

분산형 볼륨 데이터의 VNURBS 기반 다중 잔차 근사법

박 상 근*

Multiresidual Approximation of Scattered Volumetric Data with Volumetric Non-Uniform Rational B-Splines

Park, S. K.*

ABSTRACT

This paper describes a multiresidual approximation method for scattered volumetric data modeling. The approximation method employs a volumetric NURBS or VNURBS as a data interpolating function and proposes two multiresidual methods as a data modeling algorithm. One is called as the residual series method that constructs a sequence of VNURBS functions and their algebraic summation produces the desired approximation. The other is the residual merging method that merges all the VNURBS functions mentioned above into one equivalent function. The first one is designed to construct wavelet-type multiresolution models and also to achieve more accurate approximation. And the second is focused on its improvement of computational performance with the same fitting accuracy for more practical applications. The performance results of numerical examples demonstrate the usefulness of VNURBS approximation and the effectiveness of multiresidual methods. In addition, several graphical examples suggest that the VNURBS approximation is applicable to various applications such as surface modeling and fitting problems.

Key words : Scattered data approximation, Volumetric NURBS, Multiresidual method

1. 서 론

분산형 볼륨 데이터를 수학적 표현식 혹은 절차적 알고리즘 등으로 표현하려는 시도는 여러 관련 분야에서 오래 전부터 진행되어 왔다. 여기서 분산형 데이터란 구조화된 규칙적 배열을 가진 격자형 형식이 아닌, 불규칙적으로 순서 없이 산만하게 분포된 형식의 데이터를 의미한다. 그리고 볼륨 데이터란 데이터가 존재하는 특정 위치(독립변수)에서의 속성값(종속변수)이 벡터 혹은 텐서 형태로 정의된 비균질 데이터를 의미한다. 대부분의 경우 분산형 볼륨 데이터에서 데이터의 위치는 3차원 유클리드 공간 상에서 정의되며, 데이터 위치에서의 속성값은 1차원 벡터인 스칼라 형태로 표현된다. 즉, 유클리드 공간 \mathbb{E}^3 상에서 임의의 데이터 위치 (x_i, y_i, z_i) 에서의 데이터 속성값을 f_i 라 할 때, 분산형 데이터 집합 \mathbf{F} 는 다음과 같이 나타

낸다.

$$\mathbf{F} = \{(x_i, y_i, z_i, f_i) | (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{E}^3, f_i \in \mathbb{R}\} \\ (i = 1, \dots, M)$$

여기서 데이터 위치에 해당하는 (x_i, y_i, z_i) 는 독립변수이고, 속성값에 해당하는 f_i 는 종속변수이다.

이러한 볼륨 데이터의 주요 획득 원천을 살펴보면, 크게 측정 혹은 실험에 의해 획득되거나, 컴퓨터 계산에 의해 추출된다. 의료 분야 경우, MRI 및 CAT 스캐닝 장비에 의해 물체 내부 상태에 관한 정보를 사진 측정을 통하여 획득하며, 컴퓨터 그래픽스 및 역설계 공학에서 사용되는 3차원 스캐너 장비는 물체 외곽의 형상 정보를 점 데이터 형식으로 추출한다. 또한 전산 유체 분야의 경우, 다양한 수치적 계산 기법들(예, FEM, FDM 등)에 의해 유한 개의 노드점 위치에서 유체 밀도, 속도, 압력 등의 계산 결과가 수치적으로 제공된다. 이밖에 각종 측정 장치, 실험 도구 및 계산 알고리즘 등에 의하여, 관심 영역 내부에서의 임의의

*중신회원, 충주대학교 기계공학과
- 논문투고일: 2006. 03. 10
- 심사완료일: 2007. 01. 12

위치에 따른 속성값의 분포가 산만하게 추출되거나 계산되어 사용자에게 제공된다.

