

## 유체유동 회전 외팔 파이프의 안정성 해석

### Stability Analysis of a Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid

손 인 수† · 윤 한 익\* · 김 동 진\*\*

In-Soo Son, Han-Ik Yoon and Dong-Jin Kim

(2007년 4월 11일 접수 ; 2007년 7월 24일 심사완료)

**Key Words** : Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid(유체유동 회전 외팔 파이프), Natural Frequency(고유진동수), Stability(안정성), Dynamic Characteristics(동특성)

#### ABSTRACT

In this paper the vibration system is composed of a rotating cantilever pipe conveying fluid. The equation of motion is derived by using the Lagrange's equation. Generally, the system of pipe conveying fluid becomes unstable by flutter. Therefore, the influence of the rotating angular velocity, mass ratio and the velocity of fluid flow on the stability of a cantilever pipe by the numerical method are studied. The influence of mass ratio, the velocity of fluid, the angular velocity of a cantilever pipe and the coupling of these factors on the stability of a cantilever pipe are analytically clarified. The critical fluid velocity( $u_{cr}$ ) is proportional to the angular velocity of the cantilever pipe. In this paper Flutter(instability) is always occurred in the second mode of the system.

#### 1. 서 론

이송유체를 갖는 파이프의 형태는 주변에서 흔히 볼 수 있는 구조물이다. 이러한 구조물에서 이송유체는 파이프의 끝단에 집중 접선종동력으로 작용하며, 이 종동력의 영향에 의하여 발생하는 여러 현상들에 대한 연구는 공학의 여러 분야에 걸쳐서 많은 관심의 대상이 되어 왔다. 특히 유동유체에 의한 파이프 구조물의 동정안정성 및 진동특성에 관한 연구는 선형 및 비선형 해석을 통하여 지금까지도 활발히 진행되고 있다<sup>(1-3)</sup>. 이러한 연구들의 대부분은 Benjamin<sup>(4,5)</sup>이 제시한 플러터(flutter) 불안정을 유발하는 임계유속에 깊은 관심을 두고 있다. 또한 이러한 안정성 및 임계유속을 고려한 회전하지 않는

계의 연구에 비하여 회전하는 유체유동 외팔보 및 파이프에 관한 연구는 그리 활발하지 않은 실정이다. 회전 구조물에 관련된 모델링의 종류는 크게 3가지로 분류할 수 있다. 그 첫 번째는 직교 변형변수를 쓰는 선형 모델링이며, 두 번째는 비선형 모델링, 그리고 마지막으로 복합 변형변수를 쓰는 모델링 방법이 있다<sup>(6)</sup>. 복합 변형변수 모델링이 선형 모델링과는 달리 비선형 모델링과 동등하게 회전 구조물의 정확한 동특성을 예측하게 하는 동시에 선형 모델링으로서의 효율성을 유지할 수 있다는 결과를 보여주었다<sup>(6,7)</sup>. 회전운동을 하는 외팔보에 대한 연구를 살펴보면 회전하는 유연 매니플레이터의 비선형 자유진동해석<sup>(8)</sup>, 끝단질량을 갖는 곡선보의 회전운동의 동특성 해석<sup>(9)</sup> 그리고 회전 유체튜브의 동특성 해석<sup>(10)</sup> 등 광범위하게 연구되어지고 있다. 하지만 위의 많은 연구들에서는 회전운동을 하는 외팔보의 동적특성에 관한 내용에 치중되어 있고 유속 및 회전속도에 의한 계의 안정성 평가에 대한 연구 결과

† 교신저자: 정희원, 동의대학교 기계공학과

E-mail : isson92@deu.ac.kr

Tel : (051) 890-2239, Fax : (051) 890-2232

\* 정희원, 동의대학교 기계공학과

\*\* 동의대학교 대학원 기계공학과

들은 드물다. 따라서 이 연구에서는 회전 외팔 파이프의 안정성 해석을 위하여, 점성이 매우 작은 이송 유체의 분사력에 의하여 회전 외팔 파이프의 끝단에 집중 중동력이 작용하는 계를 고려하였으며, 계의 운동방정식은 가정모드방법과 Lagrange 방정식으로 유도하여 수치해석 하였다. 수치해석을 통하여 이송 유체의 속도와 파이프의 회전각속도, 그리고 질량비에 따른 파이프의 동적특성 및 이들 각 요소가 외팔 파이프의 안정성에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

