

# Padé 근사에 의한 포물형 파랑 근사식 - 입사각 80°까지 적용 모형 Parabolic Wave Equations Based on Padé Approximants - Model Applicable to Incidence Angle 80°

서 승 남  
Seung-Nam Seo\*

**요 지** : Padé 근사에 의한 포물형 근사모형들을 제시하였고 Padé(15, 15) 근사모형은 일정 경사의 지형에 대한 엄밀해와 비교할 때 입사각 80°까지 적용 가능함을 보였다. 포물형 근사식에 대한 체계적인 유도방법을 보인 후, 본 연구에서는 15차 Padé 근사모형까지 나타내었고 일정 경사지형에서의 파랑변형에 대한 수치결과들을 제시하였다.

**핵심용어** : 포물형 근사식, Padé근사, Snell 법칙, 연산자 상관기법, 수치계산

**Abstract** : Parabolic approximation wave models based on Padé approximants are presented of which the Padé (15,15) is shown to be applicable to incidence angle 80° in comparison with the exact solution of a constant sloping bed. After introducing a systematic way of the derivation to the parabolic wave equation, parabolic models are obtained in this study upto the 15th order and several numerical results are given to wave transformation in a constant sloping bed.

**Keywords** : parabolic approximate form, Padé approximation, Snell's law, method of operator correspondence, numerical computation

## 1. 서 론

항만구조물의 외력을 계산하기 위한 천해역의 파랑산출은 산정된 심해설계파의 제원을 이용하여 수치계산법으로 계산하는 것이 일반적이다. 이 경우 계산영역은 십여 km에 달할 정도로 상당히 큰 경우가 많아 광역 계산에 적합한 수치모형이 요구된다. 그리고 우리나라 설계기준(해양수산부, 2005)에 의하면 설계파는 파랑의 불규칙성을 재현할 수 있는 불규칙파의 사용을 기준으로 정하였기 때문에 주어진 하나의 파랑 제원에는 다수의 주기와 파향 성분이 관련되어 많은 계산이 필요하다.

포물형 근사모형은 대규모 영역에 대해 빠르고 정확하게 파랑변형을 계산할 수 있는 수치모형 가운데 하나이다(Kirby, 1986a; Liu, 1990; 서, 1990). 이 모형에서는 속도 포텐셜 하나만이 종속 변수가 되므로 3개의 종속변수(해면, 수평유속 성분)를 갖는 Boussinesq 파랑모형

(Nwogu, 1993; Wei et al., 1995)에 비해 소오 기억용량이 작은 장점이 있다. 여기에 시간의존 성분을 분리한 모형을 사용하면 시간적분이 필요하지 않아 소오 계산시간이 상당히 크게 단축된다. 본 연구에서는 시간의존 성분이 분리된 포물형 근사모형을 Padé 근사법을 사용하여 체계적으로 유도하는 방법과 이를 이용한 15차까지의 모형을 소개하고자 한다.

포물형 근사모형은 해안 쪽의 경계조건을 사용하지 않아 경계조건 부여가 용이할 뿐 아니라 포물형 미분식을 사용함으로 수치 계산이 빠른 장점을 가진다. 그러나 그 명칭에서 유추할 수 있듯이 반사파를 무시함으로 완만한 경사지형에만 적용할 수 있으며 또한 파랑의 파향과 파고의 계산에 Padé 근사에 의한 모형을 사용할 경우 입사각이 커지면 고차 모형이 사용되어야 한다. 이를 보이기 위해 일정 경사의 지형에 대한 엄밀해와 수치모형의 결과를 비교하였으며 80°까지 입사각에 따른 적합한 포

\*한국해양연구원 연안개발연구본부 책임연구원(Coastal Engineering Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

물형 근사모형을 나타내었다.

포물형 근사식은 완경사 파랑식(Berkhoff, 1972)을 근간으로 삼아 유도된 것으로 파랑의 굴절과 회절을 동시에 고려할 수 있다(Berkhoff et al., 1982). 서·이(2006)가 기술한 바와 같이 포물형 근사식은 다양한 방법으로 유도할 수 있으며 이 가운데 연산자 분리법(Radder, 1979; Booij, 1981; 서, 1990)과 Padé 근사에 의한 연산자 상관법(Kirby, 1986; 서·이, 2007b)이 대표적인 방법이다. 연산자 분리법은 지형 또는 흐름의 변화에 의해 생성되는 파랑을 진행파와 반사파로 나누어 지배방정식에서 개별 파랑과 관련된 연산자를 분리하는 방법이기 때문에 고차 근사식의 유도가 상대적으로 어렵다. 이러한 이유로 Padé(1,1) 근사와 동일하거나 유사한 형태의 모형들이 제시되었다. 반면에 Padé 근사에 의한 유도는 비교적 쉽게 고차 모형을 얻을 수 있으며 파향만 부각시킨 모형들(Kirby, 1986b; Mordane et al., 2004)과 달리 파고와 파향을 모두 포함한 엄밀한 의미의 포물형 근사모형은 현재 2차 Padé 모형까지만(서·이, 2007b) 제시되었다.

한편 입사각의 제약을 해소하기 위한 또 다른 방법으로는 Dalrymple이 주도한 FFT에 의한 포물형 근사모형이다. 이 모형에서는 설정한 파랑진행의 횡방향에 대한 방향 스펙트럼을 계산하기 위해 FFT 변환하고 이를 이용한 진행파에 대한 포물형 근사식이 제시되었다(Dalrymple and Kirby, 1988; Dalrymple et al., 1989). 이 방법은 진행파의 모든 입사각( $\pm 90^\circ$ )에 대한 파랑변형을 계산할 수 있다. 그러나 이 모형은 FFT를 사용하기 때문에 측면 경계조건은 주기성을 가져야 하는 제약과 수행된 수치실험에 대한 그들의 분석에 따르면 모형이 좋은 결과를 보이기 위해서는 횡방향 수심변화가 작아야 하는 제약이 있다.

본 논문의 제 2절에서는 15차까지의 Padé 근사에 의한 포물형 근사모형을 제시하였으며 모형의 기준이 되는 일정 경사지형에서의 굴절모형의 엄밀해를 지수함수 형태로 나타내어 체계적으로 유도하는 방법을 기술하였다. 이는 서·이(2007b)가 제시한 해의 형태보다 포물형 근사모형의 유도에 편리하며 고차 모형의 정밀도 향상에 관한 이론적 근거도 함께 나타내었다. 이를 횡방향으로 수심이 변하는 경우로 확장하기 위하여 연산자 상관기법을 사용하였고 수심이 완만히 변하는 지형에 대한 포물형 근사모형을 제시하였다. 제 3절에서는 유도된 모형의 정밀도를 검증하기 위한 수치실험을 실시하였고 그 결과를 분석하였다. 마지막으로 모형의 입사각에 따른 정밀도 분석을 통해 각 모형별 적용 가능한 입사각을 나타내었다.