이렇게 획득한 분산형 데이터는 응용 분야에 가공 없이 직접적으로 활용될 수 있으나, 보다 의미 있는 데이터 분석 및 가시화, 그리고 나아가 특정 작업의 목적 달성을 위하여, 데이터 처리가 가능한 형태로의 변환이 필요한데, 이러한 형태 변환 과정의 중추적 역할을 수행하는 분야가 바로 분산형 데이터 모델링(scattered data modeling)^[1,2]이다. 산업적 측면에서 이러한 분산형 데이터 모델링을 통하여 처리된 가공 데이터는 원래의 원시 데이터에 비하여 그 사용 목적에 부합되기 때문에 상당한 활용 가치를 가지게 된다. 예를 들어, 지질학 분야에서 측정된 지질 정보로부터 등고선 지도를 생성할 수 있으며, 유체 분야의 경우 계산된 유속 데이터로부터 와류 등과 같은 특징적 유동 구조를 탐색하고 분석할 수 있게 해준다. 결국 이러한 특정 작업이 수행되기 위해서는 먼저 원시 데이터로부터 산업적 가치를 높여줄 수 있는 분산형 데이터 표현 모델 및 기법에 관한 연구가 필요한 것이다.

현재까지 알려진 분산형 데이터 표현 모델 가운데 출발점이라 언급할 수 있는 것으로 Shepard^[3] 방식이 있다. 이 방식은 각 데이터의 종속변수 값인 f_j 와 거리에 반비례하는 개념의 가중치 값을 곱하고, 이들을 모두 합산하여, 임의의 위치에서의 종속변수 값 f_i 를 계산하는 방식이다. 이 방식은 데이터의 국부적 수정시, 이를 반영시키기 위해 모든 데이터에서의 가중치를 재계산해야 하는 문제점을 가지고 있다. Franke와 Nielson은 이러한 Shepard 방식의 문제점을 해결하기 위해 MQS(modified quadratic Shepard)^[4]을 제시하였는데, 가중치 계산을 국부화시켰고, 데이터의 f_j 값을 2차 다항식 기반의 가중치 최소자승법(weighted least-squares method)에 의해 계산한 후 이를 사용하였다.

한편, 현재까지 분산 데이터 모델링 방식으로서 가장 활발히 연구되고 있는 표현 모델로서 RBF(radial basis function)^[5]가 있다. 일종의 볼륨 스플라인(volume spline)으로서 주어진 데이터 점으로부터 선형대수 방정식을 유도하고 이로부터 미지의 계수를 결정함으로써 표현 모델을 생성하는 방식이다. 대용량 데이터의 경우 유도된 선형대수 방정식의 행렬이 정칙(nonsingular) 행렬이지만 불량조건(ill-conditioned)이기에 실제 계산의 경우, 매우 느리며 불안한 결과를 보여준다. 이러한 문제점을 극복하기 위해 제안된 것이 CS-RBF(compactly supported radial basis function)^[6]이다. 이것은 기존 RBF에서 기저함수의 영향

범위를 유한하게 조정함으로써 국부적 성질을 유도하였고, 더불어 안정된 수치적 계산을 유도하였다. 이밖에 Hardy가 RBF와 유사한 multiquadratics^[7]을 제안하였고, Duchon은 RBF를 기반으로 곡률에너지 최소화 개념의 thin plate splines^[8]을 제안하였다.

또 하나의 분산 데이터 모델링을 위한 표현 모델로서 먼저 주어진 데이터로부터 simplex 집합으로 정의되는 k 차원의 삼각형(k -dimensional triangulations)^[9] 집합을 구성하고, 각 구성요소들로부터 데이터를 보간하는 보간자(interpolant)를 생성하는 방식이 있다. 여기서 대표적인 보간자 생성 기법으로 다항식(polynomial) 방식의 Clough-Tocher^[10], 유리(rational) 방식의 multivariate perpendicular interpolation^[11] 기법, 초한(transfinite) 방식의 transfinite interpolation^[12] 기법이 있고, 이밖에 multivariate splines^[13]이 있다. 이 표현 방식은 주로 FEM 분야에서 활용하는데, 기존 RBF 방식과 비교하여 살펴보면, RBF가 비메쉬(meshless) 형태의 점(Point) 중심 방식이라면, 이 방식은 삼각형(2차원 경우) 혹은 사면체(3차원 경우) 중심의 유한요소(finite element) 방식이라 말할 수 있다.