## 2. 이 론

Fig. 1은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반경  $r$ 의 축에 고정되어 회전운동을 하는 이송유체를 갖는 유연 외팔 파이프를 모델링한 것이다. 중력의 영향과 이송유체를 가진 파이프 시스템의 내부, 외부 감쇠는 고려하지 않았으며, 외팔 파이프의 단면은 길이에 비해 아주 작고, 따라서 오일러 가정 및 보 이론을 적용하였다. 또, 보는 균질하고, 등방성이라 가정한다. Fig. 1에서  $x$ 는 외팔 파이프의 고정점  $O$ 로부터 변형전의 임의 질점  $P_0$ 까지의 거리를,  $s$ 는 변형전 임의 질점  $P_0$ 에서 변형후의 질점  $P$ 까지 변형할 때 파이프가 인장된 길이를,  $w$ 는 임의 질점의 탄성 변위 벡터를 나타낸다. 또,  $r$ 은 파이프가 부착된 고정축의 반경을 나타내며,  $U$ 는 유체의 속도를 의미한다. 외팔 파이프의 회전운동 중에 생기는 탄성 변형은 가정 모드법(assumed-mode method)을 이용하여 다음 식으로 근사화 할 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^n \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$w_2 = \sum_{i=1}^n \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

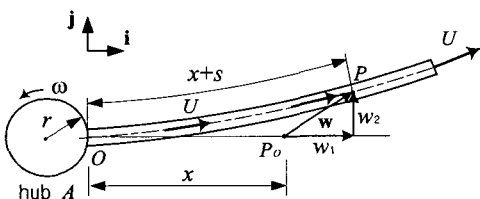


Fig. 1 Original configuration of rotating cantilever pipe

여기서  $\phi_{1i}(x), \phi_{2i}(x)$ 는 각각 축방향과 횡방향 모드 함수,  $q_{1i}(t), q_{2i}(t)$ 는 일반화 좌표, 그리고  $n$ 은 일반화 좌표의 수를 의미한다. 모드함수  $\phi_{1i}(x), \phi_{2i}(x)$ 는 한쪽 단이 고정되고 다른 한쪽은 자유인 외팔보의 방정식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi_{1i}(x) = \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2L} \quad i = 1, 2, 3... \quad (3)$$

$$\phi_{2i}(x) = \cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x) + \alpha_i [\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)] \quad (4)$$

여기서  $L$ 은 파이프의 전체 길이이다.

### 2.1 파이프의 에너지식

변형에 따른 파이프의 임의 질점  $P$ 점의 속도는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$v_P = v_O + v_{P/A} + \omega \times (x + w) \quad (5)$$

여기서  $v_O$ 는  $O$ 점의 속도,  $v_{P/A}$ 는  $A$ 점에 대한  $P$ 점의 상대속도, 그리고 벡터  $\omega$ 는 축의 회전각속도를 나타내고 있다. 식 (5)의 각 항들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_O &= r\omega j, & v_{P/A} &= \dot{w}_1 i + \dot{w}_2 j \\ x &= x i, & \omega &= \omega k, & w &= w_1 i + w_2 j \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $(\cdot)$ 는 시간  $t$ 에 대한 미분을 나타내고,  $w_1$  대신 축방향 변위  $s$ 를 사용하기 위하여  $w_1$ 과  $s$ 사이의 관계는 다음의 기하학적 제한조건에 의해 결정할 수 있다<sup>(6)</sup>.

$$s \approx w_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7)$$

따라서 중력의 영향을 무시한 외팔 파이프의 운동에너지와 포텐셜 에너지를 구하면 각각 다음과 같다.

$$T_{pipe} = \frac{1}{2} m \int_0^L (v_P \cdot v_P) dx \quad (8)$$

$$V_{pipe} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA_p \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (9)$$

여기서  $EI$ 는 외팔 파이프의 굽힘 강성계수,  $A_p$ 는 파이프의 단면적, 그리고  $m$ 은 외팔 파이프의 단

위길이당 질량을 나타낸다.

