

모드변형에너지를 기저로 하는 위상최적화기법을 사용한 보의 고유진동수 최대화

The Natural Frequency Maximization of Beam Structures by using Modal Strain Energy based Topology Optimization Technique

이 상 진* 배 정 은**
Lee, Sang-Jin Bae, Jung-Eun

요 약

위상최적화기법을 이용하여 보의 기본고유진동수 최대화문제를 수행하였다. 도입된 위상최적화기법은 구조물의 모드형상에 의해서 발생하는 모드변형에너지를 바탕으로 한다. 최소화하고자하는 모드변형에너지를 목적함수로 하고 구조물의 초기부피를 제약함수로 채택하였다. 최적정기준법을 바탕으로 한 크기조절알고리즘을 유한요소내부에 존재하는 셀의 빈공간의 크기를 조절하기 위해 도입하였다. 세 가지의 다른 경계조건을 가지는 보를 이용하여 자유진동모드형상에 저항하는 보의 최적위상을 조사하였다. 수치해석결과로부터 도입된 위상최적화기법을 이용하여 도출한 보의 최적위상은 초기구조물에 비해 저차의 자유진동수가 크게 증가하는 것으로 나타났으며 특히 모드변형에너지를 이용하는 위상최적화의 경우에는 구조물의 기본진동수를 최대화하는데 매우 효과적인 것으로 나타났다.

Abstract

The fundamental frequency maximization of beam structures is carried out by using strain energy based topology optimization technique. It mainly uses the modal strain energy distributions induced by the mode shapes of the structures. The modal strain energy to be minimized is employed as the objective function and the initial volume of structures is adopted as the constraint function. The resizing algorithm devised from the optimality criteria method is used to update the hole size of the cell existing in each finite element. The beams with three different boundary conditions are used to investigate the optimum topologies against natural mode shapes. From numerical test, it is found to be that the optimum topologies of the beams produced by the adopted technique have high increases in some values of natural frequencies and especially the technique is very effective to maximize the fundamental frequency of the structures.

키워드 : 위상최적화, 모드형상, 모드변형에너지, 크기조절알고리즘, 고유진동수

Keywords : Topology Optimization, Mode Shape, Modal Strain Energy, Resizing Algorithm, Natural Frequency

1. 서 론

구조물의 설계최적화에 대한 연구는 일반적으로 부재의 크기를 조절하는 크기최적화, 구조물의 형상을 조절하는 형상최적화 그리고 구조물의 재료 밀도를 조절하여 최적위상을 도출하는 위상최적화로 분류된다. 전통적인 최적화기법은 크기와 형상을 조

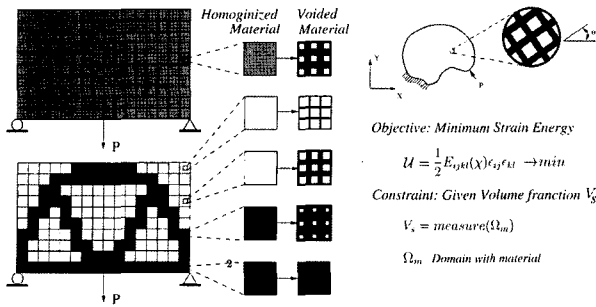
절하여 사용자가 원하는 목적함수를 만족시키는 크기최적화와 형상최적화 기법¹⁾을 연구하는데 중점을 두었지만 최근에는 재료를 재분배하여 구조물의 최적위상을 찾는 위상최적화에 대한 관심과 시도가 활발히 이루어지고 있다.

위상최적화기법은 <그림 1>에 도시된 바와 같이 구조물을 이루고 있는 재료를 주어진 최적화문제에 맞게 재분배함으로써 구조물의 최적위상을 찾아내는 것이다.²⁻⁴⁾

초기에는 물질을 표현하는 재료모델⁵⁾과 물질을

* 교신저자, 정회원 · 경상대학교 건축공학과 조교수, Ph.D.
Tel : 055-751-6541 Fax : 055-757-7022
E-mail : lee@gnu.ac.kr