## 2. 포물형 근사모형

### 2.1 굴절 모형

포물형 근사모형은 서·이(2007b)가 기술한 바와 같이 파랑변형 모형인 완경사 파랑식과 굴절식의 중간에 위치한다. 굴절 모형과 포물형 근사모형을 연계시키기 위해 Snell 법칙이 적용되는 지역에서의 파랑변형을 고려하였고 이 경우에는 파랑 진행의 횡방향 변화율이 없기 때문에 굴절 모형의 해는 엄밀해로 간주할 수 있다. 이를 이용하여 포물형 근사식을 체계적으로 유도하기 위해 우선 포물형 근사식과 연관된 굴절모형을 기술하고자 한다.

외해에서 육지쪽으로 해안선에 직각인 방향을  $x$ 축, 해안선에 평행한 방향을  $y$ 축으로 좌표계를 정한다. 수심이 완만히 변하는 경우,  $O(\nabla h/kh) \ll 1$ , 선형파랑 지배방정식에 WKB 방법을 적용하면 처음 두개의 항들(leading order terms)에서 파수 벡터와 에너지 보존에 대한 굴절 모형이 얻어진다(Mei, 1989). 파향( $\theta$ )은 파수 벡터( $\vec{k}$ )의 비회전식 (1a)으로부터, 파고는 에너지 보존식 (1b)로부터 각각 계산할 수 있다.

$$\vec{\nabla} \times \vec{k} = 0 \quad (1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (H^2 \vec{C}_g) = 0 \quad (1b)$$

여기서  $\vec{\nabla}$ 은 2차원 미분연산자,  $C_g$ 는 군속도이며 파수는 파랑 분산식  $\omega^2 = gk \tanh kh$ 으로부터 계산한다. 이 분산식에서  $g$ 는 중력가속도이고 각주파수( $\omega$ ), 수심( $h$ ) 그리고 파수에 대한 함수로 이들 가운데 두 개의 값이 주어지면 분산식에서 나머지 하나의 값을 일의적으로 구할 수 있다.

횡( $y$ )방향의 수심변화가 없는 즉 Snell 법칙을 적용할 수 있는 경우에는 파고( $H$ )와 파향의 횡방향 변화율의 값이 0이 되어 식 (1)은 식 (2)로 변형되어 어느 한 지점에서 값이 주어지면 다른 곳에서 파향과 파고(또는 진폭)을 구할 수 있다(Dean and Dalrymple, 1984).

$$\begin{cases} (k \sin \theta)_1 = (k \sin \theta)_2 \\ (H^2 C_g \cos \theta)_1 = (H^2 C_g \cos \theta)_2 \end{cases} \quad (2)$$

여기서 파향은  $x$ 축과 파향선의 각으로 정의한다. 식 (1) 또는 식 (2)는 파랑의 파장과 진폭이 서서히 변하는 식의 해이며 이를 해면함수  $\eta(x,y,t)$ 를 사용하여 나타낼 수도 있다. 단 주기 선형 파랑인 경우 시간의 함수는  $\exp(-i\omega t)$ 를 사용하여 분리할 수 있으며 이 후에서는 해면함수는 시간함수가 분리된 것으로 간주한다. 또한 식 (2)의 경우에는 횡

방향 파수( $m = k \sin \theta$ )가 일정하기 때문에 이는  $\exp(i m y)$ 를 사용하여 다시 분리할 수 있다. 그러면 식 (2)는 해면 함수로 표현된 식 (3)과 동일함을 보일 수 있다.

$$\eta = \frac{A_o^*}{\sqrt{C_g \cos \theta}} e^{i \int k \cos \theta d\alpha + m y} \quad (3)$$

식 (3)은 Snell 법칙을 적용할 수 있는 지역에서의 굴절 모형의 해로 횡방향 변화가 없어 포물형 근사식과 같이 굴·회절을 모사할 수 있는 미분식의 엄밀해로도 간주할 수 있다. 이제 기존 Radder(1979)의 포물형 모형과 같이 수식전개의 편리를 위해 파속( $C$ ), 군속도 그리고 중력가속도에 의한 변수변환  $\zeta = \sqrt{CC_g/g} \eta$ 을 이용하고 식 (3)에서 횡방향 위상성분을 분리하면 식 (4)가 된다.

$$\zeta = \frac{A_o}{\sqrt{k} \sqrt{\cos \theta}} e^{i \int k \cos \theta d\alpha} \quad (4)$$

여기서  $A_o$  또는 식 (3)의  $A_o^*$ 는 초기조건이 주어지면 정해지는 상수이다. 식 (4)에서 지수함수는 위상, 분모는 파고의 변화를 각각 나타낸다. 본 논문에서는 이를 포물형 근사모형 유도에 기본식으로 이용하기 위해 분모를 위상 함수와 같이 지수함수로 변형하면 임시변수(dummy variable)  $\alpha$ 를 포함한 식 (5)가 된다.

$$\zeta = A_o e^{\left[-\frac{1}{2} \int k \frac{\partial \ln(k \cos \theta)}{\partial \alpha} d\alpha + i \int k \cos \theta d\alpha\right]} \quad (5)$$

식 (4) 또는 (5)에서  $\cos^2 \theta = 1 - m^2/k^2$ 이므로 파향은  $y$ 방향 파수성분과 연관되며  $\cos \theta$ 를 근사하는 방법에 따라 여러 가지의 모형을 얻게 된다. 그리고 식 (5)의 지수함수 형태는 다음 절의 포물형 근사식 유도에서 지수 부분만을 비교하게 되어 서·이(2007b)의 방법보다 간편하고 분명하다.

