\ B(X) &= P^T W(X) \end{aligned} \quad (4)$$

또한, 행렬 P , $W(X)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix},$$

$$W(X) = \begin{bmatrix} w(r_1) & & & 0 \\ & w(r_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w(r_n) \end{bmatrix}$$

여기서, $r_i = |X-x_i|$ 이다.

식 (3)을 식 (1)에 대입하면 아래와 같으며,

$$u^h(x) = p(x) A^{-1}(X) B(X) u = N(x) u$$

기지의 절점치(u_i)를 이용하여 임의의 점 x 에서의 근사치를 얻기 위한 형상함수 $N(x)$ 는 아래와 같이 정의된다.

$$N(x) = p(x) A^{-1}(x) B(x) \quad (5)$$

2.2 가중함수

상술한 바와 같이 EFGM에서의 형상함수의 계산에는 가중함수 w 가 중요한 역할을 담당하고 있으며 형상함수의 종류에 따른 영향은 Dolbow & Belytschko(1998)에 의해 보고된 바 있다. 일반적으로 형상함수는 영역 내

에서 항상 양의 값을 가지며 두 점간의 거리의 증가에 따라 단조감소하는 성질을 가진다. 한편, 식 (3)에서 해가 존재하기 위해서는 가중함수가 0이 되지 않는 영역 내에 위치하는 절점수(n)은 근사함수에서 이용된 기저함수의 수(m) 보다 같거나 클 필요가 있다.

본 연구에서는 아래와 같이 정의되는 cubic spline 가중함수(그림 1)를 이용하였다.

$$w(r) = w(d = \frac{r}{l}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3 & (d \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3 & (\frac{1}{2} \leq d \leq 1) \\ 0 & (d \geq 1) \end{cases} \quad (6)$$

여기서, l은 가중함수가 0이 되지 않는 영역의 크기를 나타내며 절점에 따라 상이한 값을 가진다.

2.3 Galerkin법에 의한 정식화

영역 Ω 내의 물리 현상의 지배방정식을 연산자 L(x)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다고 가정한다.

$$L(x)u(x) = f(x) \quad (7)$$

상기 식과 등가한 변분 문제는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$(Lu - f, \delta u) = 0 \quad (8)$$

여기서, δu는 임의의 테스트 함수로 $(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$ 는 내적을 나타낸다.

테스트 함수는 일반적으로 임의로 결정할 수 있으나, Galerkin법에서는 함수 u(x)를 유한개(N)의 기저함수

$g_i(x)_{i=1}^N$ 를 이용하여 다음과 같이 근사시켰을 때의 기저함수를 테스트 함수로서 이용한다.

$$u(x) = \sum_i^N u_i g_i(x) \quad (9)$$

따라서, 식 (8)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(Lu - f, g_i) = 0, i = 1, \dots, N \quad (10)$$

유한요소법 및 EFGM에서는 형상함수가 기저함수가 되기 때문에 식 (10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_j \int_{\Omega} N_i(x) L(x) N_j(x) dx = \int_{\Omega} N_i(x) f(x) dx \quad (11)$$

3. Perturbation법 및 Spectral법을 이용한 EFGM의 확장

3.1 Karhunen-Loeve 전개를 이용한 이산화

본 연구에서는 연속확률변수의 이산화 방법으로 Karhunen-Loeve(KL) 전개를 이용한다. KL 전개를 이용하여 연속 확률변수 E(x, θ)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(x, \theta) = E_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \psi_i(x) \quad (12)$$

여기서, E₀는 평균치, ξ_i(θ)는 정규분포를 따르는 직교성의 확률변수, λ_i 및 ψ_i(x)는 고유값 및 고유함수를 나타낸다. 고유값(λ_i) 및 고유함수(ψ_i(x))는 입력재료변수의 공분산함수 C(x₁, x₂)에 의해 정의되는 적분방정식의 해로써 얻어진다.

$$\int_{\Omega} C(x_1, x_2) \psi_i(x_2) dx_2 = \lambda_i \psi_i(x_1) \quad (13)$$

이산화 방법으로 KL전개를 이용하는 가장 큰 장점으로는 유한차수의 급수 전개법 중에 KL 전개가 가장 오차가 작은 것으로 알려져 있으며(Ghanem & Spanos, 2003), 고유값 및 고유함수가 모두 직교성을 띄기 때문에 응답변수의 통계량 계산이 용이하기 때문이다.

본 연구에서는 Ghanem & Spanos(2003)가 제시한 바와 같이 해석적 해법이 아닌 수치적 해법을 이용하여 고유치 문제를 풀고 있기 때문에 단순한 기하학적 형상의 문제뿐만 아니라 복잡한 형상의 문제에도 적용도 가능케 하였다(Kim & Inoue, 2004).