** 정회원 · 경상대학교 공학연구원, 초빙연구원



<그림 1> Basic Concept of Topology Optimization²⁾

재분배하기 위한 알고리즘⁶⁻⁸⁾에 대한 연구가 활발히 이루어졌으며 점차 위상최적화의 적용성에 대한 연구가 시도되기 시작했다.⁹⁻¹¹⁾ 이러한 일련의 연구는 구조물의 정적응력특성에 집중되어져 있었다. 그런데 최근에 구조물의 고유진동수와 같은 동적특성의 변화를 고려하는 위상최적화기법에 대한 연구결과가 보고되고 있다.¹²⁻¹⁴⁾ 본 연구에서는 보의 자유진동 모드에 의해서 유발되는 모드변형에너지를 이용하여 보의 동적특성을 고려하는 방식으로 자유진동 모드에 저항하는 보의 최적위상을 조사하고 그 결과를 기술하고자 한다.

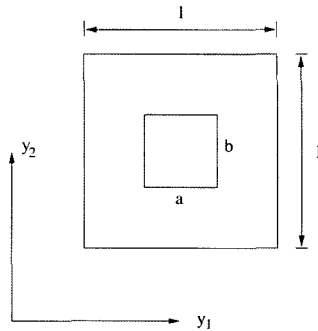
2. 재료모델

위상최적화는 비 등질의 단위 셀이 구조물에 반복적으로 분포되어 있다는 가정을 전제로 한다.⁴⁾ 유한요소법을 도입하게 되면 설계영역이 이산화 되고 하나의 유한요소에 하나의 셀이 존재하는 것으로 가정할 수 있다. 따라서 구조물의 전체 설계영역 Ω 는 셀이 유한요소의 수만큼 반복되어진 것으로 간주 할 수 있다. <그림 2>와 같이 사각형 빈 공간을 포함하고 있는 단위 셀을 위상최적화에 도입하면 재료밀도함수 ξ 는 $\xi(a,b) = 1 - ab$ 로 나타낼 수 있으며 셀속에 존재하는 빈공간의 크기는 $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$ 의 범위를 가진다.

단위셀의 미세구조체가 등방성 물질로 이루어져 있다고 가정하면 구조물의 강성행렬 D 는 a 와 b 의 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D := D^h(a,b) \tag{1}$$

여기서 a, b 는 요소 내에 존재하는 빈 공간의 크기



<그림 2> Unit cell with rectangular hole in microscopic coordinates

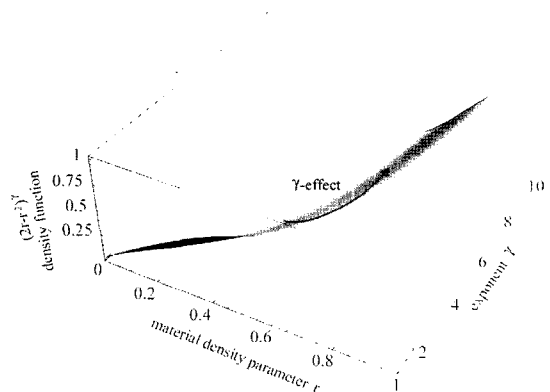
를 결정하는 변수이며, 물성행렬 $D^h(a,b)$ 는 단위셀의 물질이 채워진 부분의 면적과 지수 γ 를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D^h(a,b) = (1 - ab)^\gamma D = \rho(a,b)^\gamma D \tag{2}$$

본 연구에서는 <그림 2>의 사각형 구조체의 모양을 정사각형($a \times a$)으로 가정하여 평면응력상태에 있는 구조물의 물성행렬 D^h 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$D^h = \frac{\rho(r)^\gamma E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

여기서 밀도함수는 $\rho(r) = 2r - r^2$ 이다. 그리고 재료밀도 매개변수($r = 1 - a$)로 단위 셀의 빈공간의 크기(a)를 정의하였다. 정의된 지수형태의 밀도함수 $\rho(r)^\gamma$ 의 분포는 <그림 3>에 도시한 바와 같다.