### 2.2 포물형 파랑 근사식

본 절에서는 Snell 법칙을 적용할 수 있는 경우의 엄밀해를 이용하여 포물형 근사식에 관한 여러 형태의 식을 유도하고 이로부터 수심이  $y$ 방향으로 완만히 변하는 경우로 확장하여 포물형 근사식을 구하는 과정을 기술하고자 한다. Snell 법칙을 적용할 수 있는 경우 서·이(2007b)가 보인 위상함수에서  $y$ 방향 성분이 분리된 포물형 근사모형은 식 (6)으로 일반화할 수 있다.

$$\zeta_x = ik P_s \zeta - \frac{k_x P_a}{2k} P_a \zeta \quad (6)$$

여기서  $P_a(x)$ 는 파고 근사 다항식,  $P_s(x)$ 는 위상 근사 다

항식이고  $k_x = \partial k / \partial x$ 이다. 그러면 식 (6)의 포물형 근사식의 해는 식 (7)이 된다.

$$\zeta = A_o \exp \left\{ - \int \frac{k_x}{2k} P_a d\alpha + i \int k P_s d\alpha \right\} \quad (7)$$

식 (7)의 포물형 근사모형을 식 (5)의 굴절 모형의 해와 동등하게 정하기 위해 파수벡터 관계식  $\cos \theta = \sqrt{1 - m^2/k^2}$ 을 식 (5)에 대입하면 위상부분에 대한 식 (8a)의 관계를 얻을 수 있다.

$$\cos \theta = \left[ 1 - \left( \frac{m}{k} \right)^2 \right]^{1/2} \approx P_s \quad (8a)$$

마찬가지로 파고부분에 대한 미분을 풀어 정리하면 식 (8b)가 된다.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln(k \cos \theta) = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \ln(k^2 - m^2) = \frac{k_x}{2k \left( 1 - \frac{m^2}{k^2} \right)} \approx \frac{k_x P_a}{2k} \quad (8b)$$

식 (8)의 우변은 포물형 근사모형의 다항식으로 엄밀해인 인접 좌변과 비교하여 근사식을 만든다. 만일 파향과 주진행 방향으로 설정한  $x$ 축의 각이 작은 경우( $m^2/k^2 \ll 1$ )에는 식 (8a)는 하나의 항인  $1 - (m/k)^2/2$ 으로도 충분히 정확하나 각이 큰 경우에는 이를 근사하기 위해 다수의 항이 필요하게 된다. 여러 근사법 가운데 본 논문에서는 Padé 근사를 이용하고 그 장점을 분석하기로 한다.

Padé 근사는 주어진 함수를 분수 형태의 다항식으로 표현된 근사로 이에 포함된 계수들은 Maclaurin 전개에 대한 계수와 비교하여 정하기 때문에 점진적으로 정확도를 증대시킬 수 있다(Jain et al., 1985; Press et al., 1988). 그리고 주어진 정밀도를 얻기 위해 분수 형태의 다항식을 사용함으로써 Maclaurin 전개에 의한 다항식 보다 같거나 낮은 차수의 식으로 표현된다. 특히 Padé 근사에서 분모와 분자의 다항식의 차수가 같은 경우에는 가장 낮은 차수의 다항식으로 표현된다. 주어진 함수를 Maclaurin 또는 Taylor 전개하는 경우에 정밀도를 증가시키기 위해 기존의 항들에 새로운 항을 추가하면 되는 반면에 Padé 근사에서는 급수의 모든 계수를 다시 계산하여야 한다.

한편 포물형 근사식에서는 횡방향 미분 차수가 높으면 정확도가 증대되기 때문에 적절한 고차 미분식의 사용이 필요하다. 뒤에 보인 바와 같이 이 횡방향 미분차수를 분수 형태로 나타내면 설정된 정밀도를 달성하기 위한 목표 미분의 차수를 보다 낮은 차수의 미분으로 나타낼 수

**Table 1.** The coefficients of Padé Approximations less than order 10 to the phase function  $(1-\xi)^{-1}$  and the amplitude function  $(1-\xi)^{-1}$ : NumA and Deno denote numerator and denominator of phase approximation, respectively. NumH and Deno correspond to those of amplitude function.

Name	Coefficients of Polynomials										
	$\xi^0$	$\xi^1$	$\xi^2$	$\xi^3$	$\xi^4$	$\xi^5$	$\xi^6$	$\xi^7$	$\xi^8$	$\xi^9$	
$P_{(1,1)}$	NumA	1	-3/4								
	Deno	1	-1/4								
	NumH	1	3/4								
$P_{(2,2)}$	NumA	1	-5/4	5/16							
	Deno	1	-3/4	1/16							
	NumH	1	1/4	5/16							
$P_{(3,3)}$	NumA	1	-7/4	7/8	-7/64						
	Deno	1	-5/4	3/8	-1/64						
	NumH	1	-1/4	1/8	7/64						
$P_{(4,4)}$	NumA	1	-9/4	27/16	-15/32	9/256					
	Deno	1	-7/4	15/16	-5/32	1/256					
	NumH	1	-3/4	3/16	1/32	9/256					
$P_{(5,5)}$	NumA	1	-11/4	11/4	-77/64	55/256	-11/1024				
	Deno	1	-9/4	7/4	-35/64	15/256	-1/1024				
	NumH	1	-5/4	1/2	-3/64	3/256	11/1024				
$P_{(6,6)}$	NumA	1	-13/4	65/16	-39/16	91/128	-91/1024	13/4096			
	Deno	1	-11/4	45/16	-21/16	35/128	-21/1024	1/4096			
	NumH	1	-7/4	17/16	-1/4	3/128	3/1024	13/4096			
$P_{(7,7)}$	NumA	1	-15/4	45/8	-275/64	225/128	-189/512	35/1024	-15/16384		
	Deno	1	-13/4	33/8	-165/64	105/128	-63/512	7/1024	-1/16384		
	NumH	1	-9/4	15/8	-45/64	15/128	-3/512	1/1024	15/16384		
$P_{(8,8)}$	NumA	1	-17/4	119/16	-221/32	935/256	-561/512	357/2048	-51/4096	17/65536	
	Deno	1	-15/4	91/16	-143/32	495/256	-231/512	105/2048	-9/4096	1/65536	
	NumH	1	-11/4	47/16	-49/32	103/256	-25/512	5/2048	1/4096	17/65536	
$P_{(9,9)}$	NumA	1	-19/4	19/2	-665/64	1729/256	-2717/1024	627/1024	-627/8192	285/65536	-19/262144
	Deno	1	-17/4	15/2	-455/64	1001/256	-1287/1024	231/1024	-165/8192	45/65536	-1/262144
	NumH	1	-13/4	17/4	-183/64	269/256	-211/1024	5/256	-5/8192	5/65536	19/262144

있으며 이는 Padé 근사의 특성과 같다. 따라서 포물형 근사모형에서 Padé 근사를 사용하여 정확도를 체계적으로 높이는 연구가 시도되었고 본 논문에서는 실용 가능한 최고 차수의 포물형 근사모형을 제시하고자 한다.