### 2.2 이송유체의 일과 에너지식

파이프에 대한 유체의 상대속도가  $U$ 이므로, 유체의 절대속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 따라서 유체의 절대속도 수직성분, 즉 파이프의 횡방향 성분과 축방향에 평행한 수평성분은 각각 다음과 같다(부록).

$$U_x = \dot{w}_1 - w_2\omega + U\left\{1 - \frac{1}{2}(w_2')^2\right\}, \quad (10)$$

$$U_y = (r\omega + \dot{w}_2 + \omega x + \omega w_1) + U w_2'$$

여기서 ( $'$ )은 축방향 좌표  $x$ 에 대한 미분을 의미한다. 유속의 합을 구하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$v_f = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} \quad (11)$$

따라서 이송유체의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_{fluid} = \frac{1}{2} M \int_0^L (v_f v_f) dx \quad (12)$$

여기서  $M$ 은 유체의 단위 길이당 질량이다.

접성이 매우 작은 이송유체의 분사력은 파이프의 끝단에 작용하는 집중 접선 종동력이 된다. 이 접선 종동력에 의한 일은 보존력 성분과 비보존력 성분에 의한 일로 구분되며 각각 다음과 같다.

$$W_c = \frac{1}{2} MU^2 \int_0^L \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 dx \quad (13)$$

$$\delta W_{nc} = -MU \left( U \frac{\partial w_2}{\partial x} + \dot{w}_2 \right) \delta w_2 \Big|_{x=L} \quad (14)$$

### 2.3 운동방정식 및 고유치 해석

계의 운동방정식은 앞에서 구한 계의 일과 에너지 식(8)~(14)를 확장된 해밀턴 원리(extended Hamilton's principle)를 이용하여 구한 다음의 라그랑즈 방정식에 대입하여 유도할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \left( \frac{\partial W_c}{\partial q_i} \right) = Q_{nc} \quad (15)$$

여기서  $L$ 은 Lagrangian으로  $L = (T_{\pi pe} + T_{fluid} - V_{\pi pe})$ 이고,  $Q_{nc}$ 는 식(14)의 비보존력에 의한 힘이다.

운동방정식을 무차원화 하기 위하여 다음과 같은 무차원 매개변수를 정의하였다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad d = \frac{q}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}},$$

$$\beta = \frac{M}{m+M}, \quad u = UL \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad R = \frac{r}{L}, \quad (16)$$

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{m+M}{EI}}, \quad \Omega_f = \omega L^2 \sqrt{\frac{M}{EI}}.$$

식(16)의 무차원 매개변수를 이용하여 다음과 같이 행렬형태의 무차원 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = Q \quad (17)$$

여기서  $d = [d_{1i}(\tau) \ d_{2i}(\tau)]^T$ 이며, 이것을 다시  $d(\tau) = De^{\lambda\tau}$ 로 표현할 수 있다. 여기서 고유치  $\lambda$ 는 복소수 형태로써  $\lambda = a \pm ib (i = \sqrt{-1})$ 의 형태이다.

회전 외팔 파이프의 동적안정성은 고유치  $\lambda$ 의 실수부인  $a$ 의 부호에 의해 결정된다. 만약  $a < 0$ 이면 파이프는 안정하게 되며,  $a > 0$ 이면 불안정이 되는데 이때 허수부  $b=0$ 의 경우 발산형 불안정,  $b \neq 0$ 인 경우 플러터형 불안정이 된다. 또,  $a=0$ 일 때는 안정과 불안정의 경계가 되는 임계값이며 이때의 유속을 임계유속  $u_{cr}$ 이라 한다.

### 3. 수치해석 결과 및 고찰

계의 운동방정식을 이용하여 유체유동을 갖는 회전 외팔 파이프의 동적특성을 8차 모드까지 고려하여 수치해석 하였다. 먼저, 파이프의 회전 각속도는 회전운동을 일반화하기 위하여 다음과 같은 함수 (spin-up motion)를 사용하였다.

$$\omega = \begin{cases} \Omega_s \left[ \frac{t}{T_s} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) \right] & 0 \leq t \leq T_s \\ \Omega_s & t \geq T_s \end{cases} \quad (18)$$

여기서  $T_s$ 는 회전운동이 정상상태에 도달하는데 걸리는 시간이며  $\Omega_s$ 는 정상상태에서의 각속도, 그리고  $t$ 는 시간을 의미한다.