<그림 3> Material density function with respect to the exponent γ

3. 크기조절알고리즘

설계영역 Ω 내에 존재하는 물질의 빈공간의 크기를 조절하기 위해 물질의 초기부피를 일정하게 유지하면서 변형에너지를 최소화하는 최적정기준을 사용하였다. 그리고 각 단위요소의 재료밀도 매개변수를 설계변수로 이용하였다. 이때 유한요소법을 사용한 이산화 된 영역에서는 구조물이 재료밀도매개변수 r_e 를 가지는 요소 e 의 조합으로 표현되며 설계변수의 수는 유한요소의 수와 동일하게 된다. 최적정기준을 이용하여 크기최적화알고리즘을 유도하기 위하여 위상최적화문제를 다음과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } U \\ & \text{subject to } V_s = \sum_{e=1}^{nel} (2r_e - r_e^2) V_e \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 U 는 변형에너지를 나타내고 V_s 는 초기구속부피, V_e 는 요소 e 의 부피를 나타내며 nel 은 설계영역에 이산화된 유한요소의 수 그리고 설계변수 벡터는 다음과 같다.

$$r = [r_1, r_2, \dots, r_e, \dots, r_{nel}]^T \quad (5)$$

식 (4)에 정의된 최적화문제는 라그랑지 승수를 이용하여 구속조건을 목적함수에 추가함으로써 다음과 같이 라그랑지함수 L 로 정의된다.

$$\begin{aligned} L(r_e) = & U - \Lambda \left(\sum_{e=1}^{nel} (2r_e - r_e^2) - V_s \right) \\ & - \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^+ (r_e - 1) + \sum_{e=1}^{nel} \lambda_{r_e}^- r_e \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 Λ , $\lambda_{r_e}^+ = [\lambda_{r_1}^+, \lambda_{r_2}^+, \dots, \lambda_{r_{nel}}^+]$, $\lambda_{r_e}^- = [\lambda_{r_1}^-, \lambda_{r_2}^-, \dots, \lambda_{r_{nel}}^-]$ 는 라그랑지 승수이며 r_e 는 설계변수를 나타낸다. 식 (6)에서 라그랑지 승수 $\lambda_{r_e}^+$, $\lambda_{r_e}^-$ 는 항상 만족 되므로 식 (6)에 정의된 라그랑지 함수 L 의 정상조건(stationary condition)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2\Lambda(1-r_e)} \frac{\partial}{\partial r_e} \left(\sum_{i=1}^n U_i \right) = 1 \quad \text{또는} \quad B_{r_e} = 1 \quad (7)$$

식 (7)은 재료밀도 매개변수와 변형에너지의 관계를 나타내는데 이를 이용하면 식 (8)와 같은 크기조절 알고리즘이 제시된다.

$$\begin{aligned} r_e^{k+1} = & MAX \quad \text{if } r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq MAX \\ = & r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \quad \text{if } MAX \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \leq MIN \\ = & MIN \quad \text{if } MIN \leq r_e^k (B_{r_e}^k)^\eta \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $MAX = \max\{(1-\zeta)r_e, 0\}$ 이고, $MIN = \min\{(1+\zeta)r_e, 1\}$ 이고, η 는 조절변수이고, ζ 는 각 단계에서 설계변수 r_e 를 제어하는 이동변수이다. 그리고 $B_{r_e}^k$ 는 k 번째 반복계산에서 $B_{r_e}^k$ 값을 나타낸다.

4. 모드변형에너지

본 연구에서는 구조물의 모드변형에너지분포를 계산하기 위하여 자유진동해석을 수행하였다. 자유진동을 경험하는 구조물은 유한요소정식화를 거쳐 아래와 같은 고유치문제를 도출하게 된다.

$$K\Phi = \Lambda M\Phi \quad (9)$$

여기서 K 는 대칭을 이루는 정치의 전체강성행렬이고 M 은 전체 질량행렬을 나타낸다. Λ 는 고유벡터 Φ 의 고유벡터 성분과 관련한 고유치를 포함한 직교행렬이다. 본 연구에서 식(9)의 해는 부분공간반복법을 이용하여 구할 수 있는데 이 때 n 개의 고유치가 오름차순으로 다음과 같이 구해진다.