식 (8a)의 위상부분을 근사식으로 표현하기 위해 식에서 변수  $m^2/k^2$ 를  $\xi$ 로 표기하고 분모와 분자 다항식의 차수가 동일한  $n$ 차 Padé 근사를 사용하면 식 (9)가 된다.

$$\cos\theta = \sqrt{1-\xi} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \xi^i}{1 + \sum_{i=1}^n b_i \xi^i} + O(\xi^{2n+1}) \quad (9)$$

식 (9)로 계산한 우변 다항식의 분자와 분모의 계수 가운데 9차 이하를 Table 1에 10차와 15차를 Table 2에 각각 나타내었다. 표에서 알 수 있듯이 모든 0차의 계수는 1이며 홀수 차수의 계수는 분자와 분모 모두 음수이나 짝

수의 계수는 양수이다. 또한 앞에 기술한 바와 같이 Padé의 차수가 변하면 모든 계수를 다시 계산해야하는 번거로움이 있으며 표에서 이를 확인할 수 있다.

그리고 고차로 갈수록 계산의 복잡함을 쉽게 예상할 수 있으며 표에 제시된 차수이상의 고차도 계산할 수 있으나 뒤에 보인 바와 같이 Padé 15차 근사에 의한 포물형 근사모형에는  $y$ 의 30차 미분이 존재하게 된다. 이러한 점으로 인해 이 이상의 고차 근사식을 수치모형에 이용할 때 실용적이지 않고 또한 다음 절의 일정 수심 경사지형에 대한 수치실험에서 15차 근사는 입사각 80°까지 정확한 파고비를 보여 이보다 고차는 제시하지 않았다.

식 (8b)인 파고부분의 근사에는 두 가지 중요한 점이 있다. 첫째 식 (9)로 표현된 Padé 근사의 분모는 식 (6)의 우변에 존재하는 다항식으로 이는 파고 근사의 분모로 같

**Table 2.** The coefficients of Padé Approximations for order 10 and 15 to the phase function  $(1-\xi)^{1/2}$  and the amplitude function  $(1-\xi)^{-1}$ : NumA and Deno denote numerator and denominator of phase approximation, respectively. NumH and Deno correspond to those of amplitude function.

Poly. Coeff.	$P_{(10,10)}$			$P_{(15,15)}$		
	Wave Angle		Height	Wave Angle		Height
	Deno	Numer	Numer	Deno	Numer	Numer
$\xi^0$	1	1	1	1	1	1
$\xi^1$	-19/4	-21/4	-15/4	-29/4	-31/4	-25/4
$\xi^2$	153/16	189/16	93/16	189/8	217/8	139/8
$\xi^3$	-85/8	-119/8	-77/16	-2925/64	-3627/64	-1813/64
$\xi^4$	455/64	735/64	147/64	7475/128	10075/128	3849/128
$\xi^5$	-3003/1024	-5733/1024	-651/1024	-26565/512	-39215/512	-11169/512
$\xi^6$	3003/4096	7007/4096	399/4096	33649/1024	54901/1024	11311/1024
$\xi^7$	-429/4096	-1287/4096	-15/2048	-245157/16384	-447051/16384	-64181/16384
$\xi^8$	495/65536	2079/65536	15/65536	159885/32768	330429/32768	31523/32768
$\xi^9$	-55/262144	-385/262144	5/262144	-146965/131072	-350455/131072	-20873/131072
$\xi^{10}$	1/1048576	21/1048576	21/1048576	46189/262144	130169/262144	4443/262144
$\xi^{11}$				-37791/2097152	-130169/2097152	-2247/2097152
$\xi^{12}$				4641/4194304	20553/4194304	147/4194304
$\xi^{13}$				-595/16777216	-3689/16777216	-7/16777216
$\xi^{14}$				15/33554432	155/33554432	1/33554432
$\xi^{15}$				-1/1073741824	-31/1073741824	31/1073741824

이 사용되어야 한다. 이러한 이유로 식 (8b)의 근사는 식 (10)으로 표현되며 여기서는 식 (9)의 것과 같아야 한다.

$$\frac{1}{1-\xi} = \frac{\sum_{i=0}^n c_i \xi^i}{1 + \sum_{i=1}^n b_i \xi^i} + O(\xi^{n+1}) \quad (10)$$

식 (10)의 좌변을 다항식으로 전개하면  $1 + \xi + \xi^2 + \dots$ 가 되어 이에 초점을 둔 경우에는 모든  $b_i$ 가 0이고  $c_i = 1$ 이 된다. 그러면 Padé 근사의 분모와 분자 다항식의 차수가 같지 않게 되어 Padé 근사의 최적화를 피할 수 없다. 이것이 둘째 이유이며 따라서 파고에 치중한 Padé 근사보다 파향에 치중한 근사가 더 효율적이다. 한편 연산자 분리법에 의한 Booij(1981)의 Padé (1,1) 포물형 근사식도 본 논문의 식과 같아서 최적화된 식이다. 그러므로 식 (10)에서  $b_i$ 는 식 (9)에서 계산된 값을 사용하고  $c_i$ 의 계수는 식 (10)의 좌변을 전개한 값과 같게 정하기 때문에 파고의 근사는 파향에 비해 정확도가 낮게 되며 이것이 포물형 파랑식의 정확도를 좌우하게 된다.

Table 1과 2에 있는 Padé 근사의 계수를 이용하여 포물형 근사식을 구성하는 방법을 다음에 소개한다. 예를 들어 Padé (3,3)은 Table 1의 3번 행 계수를 사용하며 이를 식 (6)에 대입하고  $\xi$  대신  $m^2/k^2$ 로 나타내면 식 (11)이 된다.

$$\zeta_x = ik \frac{1 - \frac{7}{4}(\frac{m}{k})^2 + \frac{7}{8}(\frac{m}{k})^4 - \frac{7}{64}(\frac{m}{k})^6}{1 - \frac{5}{4}(\frac{m}{k})^2 + \frac{3}{8}(\frac{m}{k})^4 - \frac{1}{64}(\frac{m}{k})^6} \zeta - \frac{k_x}{2k} \frac{1 - \frac{1}{4}(\frac{m}{k})^2 + \frac{1}{8}(\frac{m}{k})^4 + \frac{7}{64}(\frac{m}{k})^6}{1 - \frac{5}{4}(\frac{m}{k})^2 + \frac{3}{8}(\frac{m}{k})^4 - \frac{1}{64}(\frac{m}{k})^6} \zeta \quad (11)$$

식 (11)은 Snell 법칙을 적용할 수 있는 경우로 이를 수심이 y방향으로 완만히 변하는 경우로 확장한 포물형 근사모형으로 전환하기 위해 연산자 상관관계( $\partial/\partial y \leftrightarrow im$ )를 이용하며 이 관계는 식 (3)과 같이 횡방향 위상함수가 포함된 식 (5)의 형태로부터 얻어진다. 식 (11)에 우변의 분모를 곱한 후 연산자 상관법을 이용하여 정리하면 Padé (3,3)의 포물형 근사모형이 얻어진다.