그리고, 위에서 언급한 분산형 데이터 모델링을 다단계 방식의 계층적 표현 구조에 의해 보다 효과적으로 분산형 데이터를 처리하려는 시도가 활발히 연구되고 있다. 가장 대표적인 표현 구조로서 다단계 방식으로 알려진 multilevel approximation^[14-17] 기법이 있으며, 계층적 구조로서 hierarchical refinement^[18,19] 기법이 있다. 일반적으로 데이터 표현 모델의 완만성(smoothness) 및 정확성(accuracy)은 상호 배타적 관계에 있다. 즉, 주어진 데이터에 충실하기 위해서는 표현 모델의 완만성은 감소하며, 표현 모델이 존재하는 관심 영역(공간)의 완만성을 만족시켜 주기 위해서는 데이터의 근사 정확성은 감소하기 된다. 대부분의 경우, 데이터가 존재하는 관심 영역의 대상 변수는 그 영역 내에서 완전한 분포를 가지고 있으나, 이로부터 측정 혹은 계산된 분산 데이터는 데이터 획득 장치의 한계 혹은 계산 알고리즘의 수치 계산적 한계 등의 이유로 불필요한 오차를 내재하고 있기 때문에, 위에서 언급한 상호 배타적 문제가 발생하게 된다. 결국 이를 극복하기 위한 부가적 알고리즘 혹은 절차들이 필요하며 이러한 관점에서 다단계 방식과 계층적 방식이 등장하게 된 것이다.

한편, 표현 모델 및 처리 기법의 타당성, 유용성 등을 정량적으로 서술하기 위해 분산형 데이터 모델링 분야에서 공통적으로 고려되고 있는 사항들을 살펴보면 다음과 같다. 참고로 아래의 논점들 가운데 가장

필수적인 고려 사항은 정밀도 문제이며, 가장 어려움을 겪고 있는 문제는 계산 시간 문제이다. 그리고 데이터 처리 능력을 판단하는 주요 인자로서 메모리 사용량 문제를 언급하고 있다.

- 정밀도 문제: 원시 데이터를 얼마나 정확하게 근사하여 복원할 수 있는지에 관한 문제로서, 대부분 원시 데이터에서의 근사 정밀도를 측정하거나, 데이터가 정의하는 볼륨 공간 자체의 근사 정밀도를 계산하는 방식으로 정밀도를 기술한다.
- 계산 시간 문제: 원시 데이터로부터 특정 표현 모델을 생성하는데 소요되는 시간 및 임의의 위치에서 종속변수의 속성값을 추출하는데 소요되는 시간 등의 수행 속도 문제로서, 빠른 계산 결과를 필요로 실시간 작업의 경우에 매우 중요하다.
- 메모리 사용량 문제: 표현 모델이 차지하고 있는 메모리 사용량에 관한 문제로서, 대용량 원시 데이터의 효율적인 표현, 그리고 추후 저장 및 관리해야 하는 측면에서 상당히 중요하다.
- 변경 처리 문제: 기존 표현 모델에 새로운 데이터가 추가되거나 기존 데이터가 변경되었을 때 이를 효과적으로 처리할 수 있는지에 관한 문제로서, 표현 모델의 국부적 성질과 관련이 많다. 즉 국부적 수정이 가능하다면 표현 모델의 재생성 문제를 쉽게 극복할 수 있다.
- 연속성 문제: 표현 모델에 의해 정의되는 데이터 공간 상에서 속성값의 연속성(continuity)에 관한 문제로서, 최소한 표현 모델은 C^0 연속성을 제공해야 한다.