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_n \quad (10)$$

참고로 이때 전체강성행렬과 전체질량행렬은 고유벡터에 대해 다음과 같이 M-직교성과 K-직교성의 특성을 가진다.

$$\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij} \quad i = j = 1, 2, \dots, n \quad (11a)$$

$$\phi_i^T K \phi_j = \lambda_j \delta_{ij} \quad i = j = 1, 2, \dots, n \quad (11b)$$

평면응력상태에 있는 구조물의 i 번째 자유진동모드에 대한 변형에너지 분포는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$U^i = \left[\sum_{e=1}^{nel} \frac{1}{2} \int \phi_e^T K_e \phi_e dV \right]^i \quad (12)$$

여기서 ϕ_e 는 요소 e 와 관련한 자유진동모드벡터를 나타낸다.

구조물설계에 고려할 진동모드를 전부 n 개라고 가정하면 이들에 대한 구조물의 전체 모드변형에너지는 다음과 같이 가중치를 도입하여 표현할 수 있다.

$$U = \sum_{i=1}^n w_i U^i \quad (13)$$

여기서 U^i 는 i 번째 자유진동모드에 의해 유발되는 변형에너지를 나타내며 w_i 는 상응하는 가중치를 나타낸다. 식 (13)에 정의된 변형에너지를 이용하면 다수의 진동모드를 동시에 고려하는 최적화를 수행할 수 있다.

5. 최적화알고리즘

최적정기준을 이용하여 구조물의 위상최적화 알고리즘을 형성하면 다음과 같다.

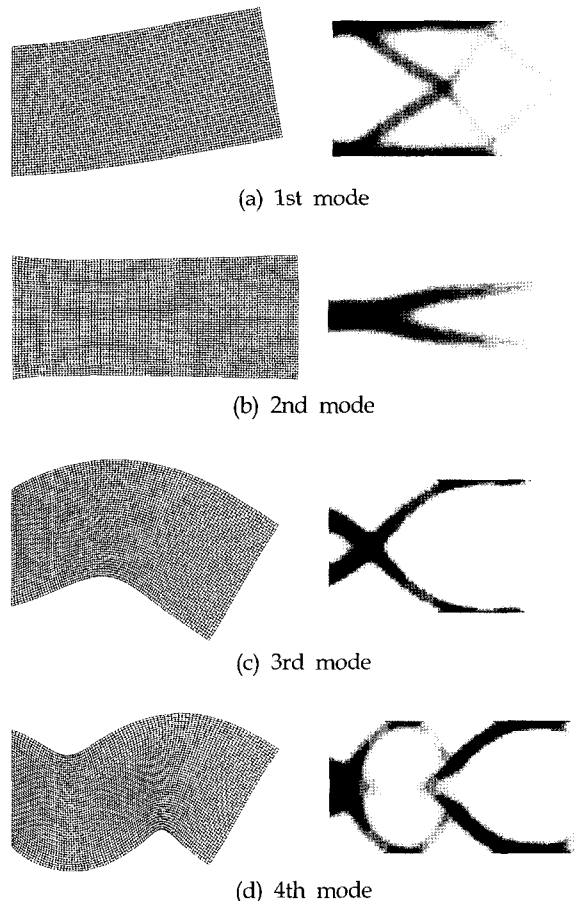
- ① 주어진 재료의 양을 이용하여 초기 설계변수값을 계산한다. 설계변수값은 재료밀도벡터로 주어진다.
- ② 초기(또는 갱신된) 재료밀도벡터로 형성한 등질화된 물질을 반응해석에 이용하여 구조물의 변위값을 구한다.
- ③ 계산된 변위값을 사용하여 목적함수 값 U_e 를 구하고 식(7)에서 필요한 설계변수에 대한 목적함수의 민감도 $\sum_{i=1}^n \partial U_e / \partial r_e$ 를 계산한다.
- ④ 식(7)을 이용하여 라그랑지승수 λ 를 구한다.
- ⑤ 설계변수값을 갱신한다.
- ⑥ 갱신된 설계변수값을 여과한다.15)
- ⑦ 갱신된 설계변수값이 주어진 정지조건을 만족하면 최적화를 멈추고 그렇지 않으면 ②-⑥을 반복한다.