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{5}{4k^2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \frac{3}{8k^4} \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} + \frac{1}{64k^6} \frac{\partial^7}{\partial x \partial y^6} \right) \zeta = ik \left( 1 + \frac{7}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{7}{8k^4} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{7}{64k^6} \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) \zeta - \frac{k_x}{2k} \left( 1 + \frac{1}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{8k^4} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \frac{7}{64k^6} \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) \zeta \quad (12)$$

식 (12)에서 알 수 있듯이 Padé 근사가 1차 증가하면

연산자 상관관계에 의해 미분은 2차 증가하게 됨과 동시에 하나의 항이 추가되어 최종 식에는 총 3개의 항이 추가된다. 그러므로 고차로 갈수록 수식은 복잡해지나 위에 기술한 방법을 사용하면 Table 1과 2에 제시한 최고 15차까지의 포물형 근사모형을 쉽게 얻을 수 있다. 그러나 이 모두를 제시하는 것은 동일한 과정의 반복과 단순함에 비해 너무 많은 지면을 차지하기에 생략하였다.

포물형 근사모형은 계산시간의 단축과 작은 기억용량의 사용 그리고 비교적 복잡한 지형에서도 정확한 파랑산출 등의 장점에도 불구하고 입사각이 설정된 주방향(x)과 큰 경우에는 상당한 오차가 발생하는 단점이 있다 (Kirby, 1986a). 다음 절의 수치실험에서 보였듯이 이 오차는 y미분 차수의 증가에 따라 감소한다. 이 단점은 본 연구의 방법에 의해 해소할 수 있으나 고차의 수치모형이 시도되지 않은 가장 큰 이유는 수치모형의 안정성과 경계조건의 설정의 어려움(서이, 2007a)을 들 수 있다. 이러한 실용적인 문제가 해결되어야 불규칙 파랑에 대한 정확한 파랑산출이 이루어질 것이며 이에 대한 연구가 필요하다.

### 3. 수치실험

앞 절에 제시한 식 (9)의 위상함수와 식 (10)의 진폭함수를 Padé 근사로 계산한 근사치와 참값을 Table 3과 Table 4에 각각 나타내었다. 표에는 주어진 각( $\theta$ )에서 Padé근사계산을 나타내었고 상대오차의 절대값이 처음으로 0.5%보다 큰 Padé 근사의 차수도 표시하였다.

표에서 알 수 있듯이 위상근사가 진폭근사보다 정밀함을 보이며 근사의 차수가 증가할수록 오차가 감소한다. 그러므로 파향 근사의 정밀도만을 부각시킨 기존 연구 (Kirby, 1986a)는 표의 결과로부터 포물형 근사모형의 정밀도는 파향근사보다는 진폭근사에 의해 좌우되는 점을 간과한 것으로 평가된다. 그 이유로 포물형 근사모형에 대한 기존 연구는 일정 수심에 바탕을 두어 굴절에 의한 파고변화를 포함하지 않은 데 기인한 것으로 판단된다.

Padé 근사의 유도에는 Maclaurin 전개를 사용함으로써 고차는 저차의 정밀도를 내포하며 차수의 단계적 증가에 따라 정밀도도 같이 증가하게 된다. 표에서의 각은  $\theta = \sin^{-1}(mk)$ 로 횡방향 파수성분과 연관되어 있다.

이번에는 Padé 근사에 의한 포물형 모형의 정밀도를 직

**Table 3.** Computations of different Padé approximants in the phase function  $\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$

$\theta$	Exact	$P_{(1,1)}$	$P_{(3,3)}$	$P_{(5,5)}$	$P_{(7,7)}$	$P_{(10,10)}$	$P_{(15,15)}$	0.5% $\leq$ error
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
10	0.9848	0.9848	0.9848	0.9848	0.9848	0.9848	0.9848	
20	0.9397	0.9397	0.9397	0.9397	0.9397	0.9397	0.9397	
30	0.8660	0.8667	0.8660	0.8660	0.8660	0.8660	0.8660	
40	0.7660	0.7696	0.7660	0.7660	0.7660	0.7660	0.7660	$P_{(1,1)}$
50	0.6428	0.6561	0.6428	0.6428	0.6428	0.6428	0.6428	
60	0.5000	0.5385	0.5005	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	
70	0.3420	0.4334	0.3467	0.3423	0.3420	0.3420	0.3420	$P_{(3,3)}$
80	0.1736	0.3599	0.2062	0.1811	0.1755	0.1739	0.1737	$P_{(5,5)}, P_{(7,7)}$
90	0.0000	0.3333	0.1429	0.0909	0.0667	0.0476	0.0323	$P_{(10,10)}, P_{(15,15)}$

**Table 4.** Computations of different Padé approximants in the amplitude function  $(1 - \sin^2 \theta)^{-1}$

	Exact	$P_{(1,1)}$	$P_{(3,3)}$	$P_{(5,5)}$	$P_{(7,7)}$	$P_{(10,10)}$	$P_{(15,15)}$	0.5% $\leq$ error
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	
10	1.0311	1.0304	1.0311	1.0311	1.0311	1.0311	1.0311	
20	1.1325	1.1205	1.1324	1.1325	1.1325	1.1325	1.1325	$P_{(1,1)}$
30	1.3333	1.2667	1.3325	1.3333	1.3333	1.3333	1.3333	
40	1.7041	1.4608	1.6941	1.7038	1.7041	1.7041	1.7041	
50	2.4203	1.6877	2.3403	2.4143	2.4199	2.4203	2.4203	
60	4.0000	1.9231	3.4812	3.9095	3.9863	3.9993	4.0000	$P_{(3,3)}$
70	8.5486	2.1332	5.3526	7.3491	8.1556	8.4838	8.5459	$P_{(5,5)}, P_{(7,7)}$
80	33.1634	2.2803	7.7272	14.6577	20.8533	27.1753	31.6348	$P_{(10,10)}, P_{(15,15)}$
90		2.3333	9.0000	21.0000	38.3333	74.3333	161.000	

접 분석하기 위해 등수심선이 직선인 해안선과 평행한 지형에서의 파랑변형을 계산하여 이를 서로 비교하였다. 이때 일정한 사면에 대한 파고의 변화는 굴절에 대한 엄밀해인 식 (3)으로 나타낼 수 있고 파수는 선형 파랑분산식을 사용 계산하였다. 해저경사는 1:100이고 계산 영역의 수심은 10 m에서 1 m까지로 x방향 격자점은 100개(M=99)로 구성된다. 파랑의 제원으로는 주기 7초, 파고 0.2 m, 다수의 입사각을 사용하여 구한 파고비를 계산하였다.