고유함수(ψ_k(x))는 다음과 같이 표현될 수 있고,

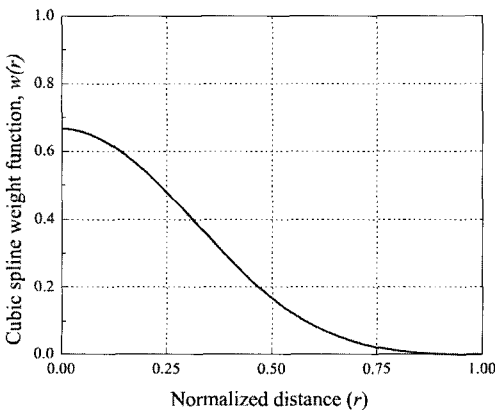


그림 1. cubic spline 가중함수

$$\psi_k(x) = \sum_{i=1}^n d_i^{(k)} N_i^{ob}(x) \tag{14}$$

Galerkin 법을 적용함으로써, 식 (13)의 수치해석적 해법에 이용되는 행렬식은

$$[C][D] = [A][B][D]$$

로 얻어진다.

여기서, 각 행렬의 구성성분은 아래와 같이 표현된다.

$$C_{ij} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} C(x_1, x_2) N_i^{ob}(x) N_j^{ob}(x) dx_1 dx_2$$

$$B_{ij} = \int_{\Omega} N_i^{ob}(x) N_j^{ob}(x) dx$$

$$D_{ij} = d_i^{(j)}$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$$

$N_i^{ob}(x)$ 는 형상함수, $d_i^{(j)}$ 는 각 절점에서의 고유함수 값, δ_{ij} 는 Kronecker delta 함수를 나타낸다.

3.2 Perturbation법을 이용한 정식화

Perturbation법에서는 입력재료변수의 불확실성 및 이에 기인한 응답변수의 분산이 평균치 주위에 분포한다고 가정하여 모든 확률과정을 유한개(M)의 확률변수 $Y = Y_{i=1}^M$ 로 표시할 수 있다는 가정에 근간한다. 이 경우, 연산자 $L(x)$, 입력변수 $f(x)$, 응답변수 u_i 는 Taylor 전개에 의해 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$L = L^0 + \sum_i^M L_{,i} Y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^M L_{,ij} Y_i Y_j + \dots \tag{15}$$

$$f = f^0 + \sum_i^M f_{,i} Y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^M f_{,ij} Y_i Y_j + \dots$$

$$u = u^0 + \sum_i^M u_{,i} Y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^M u_{,ij} Y_i Y_j + \dots$$

여기서,

$$L_i(x) = \left. \frac{\partial L(x)}{\partial Y_i} \right|_{Y_i=0}, \quad L_{ij}(x) = \left. \frac{\partial^2 L(x)}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_i Y_j=0}, \tag{16}$$

$$f_i(x) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial Y_i} \right|_{Y_i=0}, \quad f_{ij}(x) = \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_i Y_j=0},$$

$$u_i(x) = \left. \frac{\partial u_i(x)}{\partial Y_i} \right|_{Y_i=0}, \quad u_{ij}(x) = \left. \frac{\partial^2 u_i(x)}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_i Y_j=0}$$

상기 식 (15)를 식 (11)에 대입하고, Y_i 에 관하여 동일한 차수의 항을 정리하면 다음과 같다.

$$L_{kl}^0 u_l^0 = f_k \tag{17}$$

$$L_{kl}^0 u_{l,i} = -L_{kl,i} u_l^0 + f_{k,i}$$

$$L_{kl}^0 u_{l,ij} = -L_{kl,ij} u_l^0 - L_{kl,j} u_{l,i} - L_{kl,i} u_{l,j} + f_{k,ij}$$

여기서,

$$L_{kl}^0 = \int_{\Omega} N_k L^0 N_l dL_{kl}^0 dx, \quad L_{kl,i} = \int_{\Omega} N_k L_{,i} N_l dx, \tag{18}$$

$$L_{kl,ij} = \int_{\Omega} N_k L_{,ij} N_l dx, \quad f_k = \int_{\Omega} N_k f dx,$$

$$f_{k,i} = \int_{\Omega} N_k f_{,i} dx, \quad f_{k,ij} = \int_{\Omega} N_k f_{,ij} dx$$

응답변수 u_i 의 각 차수별 계수는 식 (17)에 의해 순차적으로 얻을 수 있다. 여기서 주목할 만한 것은 u_i 의 각 차수별 계수의 계산에 L_{kl}^0 의 역행렬만이 이용되고 있다는 점이다.