6. 수치예제

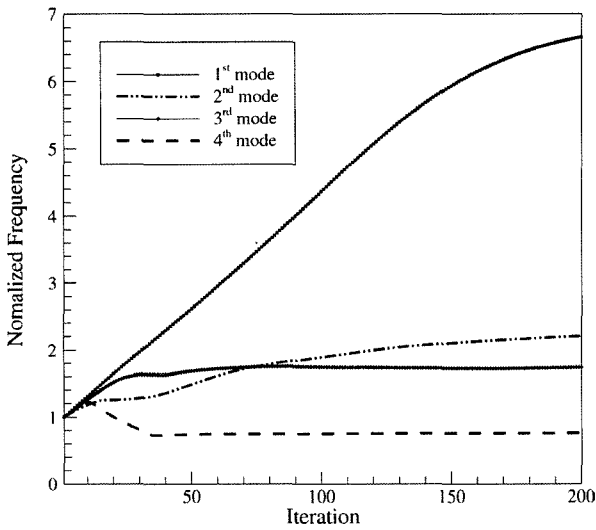
6.1 캔틸레버

자유진동모드에 의해서 유발되는 모드변형에너지

의 영향을 고려한 캔틸레버 보의 최적위상을 조사하기 위하여 크기가 $10m \times 5m$ 인 직사각형 설계영역을 이용하였다. 보의 재료특성치는 탄성계수가 $E=10 \times 10^6 N/m^2$ 이고 프와송비가 $\nu=0.3$ 이다. 위상최적화에 필요한 변형에너지를 계산하기 위해 보를 5051개의 절점과 5000개의 4절점 평면응력 유한요소로 이산화하였다. 이때 보의 재료는 가동질화된 물질로 표현하였고 지수값은 $\gamma=5$ 를 택하였다. 본 연구에 도입된 크기조절 알고리즘의 조절변수와 이동변수값은 각각 $\eta=1.0$, $\zeta=0.015$ 를 사용하였다. 최적화에는 40%의 초기부피를 구속조건으로 이용하였다. 이때 나타나는 최적위상과 진동수의 변화는 <그림 4>와 <그림 5>에 각각 도시하였다. <그림 4>에는 1번째 진동모드부터 4번째 진동모드에 의해서 유발되는 변형에너지를 최소화하여 도출한 최적위상을 나타내며 <그림 5>는 <그림 4>의 최적위상을 도출하기 위한 반복계산과정에서 나타난 캔틸레버 보의 진동수변화과정을 나타낸다. 기본진동수와 연



<그림 4> Mode shapes and optimum topology



〈그림 5〉 Natural Frequency History

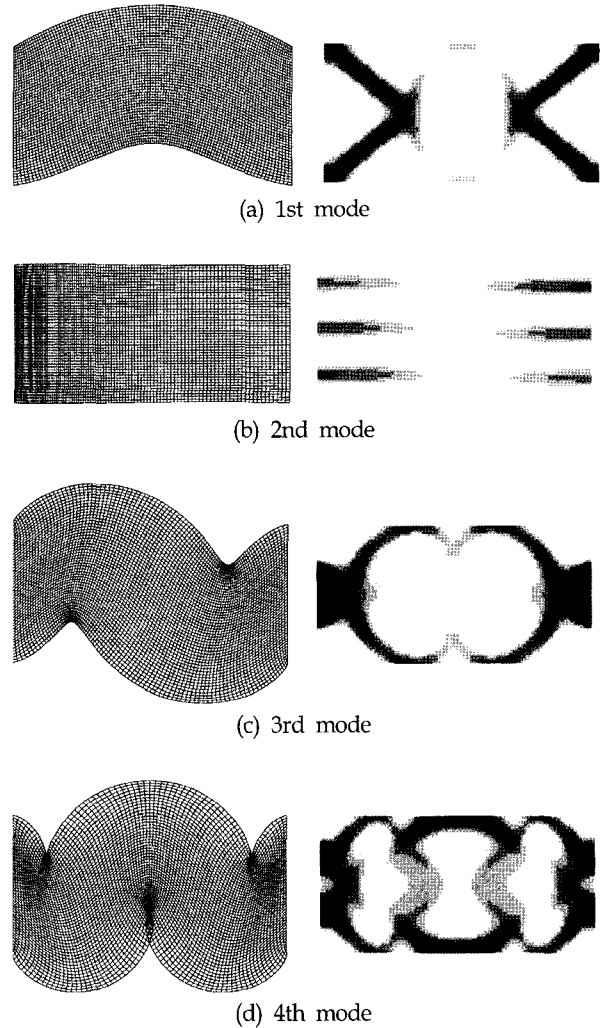
관한 자유진동모드에 의해서 유발되는 모드변형에너지를 최소화한 결과, 보의 기본진동수가 초기구조물의 약 6.7배 증가하는 것으로 나타났다. 그러나 2차, 3차, 4차 진동모드에 의해 유발되는 변형에너지를 최소화한 결과 캔틸레버 보의 2차, 3차, 4차 고유진동수가 각각 2.2배, 1.7배, 0.77배 증가하였다.