Snell 법칙을 적용할 수 있는 경우 포물형 근사모형의 해는 식 (7)과 같은 지수함수의 형태를 취한다. 일반적으로 이 해는 수치계산법에 의해 구하게 되며 여기서는 수치적분인 Simpson법을 사용하였다. 파고의 계산에는 식 (3)의 엄밀해에  $\cos\theta$ 가 존재하므로 계산된 파향에 영향을 받는다. Table 3과 Table 4에 보인 바와 같이 파향계산의 오차는 파고계산의 오차보다 훨씬 작기 때문에 본 논문에서는 오차가 큰 파고계산 결과만을 제시하였다.

일정 경사의 수심을 갖는 지형에 대한 수치실험의 입사각은 30°, 50° 또는 60° 그리고 80°로 정해 본 연구에 제시한 Padé 근사 포물형 모형의 파고비를 계산하였다. 이 수치실험에는 본 논문에 제시된 포물형 모형 가운데 일부분인 Padé (2,2), (3,3), (5,5), (7,7), (10,10) 그리고 (15,15)를 선정하였다.

한편 파랑이 진행함에 따라 파향은 굴절로 인해 감소하여 점차 x방향 쪽으로 향하게 되며 따라서 포물형 근사모형은 점차 좋은 결과를 보일 것을 예상할 수 있다. Fig. 1은 Padé (2,2)와 (3,3)으로 계산한 파고비를 엄밀해와 비교한 것이며 그림의 결과로부터 이 모형들은 입사각이 30°인 경우에 정확히 파고비를 계산함을 알 수 있다. 그림에서 오차가 뚜렷한 입사각 50°과 80°의 결과를 분석하면 진행거리에 따라 계산오차가 누적되는 것으로 나타났으며 여기서 오차는 포물형 근사모형의 계산 값에서 굴절모형의 엄밀해의 값을 뺀 것이다.

이 오차가 수치적분에 의한 것인지 모형의 특성에 기인한 것인지 검토하기 위해 오차가 뚜렷한 입사각 80°의 경우에 대해 격자점 100개와 1001개를 사용한 모형별 오차 그리고 굴절모형으로 계산한 파향을 Fig. 2에 각각 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 격자점의 개수를 늘려도 오차는 감소하지 않으며 이로부터 수치적분에 의한 오차가 아닌 것으로 판단된다. 본 계산에 사용한 파랑제원을 이용하면 선형 분산식으로부터 입사 시점인 수심 10 m에서의 파장은 59.82 m이고 해안에 인접한 경계의 수심 1 m에서는 21.62 m가 된다. 그리고 100개 격자점의

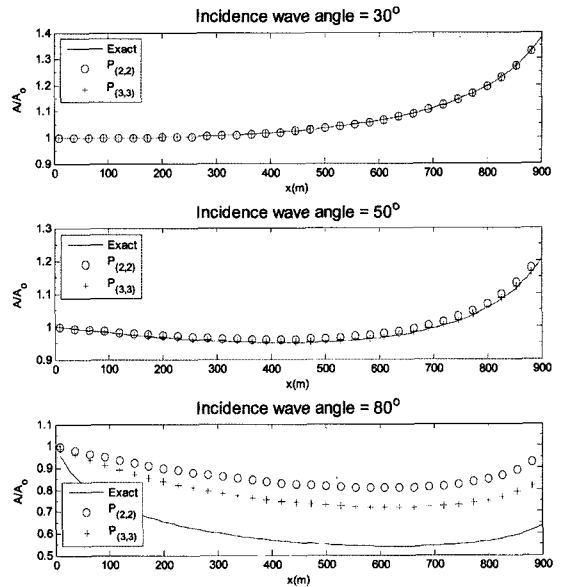


Fig. 1. Computed linear wave amplitude ratio by Padé (2,2) and Padé (3,3) approximations for a constant sloping bed (1:100).

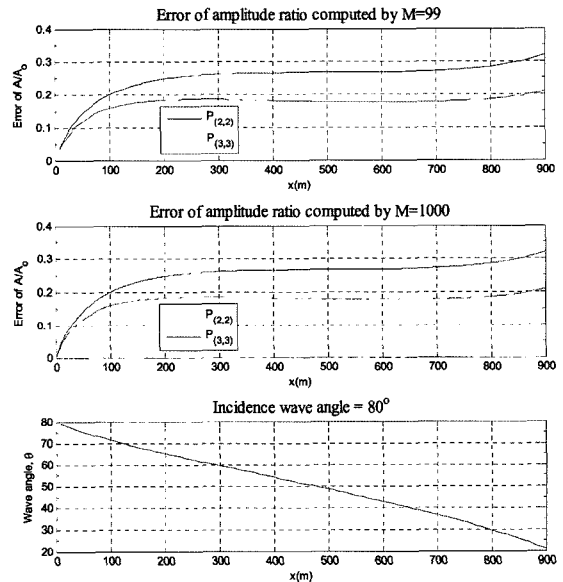


Fig. 2. Computed linear wave amplitude ratio error by Padé (2,2) and Padé (3,3) approximations for a constant sloping bed (1:100).

간격 9.09 m 이므로 해안 경계에서는 파장당 2.4개의 격자점이 존재하여 이때 수치적분에 의한 오차는 무시할 정도로 작은 것으로 보인다.