Fig. 2는 이 연구에서 사용한 해석방법으로 해석한 연구결과와 참고문헌(11)의 연구결과를 서로 비교한 것이다. 해석에 사용한 회전 외팔보의 파라미터는 참고문헌(11)의 값을 따랐다. 정상상태에서 약간의 변위차이를 보이고 있으나 대체적으로 결과들이 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 3은 동일한 무차원 파라미터를 적용하였을 때 이 연구에서 사용한 방법과 다른 연구(참고문헌(12))에서 사용한 방법(Hamilton's principle)으로 구한 회전 파이프의 횡방향 1, 2차 고유진동수를 서로 비교한 것이다. 여기서 사용한 무차원 회전

각속도는 유체가 없는 경우의 회전 각속도로써  $\Omega_m = \omega L^2 \sqrt{m/EI}$ 이다. 이 연구에서 구한 고유진동수와 참고문헌의 고유진동수 변화가 잘 부합됨을 확인

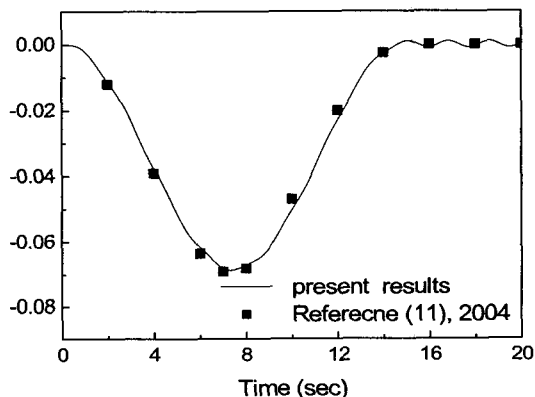


Fig. 2 Comparison between present numerical results and data of Ref. (11),  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ ,  $T_s = 15 \text{ s}$

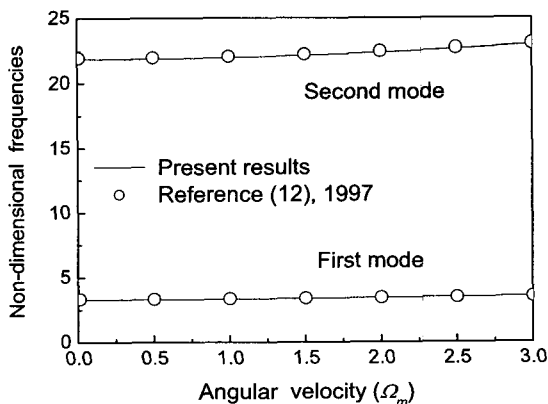


Fig. 3 Comparison between present numerical results and data in Ref. (12)

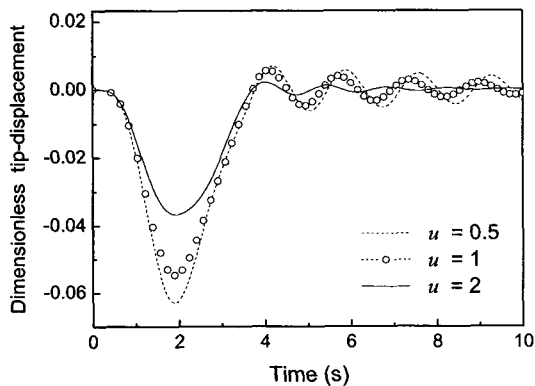
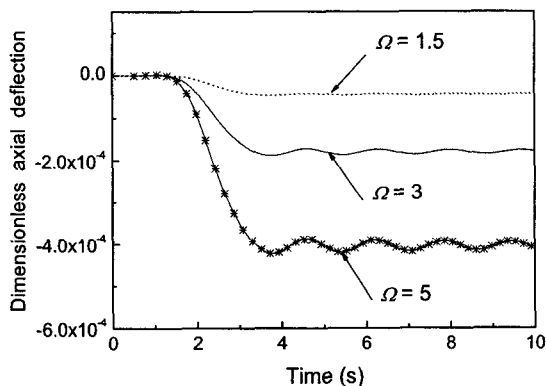
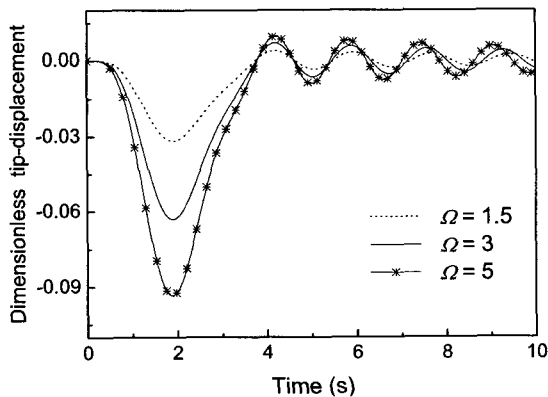