본 예제를 통하여 모드변형에너지의 최소화를 이용한 고유진동수의 최대화문제에서는 고차진동수와 연관된 모드변형에너지의 경우에는 최적위상의 최종진동수가 초기구조물의 진동수와 비교했을 때 더 낮은 수치를 보이기도 했다.

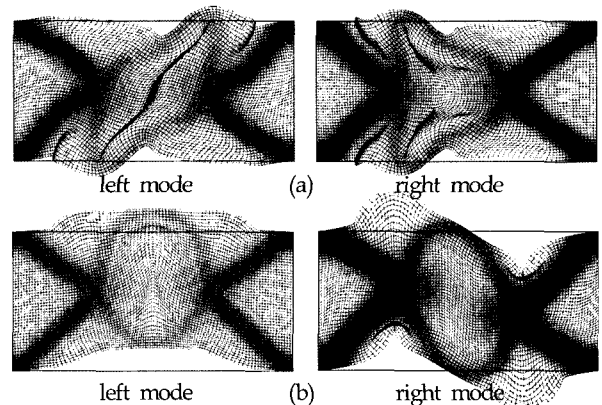
6.2 양단고정보

이 예제에서는 양단이 고정단인 보를 최적화 하였다. 최적화에 사용된 직사각형 보의 크기와 재료 특성치 그리고 최적화에 사용된 매개변수는 전절에서 사용된 것과 동일한 값을 이용하였다. 수치해석 결과 200번의 반복계산을 거쳐서 최적화된 보의 기본진동수가 초기의 기본진동수보다 190% 증가되었다. 그리고 2차, 3차, 4차 자유진동수 또한 각각 2차, 3차, 4차 자유진동모드와 연관한 모드변형에너지 U^2 , U^3 , U^4 의 최소화를 통하여, 초기 자유진동수보다 각각 88%, 198% 그리고 99% 증가되었다. 고차 모드에서 발생한 모드형상에 의한 모드변형에너지가 목적함수로 사용되었을 경우 목표로 하는 고유진동수의 최대값은 더 낮아졌다. 특히, 최적화

된 보의 2차 자유진동수는 초기 보의 값보다 더 작은 값을 나타냈다. 4가지의 각 경우에 대해서 보의 기본진동수가 각각 189%, 93%, 214% 그리고 122% 까지 증가 되었다. 1차에서 4차에 걸친 자유진동모



〈그림 6〉 Mode shapes and optimum topology



〈그림 7〉 Mode shapes of optimized beam

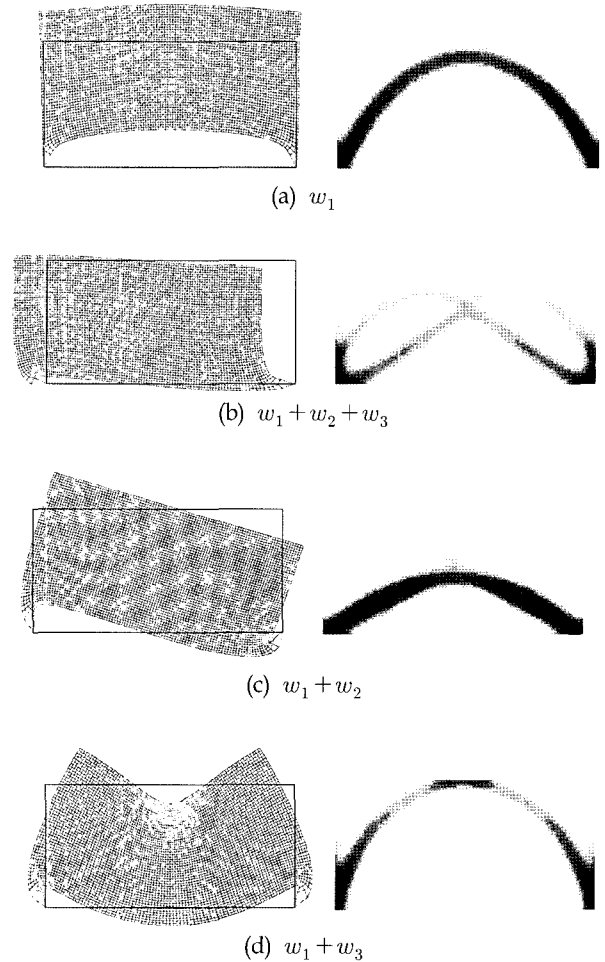
드에 저항하는 최적위상은 <그림 6>에 도시하였다.