연속확률변수의 이산화에 KL 전개를 이용하는 경우, 확률변수(ξ)의 직교성에 의해 응답변수(u_i)의 통계량은 다음과 같이 계산된다.

$$\langle u_i \rangle = u_i^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M u_{i,ii} + \dots$$

$$\langle u_k u_l \rangle - \langle u_k \rangle \langle u_l \rangle = u_k^0 u_l^0 + \sum_{i=1}^M u_{k,i} u_{l,i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M u_{k,ij} u_{l,ij} + \dots \tag{19}$$

3.3 Spectral법을 이용한 정식화

Spectral법에서는 응답변수 u_i 의 전개에 Polynomial Chaos(PC) 전개를 이용한다(Ghanem & Spanos, 2003).

$$u_i = u_i^0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} u_{i,i_1}^1 \Gamma_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i,i_2}^2 \Gamma_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \dots \tag{20}$$

여기서, $\Gamma_i(\xi)$ 는 PC라 하여 확률공간에서 직교성의 성질을 가진다.

확률변수(ξ)가 정규분포를 따를 경우, $\Gamma_i(\xi)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\Gamma_i(\xi) = (-1)^i \exp(0.5\xi \cdot \xi) \frac{\partial^i}{\partial \xi_{m_1} \dots \partial \xi_{m_i}} \exp(-0.5\xi \cdot \xi) \tag{21}$$

여기서, $\xi = \xi_{m=1}^{m_i}$ 이다.

$\Gamma(\xi)$ 와 $\Psi(\xi)$ 사이의 일대일 대응 관계가 성립한다고 할 때, 식 (20)는 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$u_i = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^1 \Psi_i(\xi) \tag{22}$$

KL전개에서의 차수를 M , PC전개에서의 차수를 p 라고

하면 식 (22)에서의 차수는 아래와 같이 P 로 계산된다.

$$P = 1 + \sum_{s=1}^p \frac{1}{s!} \prod_{r=0}^{s-1} (M+r) \quad (23)$$

KL 전개를 이용하여 지배방정식에서의 연산자 $L(x)$ 를 전개하면 다음과 같다.

$$L(x) = L^0(x) + \sum_{i=1}^M \xi_i R_i(x) \quad (24)$$

식 (11)에 식 (22) 및 식 (24)를 대입하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^N u_j^k \Psi_j(\xi) \int_{\Omega} N_l L^0 N_k dx + \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^M x \Psi_j(\xi) \int_{\Omega} u_j^k \int_{\Omega} N_l R_i N_k dx = \int_{\Omega} N_l f dx, \quad l=1, \dots, N \quad (25)$$

여기서, 상기 식 (25)를 ξ_i 에 관해 전개하고 같은 차수의 항을 정리하면 Perturbation법과 동일한 정식화 과정이 된다. Ghanem & Spanos(2003)에 의하면, 상기 식에 Galerkin법을 적용함으로써 다음과 같은 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^N \langle \Psi_m^2(\xi) \rangle L_{kl} u_k^m + \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^N u_j^k \sum_{m=1}^M \langle \xi_i \Psi_j(\xi) \Psi_m(\xi) \rangle R_{ikl} = \langle f | \Psi_m(\xi) \rangle, \quad l=1, \dots, N, \quad m=1, \dots, P \quad (26)$$

$$\text{여기서, } \begin{cases} L_{kl} = \int_{\Omega} N_l L^0 N_k dx \\ R_{ikl} = \int_{\Omega} N_l R_i N_k dx \\ f_l = \int_{\Omega} N_l f dx \end{cases} \quad (27)$$

한편, 응답변수(u_i)의 통계량은 PC $\Psi_i(\xi)$ 의 직교성으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \langle u_i \rangle &= u_i^l \\ \langle u_k u_l \rangle &= \sum_{i=1}^P \langle \Psi_i^2(\xi) \rangle u_i^k u_i^l \end{aligned} \quad (28)$$

4. 1차원 문제에서의 적용

본 연구에서는 인장하중을 받는 1차원 bar 문제를 이용하여 본 연구에서 제안한 해석법 및 Monte Carlo Simulation(MCS)에 의한 해석결과를 비교하고 제안한 해석법의 타당성 및 각 해석법의 특징을 명확히 하고자 하였다. 그림 2에 해석조건을 제시하였다. bar의 길이는 1.0으로 하였고, 입력재료변수는 정규분포를 따르고, 평