Fig. 2에 도시된 오차는 고차인 Padé(3,3) 모형이 Padé

(2,2)에 비해 작게 나타났고 거리 50 m까지는 오차가 급격히 증가한 후 300 m까지 완만한 증가를 보이다 700 m까지는 오차가 일정함을 보인다. 그리고 거리 700 m를 지나면 오차가 다시 증가하는 특이한 형태를 보인다. 한편 그림에 도시된 700 m 지점의 파향은 36° 정도로 이 후에는 더 작아져 경계점인 거리 900 m에서는 21°에 이르며 위 모형들은 Fig. 1에서 알 수 있듯이 700 m 보다 먼 지역에서는 오차가 발생하지 않을 것으로 예상되었으나 계산 결과는 오히려 증가하였다. 이 원인에 대해 현재로서는 분명히 밝히지 못하나 모형의 특성에 연관된 것으로 추정하고 있다. 다만 이 구역에서도 고차 모형의 오차 증가율은 저차에 비해 상대적으로 낮다.

Fig. 3에는 Padé (5,5)와 (7,7) 모형의 결과를 엄밀해와 비교하였다. 이 모형들의 결과는 입사각 60°까지 엄밀해와 같은 것임을 보이고 있다. Fig. 1과 이를 비교하면 Padé 근사의 차수가 증가하면 입사각이 큰 경우에도 엄밀해의 결과에 접근함을 알 수 있다. 이러한 결과는 앞의 Table 3과 4에 제시한 자료 및 분석과 같은 경향을 보이며 특히 Table 4의 진폭함수의 근사가 본 수치실험의 파고비 계산결과에 영향을 더 주는 것으로 분석된다.

Fig. 4에서 Padé (10,10)와 (15,15) 모형의 결과를 엄밀해와 비교하였다. 이 결과로부터 Padé (15,15) 모형은

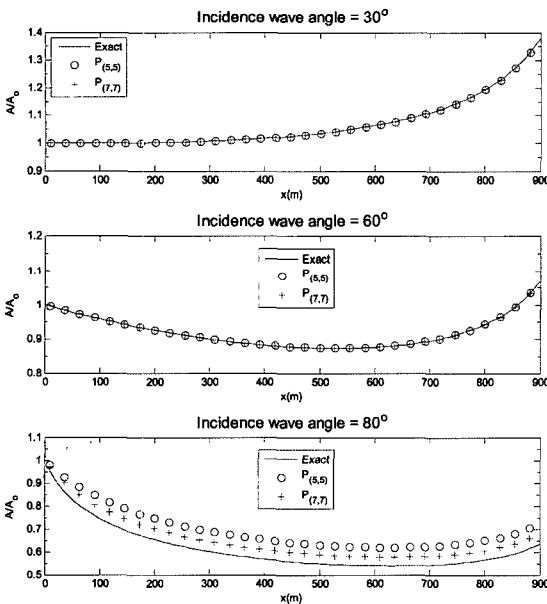


Fig. 3. Computed linear wave amplitude ratio by Padé (5,5) and Padé (7,7) approximations for a constant sloping bed (1:100).

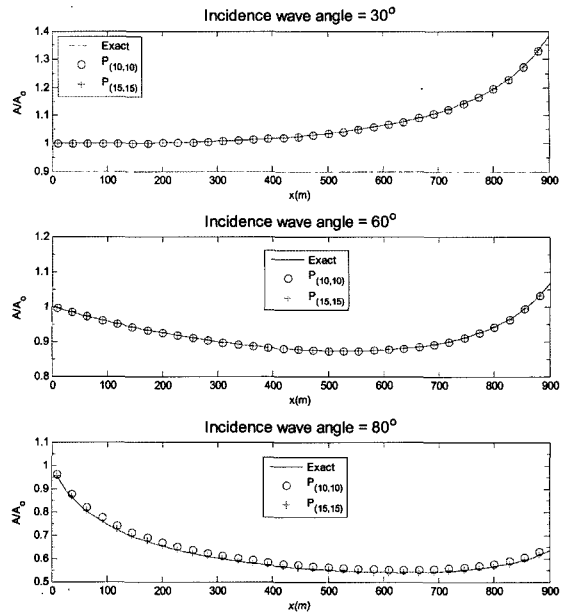


Fig. 4. Computed linear wave amplitude ratio by Padé (10,10) and Padé (15,15) approximations for a constant sloping bed (1:100).

입사각 80°까지 파고비를 정확히 계산하는 것으로 판단된다. 불규칙 파랑의 변형을 계산할 때 입사각을 세분하여 각 세분된 구간의 대표 입사각을 정하며 이 경우 80°의 입사각은 가장 큰 각을 대표하는 것으로 간주할 수 있다. 따라서 Padé (15,15) 모형을 사용하면 공학적 이용의 측면에서 다방향 불규칙 파랑의 변형을 적합하게 계산할 수 있을 것으로 예상된다.

Fig. 5에 Fig. 2에서 보인 바와 같이 입사각 80°에 대해 Padé (10,10)와 (15,15) 모형으로 계산한 오차를 나타내었다. 고차 모형의 결과인 Fig. 5는 Fig. 2 결과보다 훨씬 낮은 오차를 보이며 여기서도 격자점의 개수에 따른 모형별 오차는 변하지 않음을 알 수 있다. 파랑의 진행 거리에 따른 본 그림에 나타낸 오차는 Fig. 2의 오차와는 다른 형태로 Padé (10,10)의 경우에는 약 80 m에서 최대 오차를 보인 후 감소하다가 700 m 지점에서 다시 증가하였다. 반면에 Padé (15,15) 모형은 60 m까지 증가한 후 오차가 거의 변하지 않았으며 격자의 개수가 증가한 경우 오히려 오차가 더 커졌으나 그 크기는 0.001정도로 아주 작다.

본 절의 수치실험을 통해 Padé 근사의 차수가 증가하면 파고비 계산의 오차가 감소하며 입사각이 증가하면 고차의 Padé 근사모형이 필요함을 보였다. Padé 근사에 의



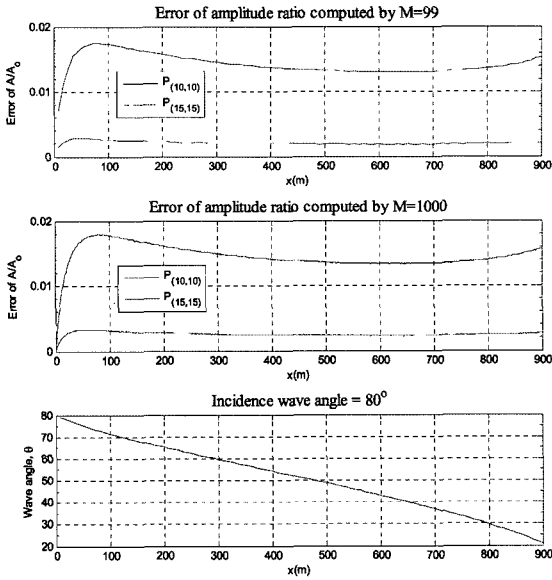


Fig. 5. Computed linear wave amplitude ratio error by Padé (10,10) and Padé (15,15) approximations for a constant sloping bed (1:100).