본 연구에서는 주어진 분산형 볼륨 데이터를 간결하고 효율적으로 표현하기 위한 VNURBS^[20,21]기반의 데이터 근사법을 소개하고자 한다. 그리고 위에서 언급한 정밀도, 계산 시간, 메모리 사용량 등의 측면에서 본 연구에서 제시하는 VNURBS 근사법의 성능을 기술하고자 한다. 먼저 기존의 VNURBS에 관해 간단히 소개하고, 이를 기반으로 본 연구에서 구현된 과결정(over-determined) 및 미결정(under-determined) 근사법에 관하여 소개한다. 그리고 근사 정밀도의 향상 및 데이터의 계층적 표현을 위한 VNURBS 기반의 다중 잔차 근사법에 관하여 상세히 서술하겠다. 그리고 적용 예제를 통하여 분석된 본 연구 근사법의 성능 결과를 보이겠다. 마지막으로 본 연구 방식이 기하학적 형상 모델링에 활용될 수 있음을 보이겠다. 즉, Turk^[22]가 제시한 음함수 곡면 모델링 기법을 사용한 모델링 적용 예제를 통하여 타 분야로의 응용 가능성

을 보이겠다.

2. VNURBS Approximation

2.1 VNURBS 볼륨 표현 모델

VNURBS는 기존 NURBS곡선 및 곡면의 일반화된 확장 형태로서, 기존 NURBS의 매개변수(parameter) 공간을 임의의 n 차원으로 확장하고, 조정점(control point)의 차원을 임의의 k 개로 확장한 매개변수형 볼륨 표현 모델이다. 즉, VNURBS 볼륨 표현식은 다음과 같다.

$$A(u_1, \dots, u_n) = \frac{\begin{pmatrix} A^1(u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ A^k(u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} \begin{pmatrix} hA^1 \\ \vdots \\ hA^k \end{pmatrix}_{i_1, \dots, i_n}}{\sum_{i_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} h_{i_1, \dots, i_n} N_{i_1}^{k_1}(u_1) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n)} \quad (1)$$

여기서 $u_i (i = 1, \dots, n)$ 는 n 차원의 볼륨 공간을 정의하는 i 번째 파라미터이며, $A^j(u_1, \dots, u_n) (j = 1, \dots, k)$ 는 그 볼륨 공간 속에 존재하는 k 개의 속성 함수들 중 j 번째 속성 함수를 나타낸다. 그리고 n_i 와 k_i 는 u_i 방향으로의 조정점의 개수 및 차수(order)이고, $(A^j)_{i_1, \dots, i_n}$ 는 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_n$ 개의 조정점 망에서 u_1 방향으로 i_1 번째, u_2 방향으로 i_2 번째, ..., u_n 방향으로 i_n 번째 위치한 조정점의 j 번째 속성을 나타낸다. 또한 h_{i_1, \dots, i_n} 는 동차 좌표(homogeneous coordinate)를 나타내며, $N_{i_j}^{k_j}(u_j)$ 는 차수가 k_j 인 정규화된 비스플라인 기저 함수(normalized B-spline basis function)를 의미한다. 여기서 비스플라인 기저 함수들은 아래의 절점 벡터(knot vector) 상에서 정의된다. 즉,

$$u_1 \text{ 방향 절점 벡터, } \mathbf{U}_1 = \{u_{i_1}\}_{i_1=0}^{i_1=n_1+k_1-1} \quad (2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_n \text{ 방향 절점 벡터, } \mathbf{U}_n = \{u_{i_n}\}_{i_n=0}^{i_n=n_n+k_n-1} \quad (3)$$

그리고, 위에서 소개한 VNURBS는 Park^[21]이 지적한 바와 같이, 다음과 같은 특성을 가지고 있다. 이러한 특성은 데이터 의존성으로 인해 야기되는 근사법 적용 범위의 한계 등을 극복할 수 있게 해준다.