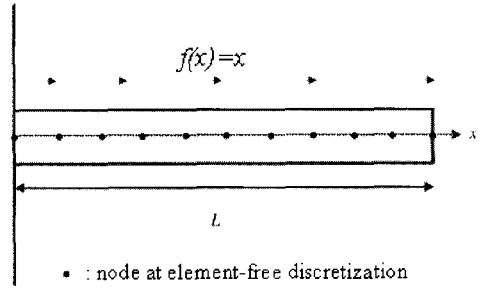


그림 2. 인장하중 하의 1차원 bar 및 해석에 이용한 절점 정보

균은 1, 표준편차는 0.1~0.3의 값을 사용하였다. 또한, 지수함수적인 공분산함수($C_E(r) = \sigma_E^2 \exp\left(-\frac{|r|}{\lambda_E}\right)$)를 사용하였으며, 상관길이(λ_E)는 0.3~1.0의 값을 이용하였다. 그림 2에서의 같이 bar 축방향을 x축으로 하였으며, 외력으로는 분포하중 $f(x) = x$ 를 설정하였다. 이 경우, 지배방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \left[E(x) \frac{d}{dx} \right] u(x) + f(x) = 0 \quad (29)$$

4.1 Perturbation법에 의한 해법

외력 $f(x)$ 는 결정론적 변수로 가정하고 있기 때문에 식 (15)에서 $f_{,i}, f_{,ij}$ 은 0이 된다. 따라서, 지배방정식 식 (29)에 대한 식 (17)은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} K^0 u^0 &= f + f^t \\ K^0 u_{,i} &= -K_{,i} u^0 + f_{,i}^t \\ K^0 u_{,ij} &= -K_{,i} u_{,j} - K_{,j} u_{,i} + f_{,ij}^t \end{aligned} \quad (30)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_{kl}^0 &= \int_0^1 B_k(x) E^0(x) B_l(x) dx \\ K_{k,i}^0 &= \sqrt{\lambda_i} \int_0^1 B_k(x) E^0(x) N^{ob}(x) B_l(x) dx \\ f_k &= \int_0^1 N_k(x) f(x) dx \\ f_k^{t0} &= [N_k(x) f^{t0}]_0^1, \quad f_{k,i}^t = [N_k(x) f_{,i}^t]_0^1 \\ f_{k,i,j}^t &= [N_k(x) f_{,ij}^t]_0^1 \end{aligned}$$

이고, $f^{t0}, f_{,i}^t, f_{,ij}^t$ 는 경계에서 외력의 Perturbation 전개에서의 계수이다.

또한, 상기 식의 전개에서 경계조건

$$f^t = f^{t0} + \sum_{i=1}^M f_{,i}^t \xi_i + \sum_{i=1}^M f_{,ij}^t \xi_i \xi_j + \dots = E(x) \frac{d}{dx} u(x)$$

으로부터

$$\begin{aligned}
 f^t &= \mathbf{B}(x) u^0 \\
 f_{,i}^t &= \mathbf{B}(x) u_{,i} + \sqrt{\lambda_i} E^0(x) N^{ob}(x) d^t \mathbf{B}(x) u^0 \\
 f_{,ij}^t &= \mathbf{B}(x) u_{,ij} + \sqrt{\lambda_i} E^0(x) N^{ob}(x) d^t \mathbf{B}(x) u_{,j} + \\
 &\quad \sqrt{\lambda_j} E^0(x) N^{ob}(x) d^j \mathbf{B}(x) u_{,i}
 \end{aligned} \tag{31}$$

를 이용하였다. bar 문제에 있어서는

$$\begin{aligned}
 f^t|_{x=1} &= 0, \\
 f_{,i}^t|_{x=1} &= 0, \\
 f_{,ij}^t|_{x=1} &= 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 u|_{x=0} &= M(0) u^0 = 0, \\
 u_{,i}|_{x=0} &= M(0) u_{,i} = 0, \\
 u_{,ij}|_{x=0} &= M(0) u_{,ij} = 0
 \end{aligned} \tag{33}$$

가 되어 절점변위 $\{u_i, u_{i,i}, u_{i,ij} \dots\}$ 및 고정점 $x=0$ 에서의 반력 $\{f_i^t, f_{,i}^t, f_{,ij}^t \dots\}_{x=0}$ 이 구해야 할 미지수가 된다.

4.2 Spectral법에 의한 해법

지배방정식 식 (29)에 대하여 식 (26)은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N \langle \psi^{2m}(\xi) \rangle K_{ki}^0 u_m^k + \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^N u_j^k \sum_{l=1}^M \langle \xi_i \psi_j \psi_m \rangle K_{kl,i} = \\
 \langle f_i^t \psi_m \rangle + \langle \psi_m^2 \rangle f_{,ml}^t, l=1, \dots, N, m=1, \dots, P
 \end{aligned} \tag{34}$$

우변의 1항 및 2항은 각각 다음과 같이 정의되어 진다.

$$\begin{aligned}
 \langle f \psi_m \rangle &\geq \begin{cases} \int_0^1 N f dx & m=1 \\ 0 & m>1 \end{cases} \\
 f_m^t &= [N(x) f^t]_0^1
 \end{aligned} \tag{35}$$