추가로, 초기 보와 최적화된 보의 자유진동모드를 비교해 보았다. 초기 구조물의 자유진동모드는 <그림 6>에 도시하였고 최적화된 구조물의 자유진동모드 <그림 7>에 나타내었다. <그림 6>과 <그림 7>에서 보여 지듯이 보의 기본진동모드는 위상최적화 수행 후 변화하였으며 양단이 고정된 보의 경우에는 초기 구조물의 1차, 2차, 3차 모드와 유사한 모드 형상이 최적화된 보의 2차, 3차, 4차 모드에서 나타나고 있음을 확인할 수 있다. 따라서 구조물의 기본진동모드는 최적화를 통하여 변경될 수 있음을 나타낸다.

6.3 단순보

단순 지지된 보의 위상을 최적화하였다. 보의 직사각형 영역의 크기는 $L=3.2m$, $H=2.0m$ 이고, 구조물의 평면에 대해 수직인 두께는 $h=1.0m$ 이다. 물성치는 다음과 같이 사용되었다 : 탄성계수 $E=1.0 \times 10^5 N/m^2$, 프와송비 $\nu=0.3$ 이고, 부피구속 조건은 보 전체 부피의 30%이다. 조절변수 η 와 이동변수 ξ 는 각각 0.8과 0.04로 주어졌다. 부피구속 조건의 허용치 δ 는 0.02로 제한했고, 5000개의 4절점 평면응력 요소가 해석에 사용되었다. 이 예제에서는 다진동수 문제를 시도하였고, 따라서 기본진동수와 고차모드인 다른 진동수들을 위상최적화 과정 중에 가중치 항을 사용하여 함께 고려하였다. 본 예제에서는 다음과 같은 4가지 경우에 대한 최적화를 시도하였다: (a) w_1 (b) $w_1+w_2+w_3$ (c) w_1+w_2 (d) w_1+w_3 . 첫 번째 경우에는 기본진동수만을 최대화 시키도록 하였고, 그 이외의 경우에는 다진동수 문제가 시도되었다. 모든 변형에너지들이 구조물의 기본진동수와 관련된 가중치를 고려한 모드변형에너지를 기준으로 하였다. 수치해석 결과로부터 대칭을 이루는 아치 모양의 구조물을 형성하기 위해 보의 물질이 재분배되었음을 알 수 있다.

200번의 반복계산 후 첫 번째의 경우 기본진동수가 260%까지 증가 되었다. 나머지 3가지 다진동수의 경우 기본진동수가 각각 1210%, 918% 그리고 120%가 증가되었다. 최적위상은 <그림 8>에 나타



<그림 8> Mode shapes and topologies with respect to different multi-frequency cases

나 있다. 수치해석 결과로부터, 구조물의 기본 진동수는 다진동수 문제를 통하여 더욱 효과적으로 최대화 시킬 수 있음을 알 수 있다.