- 다차원성: 다차원의 볼륨 공간과 그 내부에 존재하는 다차원의 속성 분포를 표현한다. 즉, $n(n > 0)$ 차원의 정의역 차원(domain dimensionality)과 $k(k > 0)$ 차원의 치역 차원(range dimensionality)을 가지고 있다.
- 불균질성: k 차원의 조정점에 임의의 속성 변수, 예를 들어 기하학적 변수, 물리적 변수, 그래픽 처리용 변수 등을 설정할 수 있다. 즉 볼륨 공간에서 다루는 장 변수(field variable)의 특성에 무관하다.
- 수학적 표현의 독립성: 정의하려는 속성의 수학적 성질에 무관하다. 즉, 스칼라, 벡터, 텐서 등의 형태에 의존하지 않으며, 불리안, 정수, 실수 등을 모두 포함한다.
- NURBS 성질의 계승: 기존의 NURBS에서 제공되는 기본 성질들^[23], 예를 들어, convex hull property, affine invariance, variation diminishing property, local modification 등을 가지고 있으며, 이밖에 관련된 다수의 알고리즘들, 예를 들어, degree reduction, degree elevation, knot insertion 등을 그대로 활용할 수 있다.

2.2 분산형 볼륨 데이터의 VNURBS 근사법

순서없이 산만하게 분산된 M 개의 분산형 볼륨 데이터 $\{F_i\}$ 가 주어졌을 때, 이를 VNURBS $A(u)$ 에 의해 근사적으로 표현하는 VNURBS 근사법 알고리즘을 소개하면 다음과 같다. 간결한 근사법 알고리즘의 유도를 위하여 동차 좌표값이 1.0인 경우의 VNURBS 표현식을 사용한다. 즉,

$$A(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} A_{i_1 \dots i_n} N_{i_1}^{k_1}(u_1) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n) = \sum_{\mathbf{I}=0}^{N-1} A_{\mathbf{I}} N_{\mathbf{I}}(u_1, \dots, u_n) \quad (4)$$

여기서 N 은 조정점의 개수로서 $N = n_1 \times \dots \times n_n$ 이며, \mathbf{I} 는 조정점의 인덱스(index)로서 1차원 배열 형식을 가진다. 즉,

$$\mathbf{I} = i_1 + (n_1) \cdot i_2 + (n_1 n_2) \cdot i_3 + \dots + (n_1 \dots n_{n-1}) \cdot i_n \quad (5)$$

그리고 $N_{\mathbf{I}}(u_1, \dots, u_n)$ 는 아래와 같이 각 방향의 비스플라인 기저 함수들의 곱이다. 즉,

$$N_{\mathbf{I}}(u_1, \dots, u_n) = N_{i_1}^{k_1}(u_1) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n) \quad (6)$$

이러한 VNURBS 표현식을 가지고 분산형 데이터를 근사적으로 표현하기 위하여, 다음과 같은 행렬식 형태의 선형대수 방정식을 유도할 수 있다. 즉, 주어진 M 개의 분산형 데이터 $F_i(i=0, \dots, M-1)$ 와 이에 해당하는 매개변수 좌표값 (u_1^i, \dots, u_n^i) 을 각각 VNURBS에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ F_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & N_{\mathbf{I}}^0 & \dots \\ \dots & N_{\mathbf{I}}^1 & \dots \\ \dots & N_{\mathbf{I}}^2 & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & N_{\mathbf{I}}^{M-1} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ A_{\mathbf{I}} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (7)$$

or $\{F_i\} = [N_{\mathbf{I}}^i] \{A_{\mathbf{I}}\} \quad (i=0, \dots, M-1)$
 $(\mathbf{I}=0, \dots, N-1)$

여기서 $\{F_i\}$ 는 M 개의 데이터 벡터이며, $\{A_{\mathbf{I}}\}$ 는 N 개의 조정점 벡터이다. 그리고 $N_{\mathbf{I}}^i = N_{\mathbf{I}}(u_1^i, u_2^i, \dots, u_n^i) = N_{i_1}^{k_1}(u_1^i) \dots N_{i_n}^{k_n}(u_n^i)$ 며, $[N_{\mathbf{I}}^i]$ 는 $M \times N$ 행렬이다.