또한, 경계조건

$$f^t = \sum_{m=1}^P f_m^t \psi_m = E(x) \frac{d}{dx} u(x) \text{로부터,}$$

반력 f^t 의 PC 전개에의 각 항은

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_m^2 \rangle f_m^t &= \langle \psi_m^2 \rangle B u_m + \\
 \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^M \langle \xi_i \psi_j \psi_m \rangle &\sqrt{\lambda_i} E^0(x) N^{ob} d^t B u_j \text{ at } x=0,1
 \end{aligned} \tag{36}$$

가 된다. 경계에서는

$$\begin{aligned}
 f_m^t|_{x=1} &= 0 \\
 u_m^t|_{x=0} &= N(0) u_m = 0
 \end{aligned} \tag{37}$$

가 되어, 절점변위 u_m^t 및 고정점 $x=0$ 에서의 반력 $f_m^t|_{x=0}$ 가 구해야 할 미지수가 된다.

4.3 KL 전개에서의 고유값 및 고유함수 값의 계산

3장에서 전술한 바와 같이 KL 전개를 이용하여 연속 확률변수로서의 입력재료변수를 이산화 하는 과정에서는 고유값과 고유함수 값이 요구된다. 본 연구에서는 일반적인 문제 형상에의 적용을 위해 수치적 해법을 적용하고 있다. 1차원 bar 문제의 경우, 해석적 해를 쉽게 얻을 수 있고, 표 1과 그림 3에 수치적 해법에 의한 해와의 비교 결과를 제시하였다. 고유값 및 고유함수 값(4차 모드까지만 제시)에서 해석해와 수치해가 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

4.4 Spectral법에 의한 해석결과

본 장에서는 개발된 Spectral법에 의한 결과와 MCS 결과를 비교함으로써 얻어진 해의 신뢰도 및 개발된 해법의 타당성을 검증하였다. 먼저, 그림 4에 MCS 해석에서의 반복 횟수에 따른 응답변수의 평균 및 표준편차의 변화 과정을 살펴보았다. 5000회 이상에서 일정치에 수렴하는 경향을 볼 수 있었다.

표 1. 1차원 bar 문제에서의 고유값의 비교

Eigenvalues	1st	2nd	3rd	4th
Analytical	0.738	0.133	0.0396	0.0158
Numerical	0.738	0.138	0.0451	0.0158

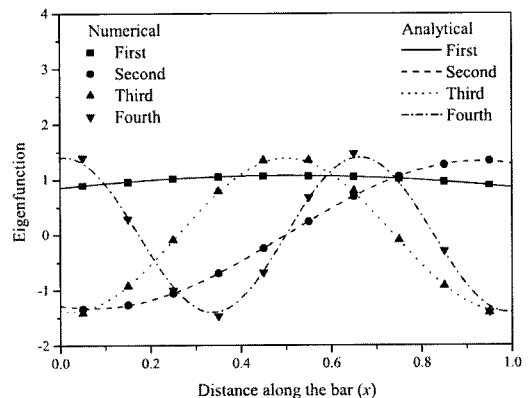
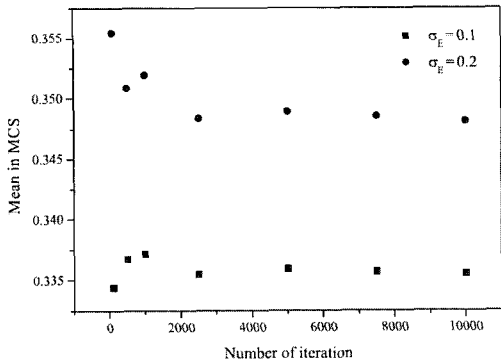
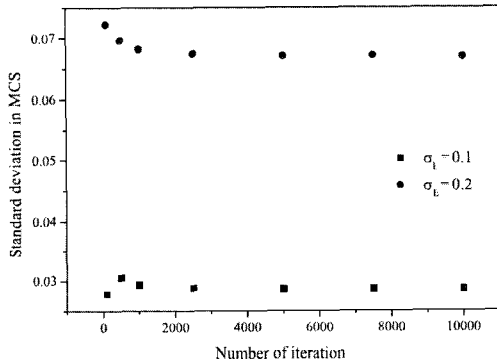


그림 3. 1차원 bar 문제에서의 고유함수 값의 비교 (선: 해석해, 점: 수치해) (Kim & Inoue, 2004)



(a)



(b)