7. 결 론

본 연구에서는 자유진동모드에 의해서 유발되는 모드변형에너지를 기저로 하는 최적화기법을 이용하여 보의 기본진동수가 최대화될 경우에 도출되는 보의 최적위상에 대하여 분석하였다. 최적화결과를 분석한 결과 도입된 최적화기법이 보의 기본진동수를 최대화하는데 매우 효과적인 것으로 나타났다. 그러나 고차진동모드와 연관된 모드변형에너지를 목적함수로 이용하면 진동수의 최대화가 미미한 것으로 나타났다. 수치해석결과를 종합해 보면 보의 기본고유

진동수는 보의 전체 자유진동모드를 지배하는 것으로 판단되며 따라서 고차의 고유진동수만을 최대화하는 최적화를 수행하면 이러한 역학적 특성에 반하는 방향으로 보의 위상을 변화시키는 것으로 판단된다. 따라서 고차의 진동모드에 대한 영향을 고려하기 위해서는 초기보의 기본고유진동수를 함께 고려하는 방법을 이용하는 것이 필요한 것으로 나타났다. 이러한 현상은 본 연구의 다진동수의 문제에서도 정량적으로 제시된 바와 같이 기본고유진동수를 함께 최적화에 고려하면 전체적으로 최적화된 보의 진동수가 증가하는 것으로 알 수 있었다. 본 연구에 도입된 모드 변형에너지를 기저로 하는 위상최적화기법은 보의 동특성을 효과적으로 고려할 수 있을 뿐만 아니라 앞으로 보의 응력특성을 개선하는 최적화기법과 함께 이용될 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 영국 Engineering and Physical Science Research Council (과제번호: GR/K22839)와 건설교통부가 출연하고 한국건설교통기술평가원에서 위탁 시행한 2006년도 건설기술연구개발사업비로 수행되었음(과제번호: C105A1020001-05A 0502-00112).

참고 문헌

- Ding, Y., "Shape optimization of structures: a literature survey", *Computers & Structures*. Vol. 24, pp. 985~1004, 1986.
- Lee, S. J., Bae, J. E. and Hinton, E., "Shell topology optimization using layered artificial material model", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 47, pp. 843~867, 2000.
- Cheng, G. and Olhoff, N., "Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates", *Int. J. of Solid & Structures*, 18, pp.153~169, 1982.
- Bensøe, M. P. and Kikuchi, N., "Generating optimal topologies in structural design using homogenization method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197~224, 1988.
- Sigmund, O., "Design of Material Structures using topology optimization", *Ph.D. Thesis*, Tech. Univ. of Denmark, 1994.
- Xie, Y.M. and Steven, G.P., "A simple evolutionary procedure for structural optimization", *Computers & Structures*. Vol. 49, pp. 885~896, 1993.
- Hinton, E. and Sienz, J., "Fully stressed topological design of structures using an evolutionary approach", *Engineering Computations*, 12, pp.229-244, 1995.
- Walther, F. and Mattheck, C., "Local stiffening and sustaining of shell structures by SKO and CAO", in *Proceeding of International Conference on structural optimization*, edited by C.A. Brebbia and S. Hernandez, Southhampton, UK, 1993.
- 이상진, "저차유한요소를 이용한 다항중경우를 가지는 평면구조물의 위상최적화", *한국전산구조공학회 논문집*, 제16권 제1호, pp. 59-67, 2003.
- 이상진, 박경임, "다하중 경우를 가지는 단순 지지된 깊은 보의 위상최적화에 대한 경험", *한국셀공간구조학회 논문집*, Vol. 5, pp. 83-89, 2005.
- 이상진, 박경임, "자중 및 설계 의존적 하중의 영향을 고려한 다하중을 받는 평면구조물의 최적위상에 대한연구", *대한건축학회논문집 논문집*, 제5권 제2호, pp. 73-80, 2006.
- Lee, S. J. and Bae, J. E., "Topology optimization technique considering both static and dynamic characteristics of the structures", *Proceedings of the 6th International Symposium on Architectural Interchanges in ASIA*, Volume 2, pp.1111~1114, 2006.
- Lee, S. J. and Bae, J. E., "The strain energy based topology optimization technique maximizing the fundamental frequency of the structures", *Proceedings of the 10th East Asia Structural Engineering & Construction*. Vol. 62, pp. 527~538, 2006.
- 이상진, 배정은, 박경임, "구조물의 자유진동 모

드로 유발되는 변형에너지 분포를 이용한 위상 최적화기법”, 한국소음진동공학회 봄학술발표회, CD-Rom 논문집, 2006.

15. Youn, S. K and Park, S. H., “A study on the

shape extraction process in the structural topology optimization using homogenization material”, *Computers & Structures*. Vol. 62, pp. 527~538, 1997.