Fig. 4 Tip-response of the rotating cantilever pipe according to fluid velocity ( $\Omega = 3$ )



(a) Axial tip-deflection



(b) Bending tip-displacement

Fig. 5 Tip-response of the rotating cantilever pipe according to angular velocity ( $u = 0.5$ )

할 수 있다. Fig. 2와 Fig. 3의 결과고찰로 이 연구에서 사용한 수치해석 방법이 타당함을 확인할 수 있다.

Fig. 4와 Fig. 5는 유속과 회전 각속도에 의한 회전 외팔 파이프의 변위를 보여주고 있다. 전반적으로 회전 각속도가 일정한 경우 유속과 파이프의 형

변위는 서로 반비례적인 경향을 보이고 있으며, 유속이 일정한 경우 파이프의 축방향 및 횡방향 변위는 서로 비례적인 경향을 보인다. 회전 각속도에 따른 외팔 파이프의 횡변위를 살펴보면, 회전 각속도가 정상상태에 도달하기 전에 발생하는 회전 외팔 파이프의 최대 처짐은 무차원 회전 각속도가 1.5일 때에 비하여 각속도가 5일 때 약 34.1% 정도 증가함을 알 수 있다.

Fig. 6과 Fig. 7은 질량비  $\beta$ 가 0.1과 0.3일 때 유속의 변화에 따른 외팔 파이프의 고유진동수와 임계 유속을 나타낸 것이다. 질량비와 관계없이 임계 유속은 2차 모드에서 나타나며 회전 각속도가 빨라질수록 임계유속 값이 증가한다. Fig. 7(b)에서 회전 각속도가 1인 경우에 비하여 3인 경우 임계유속은 약 2.7% 정도 증가함을 알 수 있다.

Fig. 8과 Fig. 9는 무차원 회전 각속도가 각각 1과 3인 경우 질량비에 따른 파이프의 고유진동수 및

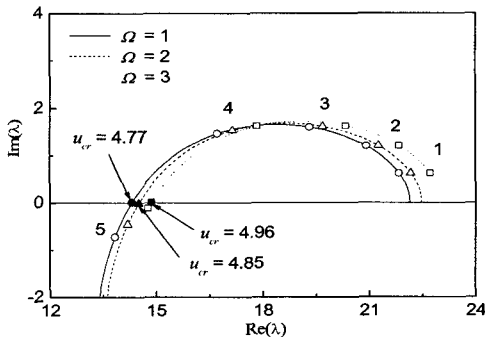
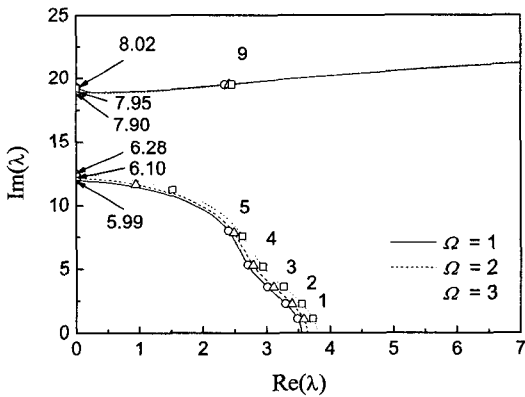
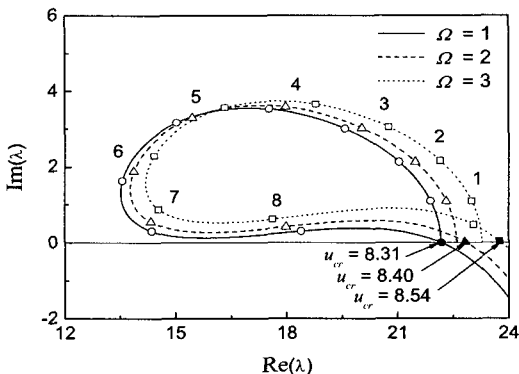