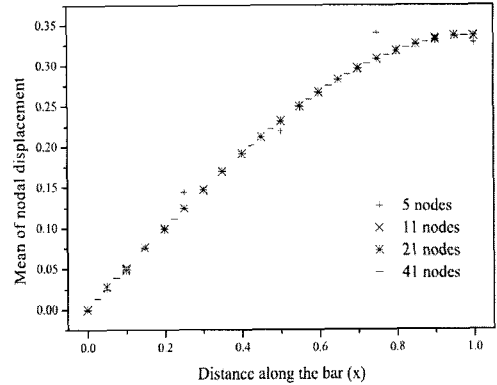
그림 4. MCS해석에서 반복 횟수에 따른 영향 ((a): 평균, (b): 표준편차) (Kim & Inoue, 2004)

EFGM 해석에 있어 절점수의 차이가 해의 신뢰도에 미치는 영향을 살펴보았다. 그림 5로부터 절점수 5개의 경우를 제외하고 11개 이상의 해석조건에서는 해의 변화가 거의 없음을 알 수 있다. 이후의 계산에서는 11개의 절점조건을 이용한 해석결과를 사용하였다.

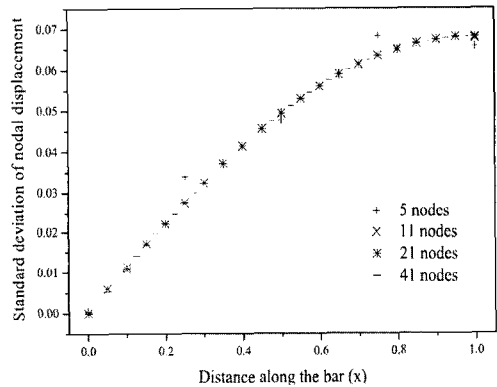
그림 6에서는 Spectral법에 이용하는 KL 및 PC 전개에서의 차수에 따른 영향을 살펴보았다. 평균값의 경우 차수의 차이에 따른 변화를 거의 찾아볼 수 없었으나, 표준편차 및 bar 끝단 변위의 확률밀도함수의 경우, 차수의 증가에 따라 MCS 결과에 보다 근사한 결과를 얻을 수 있었다. 다만, 전술한 바와 같이 차수의 증가에 따라 식 (23)과 같이 행렬크기가 막대하게 증가하므로 주의할 필요가 있다.

4.5 각 해석법에 의한 해석결과의 비교

본 장에서는 입력재료변수의 분산에 따른 응답변수의 불확실성이 평가 가능한 각 해석법의 결과를 비교함으



(a)



(b)

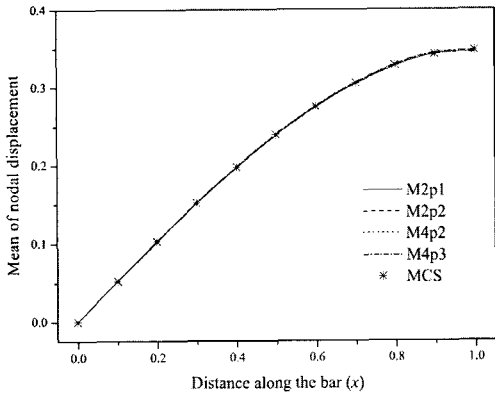
그림 5. 절점수에 따른 해석결과에의 영향 ((a): 평균, (b): 표준편차) (Kim & Inoue, 2004)

로써 그 특성을 파악하고 한계점을 도출해 보았다. 입력재료변수의 상관길이는 0.3을 이용하였고 표준편차는 0.1~0.3의 값을 사용하였다.

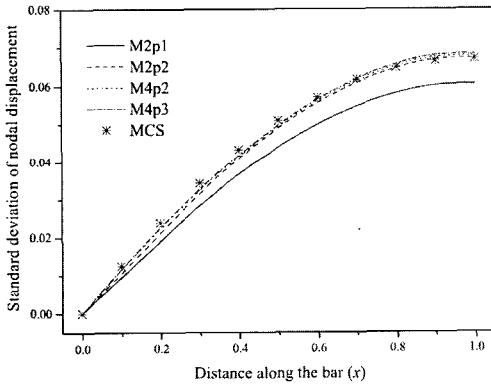
그림 7에 각 해석법으로부터 구한 응답변수의 평균 및 표준편차를 제시하였다. 입력재료변수의 분산이 커질수록 평균 및 표준편차 모두에서 Perturbation법에 의한 결과보다 Spectral법에 의한 결과가 MCS에 근사함을 볼 수 있었다.