한 본 포물형 모형은 Padé 근사의 특성과 같이 고차 모형은 저차 모형의 정밀도를 내포하고 차수가 증가하면 정밀도가 점차 향상된다. 따라서 설정된 정밀도를 얻기 위해 필요 이상의 고차 모형을 사용하는 것은 실용성이 떨어지는 것으로 판단된다.

본 수치실험의 결과를 종합 분석하여 제시된 개별 포물형 근사모형의 적용가능 입사각을 Table 5에 정리하였다. 표에는 지면의 제한으로 위에서 제시하지 않은 결과를 포함하였으며 입사각의 증가에 대해 모형 차수의 증가는 선형적인 경향을 보이는 것이 아니라 입사각이 상

Table 5. Applicability of parabolic approximation models to a constant sloping bed (1:100)

Model	Applicable incidence angle
Padé (1,1)	approximately to 30°
Padé (2,2)	approximately to 45°
Padé (3,3)	approximately to 50°
Padé (4,4)	approximately to 55°
Padé (5,5)	approximately to 65°
Padé (6,6)	approximately to 70°
Padé (7,7)	approximately to 70°
Padé (8,8)	approximately to 75°
Padé (9,9)	approximately to 75°
Padé (10,10)	approximately to 75°
Padé (15,15)	approximately to 80°

당히 큰 경우에는 차수 증가에 따른 정밀도 개선 정도는 상대적으로 작음을 보인다. 한편 표에 제시한 포물형 근사모형의 정밀도 기준은 입사파고와 지형의 특성에 따라 변하기 때문에 개략적인 기준임을 밝힌다.

#### 4. 결 론

포물형 근사식에 Padé 근사를 이용하면 체계적인 방법으로 유도할 수 있음을 보이고 일정 사면의 지형에서 입사각 80°까지 공학적 이용측면에서 판단할 때 정확히 파고비를 계산하는 15차 Padé 근사에 의한 포물형 근사모형과 저차 모형들을 제시하였다. 본 논문의 근사식을 이용하면 기존 포물형 근사모형의 입사각에 따른 제약을 해소되어 다방향 불규칙파랑의 변형을 정확히 계산할 수 있다. 그러나 제시된 근사식에 대한 수치실험은 단순한 지형을 대상으로 하였기에 보다 복잡한 지형에 적용할 수 있는 수치모형의 개발에 대한 연구가 필요하다.

본 포물형 근사모형은 저차에서는 입사각 증가에 따른 정밀도를 급속히 증가하나 고차로 갈수록 증가율이 둔화됨을 수치실험을 통해 보였다. 또한 파향의 근사보다는 정밀도가 낮은 파고근사에 의해 포물형 근사모형의 정밀도가 좌우됨을 해석적 분석과 수치실험을 통해 각각 입증하였다. 그리고 파향 및 파고 근사와 일정 사면의 지형에 대한 수치실험의 결과를 분석하여 Padé 근사에 의한 개별 포물형 모형들의 적용 입사각을 제시하였다.

#### 감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “해상파랑 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

#### 참고문헌

서승남 (1990). 포물형 근사식에 의한 천해파 산정모델. 한국 해안·해양공학회지, 2(3), 134-142.  
 서승남, 이종찬 (2006). 수정 완경사 파랑식에 대한 포물형 근사식 모형. 한국 해안·해양공학회지, 18(4), 360-371.  
 서승남, 이동영 (2007a). 포물형 근사식 수치모형의 투과 경계조건. 한국 해안·해양공학회지, 19(2), 170-178.  
 서승남, 이동영 (2007b). 고차 포물형 파랑 근사식. 한국 해안·해양공학회지, 19(3), 360-371.  
 해양수산부 (2005). 항만 및 어항 설계기준.

- Berkhoff, J.C.W. (1972). Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th Coastal Eng. Conf., 1, 471-490.
- Berkhoff, J.C.W., Booij, N. and Radder, A.C. (1982). Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear waves. Coastal Eng., 6, 255-279.
- Booij, N. (1981). Gravity waves on water with non-uniform depth and current. Report 81-1, Dept. of Civil Eng., Delft Univ. Technology.
- Dean, R.G. and Dalrymple, R.A. (1984). Water wave mechanics for engineers and scientists. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Dalrymple, R.A. and Kirby, J.T. (1988). Models for very wide-angle water waves and wave diffraction. J. Fluid Mech., 192, 33-50.
- Dalrymple, R.A., Suh, K.D., Kirby, J.T. and Chae, J.W. (1989). Models for very wide-angle water waves and wave diffraction. Part 2. Irregular bathymetry. J. Fluid Mech., 201, 299-322.
- Jain, M.K., Iyengar S.R.K. and Jain R.K. (1985). Numerical Methods for Scientific and Engineering Computation. Wiley Eastern Ltd., New Delhi, India.
- Kirby, J.T. (1986a). Higher order approximations in the parabolic equation method for water waves. J. Geophys. Res., 91, 933-952.
- Kirby, J.T. (1986b). Rational approximations in the parabolic equation method for water waves, Coastal Eng., 10, 355-378.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1986). Approximate model for nonlinear dispersion in monochromatic wave propagation. Coastal Eng., 9, 545-561.
- Liu, P.L.-F. (1990). Wave transformation. The Sea, B. LeMehaute and D.M. Hanes, eds., Ocean Engineering Science, 9, Wiley, New York, 27-63.
- Mei, C.C. (1989). The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. World Scientific, Singapore.
- Mordane, S., Mangoub G., Maroihi K.L. and Chagdali M. (2004). A parabolic equation based on a rational quadratic approximation for surface gravity wave propagation. Coastal Eng., 50, 85-95.
- Nwogu, O. (1993). Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 119(6), 618-638.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T. (1986). Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press.
- Radder, A.C. (1979). On the parabolic equation method for water-wave propagation. J. Fluid Mech., 95, 159-176.
- Wei, G., Kirby, J.T., Grilli, S.T., Subramanya, R. (1995). A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. J. Fluid Mech., 294, 71- 92.

---

Received June 7, 2007

Accepted August 14, 2007