Fig. 6 Complex frequency of the rotating cantilever system as fluid velocity( $\beta=0.1$ , 2nd mode)

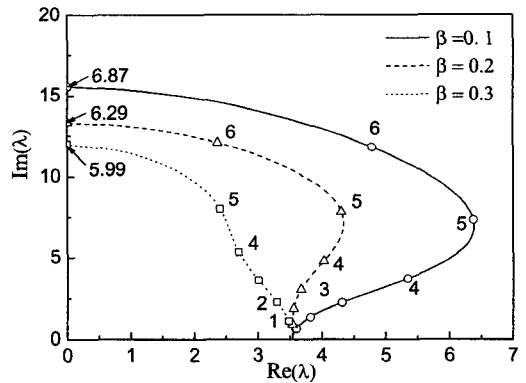


(a) First mode

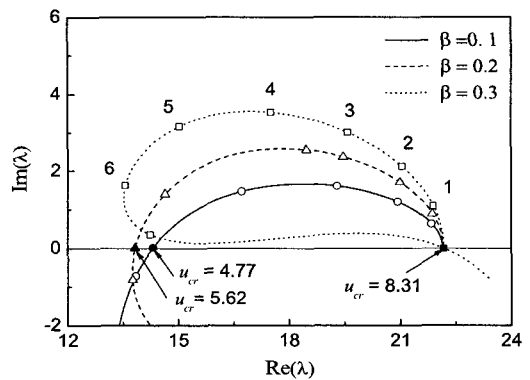


(b) Second mode

Fig. 7 Complex frequency of the rotating cantilever system as a fluid velocity for  $\beta=0.3$



(a) First mode



(b) Second mode

Fig. 8 Complex frequency of the rotating cantilever system as a fluid velocity for  $\Omega=1$

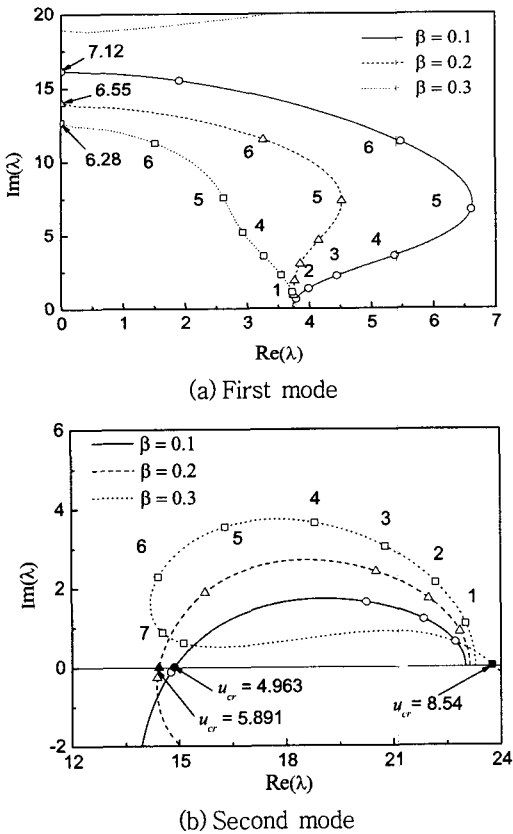


Fig. 9 Complex frequency of the rotating cantilever system as a fluid velocity for  $\Omega=3$

임계유속의 변화를 표현한 것이다. 질량비와 임계유속은 서로 비례적인 경향을 가짐을 알 수 있다. 이것은 회전하지 않은 외팔파이프의 경향과 동일한 결과이다<sup>(13)</sup>. 무차원 회전 각속도가 3인 Fig. 9(b)에서 질량비가 0.1일 때와 0.3일 때의 임계유속을 서로 비교해 보면 질량비가 0.3인 경우 0.1일 때에 비하여 임계유속 값은 약 41.9%의 큰 증가를 보인다.