각 해석법에 의한 bar 끝단 변위의 확률밀도함수를 그림 8에 제시하였다. 또한, 비교를 위해 확률밀도함수 우측말단에서의 확대 그림을 함께 표시하였다. 응답변수의 평균 주위에서는 Perturbation법에 의한 결과가 다소 MCS에 보다 근사한 결과를 보였으며, 말단부에서는 Spectral법에 의한 해가 MCS와 보다 유사한 결과를 보였다. 그림 7의 결과로부터 Perturbation법은 응답변수의 평균치 주위의 거동을, Spectral법은 확률밀도함수의

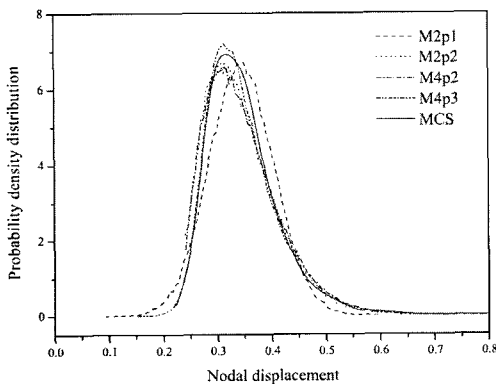
면적에 상응하는 평균 및 분산과 같은 통계모멘트의 값을 잘 나타내고 있음을 알 수 있다. 따라서, 이들 특성에 맞는 해석법의 실적용이 요구된다고 할 수 있다.



(a)

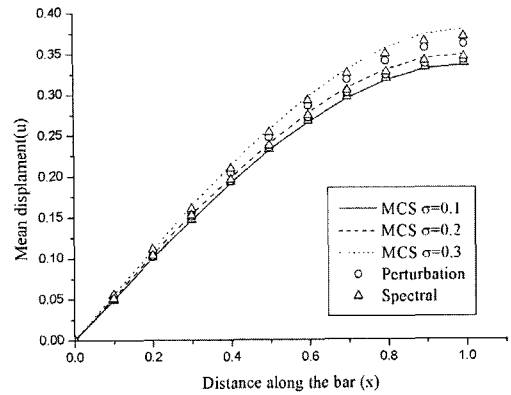


(b)

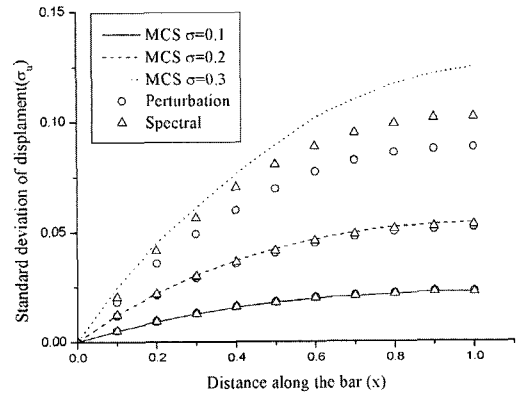


(c)

그림 6. KL 및 PC전개의 차수에 따른 결과 ((a): 평균, (b): 표준편차, (c): 확률밀도함수) (Kim & Inoue, 2004)

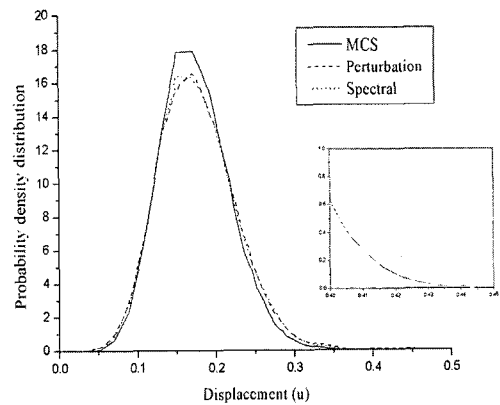


(a)



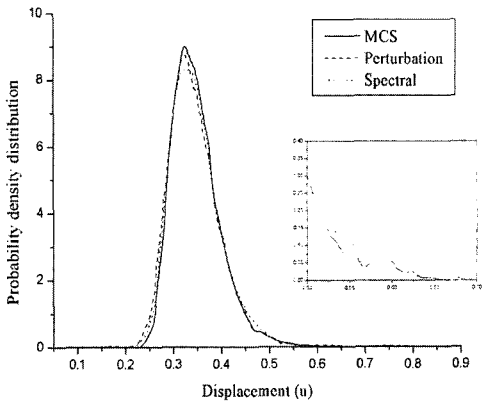
(b)

그림 7. 각 해석법에 의한 결과비교 ((a): 평균, (b): 표준편차)

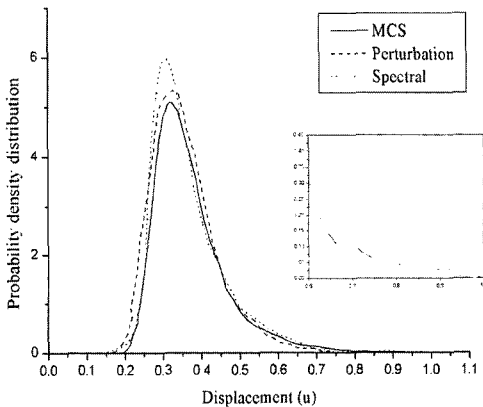


(a)

그림 8. 각 해석법에 의한 확률밀도함수의 비교 ((a): $\sigma_E = 0.1$, (b): $\sigma_E = 0.2$, (c): $\sigma_E = 0.3$) (continue)



(b)



(c)

그림 8. 각 해석법에 의한 확률밀도함수의 비교 ((a): $\sigma_E = 0.1$, (b): $\sigma_E = 0.2$, (c): $\sigma_E = 0.3$)

5. 결 론

본 연구에서는 비균질성 현장지반용 해석툴로서의 활용을 목적으로 확률변수의 이산화 기법인 Perturbation법 및 Spectral법을 이용하여 Element Free Galerkin Method (EFGM)를 확장한 해석법을 제시하였다. 개발된 해석법은 현장지반 재료물성의 비균질성 및 조사수량의 부족에 기인한 불확실성을 정량적으로 평가할 수 있을 뿐만 아니라 절점 정보만을 이용하기 때문에 해석요소의 작성이 불필요함으로 시공 중 조사·관측 결과를 반영하여 해석조건을 상대적으로 쉽게 변경할 수 있다는 장점이 있다. 개발된 해석법을 1차원 문제에 적용하여 Monte

Carlo Simulation(MCS)에 의한 평균·분산·확률밀도함수 등의 결과와 비교함으로써 개발된 해석법의 타당성을 확인하였을 뿐만 아니라 각 해석법의 특성을 파악하고 그 적용성 및 적용한계를 비교·분석하였다.

Perturbation법은 평균 주위의 확률밀도함수를 비교적 잘 표현하였으며 Spectral법은 평균, 분산 등의 통계량의 오차를 최소화하는 특성을 보임을 알 수 있었다. 한편, 입력재료변수의 분산이 커질 경우, Perturbation법은 통계량의 오차가 증가하고, Spectral법에서는 확률밀도함수의 평균주위의 오차가 증가함을 알 수 있었다. 또한, Spectral법에서는 강성행렬의 크기가 막대하게 증가하는 결과를 가져오기 때문에 실적용을 위해서는 이에 대한 대처 방안이 요구되며 최근 제안된 병렬계산법 등을 활용할 수 있을 것으로 생각된다.

불연속면에 의한 이방성 및 층서구조의 지반환경에서는 제안된 해석법의 적용에 다소 제약이 예상되는바 향후 다차원 문제 및 실제 현장 적용을 통해 제안된 기법의 적용성 및 유효성의 추가적인 검토가 수행되어야 할 것이다.

사 사

본 연구는 한국지질자원연구원 신진연구자 지원사업 및 “환경위해가스 지중저장환경의 역학적 거동 평가 및 유동확산 모니터링 기법 개발” 과제의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

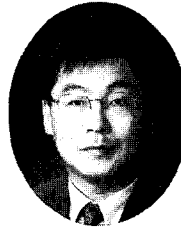
1. 中桐滋, 久田俊明, 1990, 確率有限要素法入門—不確定構造の解析, 培風館.
2. Zhang, D., 2002, Stochastic Methods for Flow in Porous Media, Academic Press, San Diego.
3. Ghanem, R. G. and P. D. Spanos, 2003, Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach, Revised Edition, Dover Publications.
4. Kim, H. M., J. Inoue, 2004, A spectral stochastic element free Galerkin method for the problems with random material parameter, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 61 No. 11, pp. 1957-1975.
5. Belytschko, T., Y. Y. Lu, and L. Gu, 1994, Element-free galerkin methods, International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 37 pp. 229-256.
6. Dolbow, J., and T. Belytschko, 1998, An Introduction to programming the meshless element free galerkin method, Archives of Computational Methods in Engineering Vol. 5 No. 3, pp. 207-241.



김형목

1997년 서울대학교 공과대학 자원공학과
공학사
1999년 서울대학교 대학원 자원공학과
공학석사
2002년 동경대학교 대학원 토목공학과
공학박사
Tel: 042-868-3265
E-mail: kimh@kigam.re.kr
현재 한국지질자원연구원 지반안전연구부
선임연구원

井上純哉



신중호

1983년 서울대학교 공과대학 자원공학과
공학사
1985년 서울대학교 공과대학 자원공학과
공학석사
1990년 서울대학교 공과대학 자원공학과
공학박사
Tel: 042-868-3242
E-mail: jhsynn@kigam.re.kr
현재 한국지질자원연구원 지반안전연구부
책임연구원

E-mail: inoue@ohriki.t.u-tokyo.ac.jp
현재 일본 동경대학교 재료공학과 조교수