#### 4. 결 론

이 연구에서는 유체유동을 가진 회전 외팔 파이프의 동특성 및 안정성 즉, 계의 플러터 불안정을 일으키는 임계유속에 미치는 질량비와 회전 각속도의 영향을 수치해석 하였다. 수치해석 예제에 사용한 파라미터에 대하여 2차 진동모드에서 불안정을 유발하는 임계유속 값이 나타났으며, 전반적으로 동일한 질량비를 가진 경우, 회전 각속도가 증가할수록 임

계유속 값이 증가하였다. 또 회전 각속도가 일정한 경우 질량비와 임계유속 값은 서로 비례적인 경향을 가짐을 알 수 있다. 파이프의 불안정을 유발하는 임계유속에 미치는 영향은 회전 각속도의 영향보다 질량비의 영향이 더 크다는 것을 알 수 있다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Ryu, B. J., Jung, S. H. and Kang, Y. C., 1998, "A Study on the Dynamic Stability and Vibration Control of Cantilevered Pipes Conveying Fluid", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 1, pp. 171~179.
- (2) Langthjem, M. A. and Olhoff, N., 2003, "Modal Expansion of the Perturbation Velocity Potential for a Cantilevered Fluid-conveying Cylindrical Shell", Journal of Fluids and Structures, Vol. 17, pp. 147~161.
- (3) Paidoussis, M. P., Sarkar, A. and Semler, C., 2005, "A Horizontal Fluid-conveying Cantilever: Spatial Coherent Structures, Beam Modes and Jumps in Stability Diagram", Journal of Sound and Vibration, Vol. 280, pp. 141~157.
- (4) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 261, pp. 457~486.
- (5) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(II. Experiments)", Proceedings of the Royal Society (London), Series A, Vol. 261, pp. 487~499.
- (6) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.
- (7) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base", Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 10, pp. 139~151.
- (8) Hamdan, M. N. and Al-Bedoor, B. O., 2001, "Non-Linear Free Vibrations of a Rotating Flexible Arm", Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 5, pp. 839~853.

(9) Fung, E. H. K. and Yau, D. T. W., 1999, "Vibration Frequencies of a Rotating Flexible Arm Carrying a Moving Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 241, No. 5, pp. 857~878.

(10) Panussis, D. A. and Dimarogonas, A. D., 2000, "Linear In-Plane And Out-of-Plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-tube Cantilever", Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 1~24.

(11) Cai, G. P., Hong, J. Z. and Yang, S. X., 2004, "Model Study and Active Control of a Rotating Flexible Cantilever Beam", International Journal of Mechanical Science, Vol. 46, pp. 871~889.

(12) Fung, E. H. K. and Shi, Z. X., 1997, "Vibration Frequencies of a Constrained Flexible Arm Carrying an End Mass", Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, No. 2, pp. 259~269.

(13) Païdoussis, M. P., 1998, Fluid-Structure Interactions (Volume 1), Academic Press.

부 록

파이프에 대한 유체의 상대속도를  $U$ 라고 하면 파이프의 운동이 포함된 유체의 속도는 다음과 같이

구할 수 있다<sup>(10)</sup>.

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_p + U\mathbf{e}_t \tag{19}$$

여기서  $\mathbf{v}_p$ 는 식 (5)에서 구한 파이프의 속도이고  $\mathbf{e}_t$ 는 Fig. 10의 곡선좌표계에서의 단위접선(unit tangent)으로 파이프의 미소부분에 대하여  $\mathbf{e}_t = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$ 이다. 따라서 식 (19)우변의 두 번째 항은 다음과 같다.

$$U\mathbf{e}_t = U \left[ \cos\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\mathbf{j} \right] \tag{20}$$

$$\approx U \left[ \left(1 - \frac{1}{2}(w_2')^2\right)\mathbf{i} + w_2'\mathbf{j} \right]$$

여기서  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 는 각각 축방향과 횡방향의 단위벡터이다. 따라서 유체의 속도  $\mathbf{v}_f$ 의 축방향 및 횡방향 성분을 각각 표현하면 식 (10)과 같다.

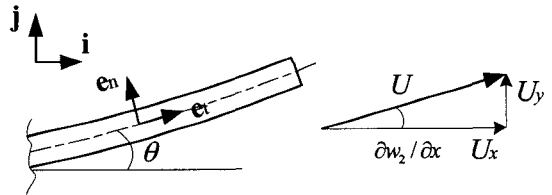


Fig. 10 Velocity vector of fluid diagram