결국, 위의 식 (7)은 VNURBS의 미지수 $\{A_{\mathbf{I}}\}$ 을 결정하기 위한 행렬식으로서, 미지수 $A_{\mathbf{I}}$ 의 개수 N 보다 주어진 점 데이터 F_i 의 개수 M 이 큰 경우, 그리고 반대로 M 보다 N 이 큰 경우로 분류하여 계산한다. 전자를 과결정 구속(over-determined constraint) 문제라 하고, 후자를 미결정 구속(under-determined constraint) 문제라 한다. 그리고 이와 더불어 VNURBS의 차수 및 절점 벡터가 함께 정의되어야 한다. 본 연구에서 사용한 차수는 대부분 4차이며, 균일한(uniform) 절점 벡터를 사용하였다. 보다 효과적인 근사를 위해서는 이와 관련한 추후 연구가 필요하다.

2.2.1 과결정(over-determined) 구속 문제

위의 식 (7)에서 $M > N$ 일 때, 미지수 $\{A_{\mathbf{I}}\}$ 을 결정하기 위해 Least-squares 기법을 적용하면, 아래의 식 (8)을 얻을 수 있다. 즉,

$$[N_{\mathbf{I}}^i]^t \{F_i\} = [N_{\mathbf{I}}^i]^t [N_{\mathbf{I}}^i] \{A_{\mathbf{I}}\} \quad (8)$$

그리고 이를 전개하여 정리하면 아래의 식 (9)를 얻을 수 있다.

$$\left\{ \sum_{i=0}^{M-1} N_{\mathbf{I}}^i F_i \right\} = \left[a_{\mathbf{I}\mathbf{J}} = \sum_{i=0}^{M-1} N_{\mathbf{I}}^i N_{\mathbf{J}}^i \right] \{A_{\mathbf{J}}\} \quad (9)$$

$(\mathbf{I}=0, \dots, N-1, \mathbf{J}=0, \dots, N-1)$

여기서 행렬 $[a_{ij}]$ 는 대칭 행렬로서 양의 정부호 형식(positive definite form)이므로 유일해(unique solution)를 구할 수 있으며, 이로부터 미지수 $\{A_i\}$ 을 계산할 수 있다.

2.2.2 미결정(under-determined) 구속 문제

위의 식 (7)에서 $M < N$ 일 때, 미지수 $\{A_i\}$ 을 결정하기 위해 Pseudo-inverse 기법을 적용하면 아래의 식 (10)을 얻을 수 있다. 즉,

$$([N_i^j][N_i^j]')([N_i^j][N_i^j]')^{-1}\{F_j\} = [N_i^j]\{A_i\} \quad (10)$$

여기서 $([N_i^j][N_i^j]')^{-1}\{F_j\} = \{G_j\}$ 이라 놓고, 먼저 $\{G_j\}$ 을 구한다. $[N_i^j][N_i^j]'$ 는 아래의 식 (11)과 같이 정리할 수 있으며, 대칭 행렬이고 양의 정부호 형식이므로 $\{G_j\}$ 을 구할 수 있다.

$$[N_i^j][N_i^j]' = \left[a_{ij} = \sum_{l=0}^{N-1} N_l^i N_l^j \right] \quad (11)$$

$$(i = 0, \dots, M-1, j = 0, \dots, M-1)$$

그 다음, 식 (11)을 식 (10)에 대입하여 정리하면, 다음의 식 (12)와 (13)를 얻을 수 있으며, 이로부터 미지수 $\{A_i\}$ 는 결정된다.

$$[N_i^j]\{G_j\} = \{A_i\} \quad (12)$$

or

$$\left[\sum_{i=0}^{M-1} N_i^j G_i \right] = \{A_i\}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (13)$$

이상의 알고리즘에 의하여, 측정 혹은 계산에 의해 획득한 분산형 볼륨 데이터, 즉 볼륨 데이터에 의해 정의되는 불연속 볼륨 공간을 VNURBS에 의해 근사적으로 표현함으로써, 연속 공간 상의 임의의 위치에서 볼륨 정보를 근사적으로 추출할 수 있게 된다.

2.3 수치 결과 및 성능 분석

위에서 소개한 VNURBS 근사법의 수행 결과 및 성능 평가를 위하여 다음과 같은 방식으로 분산형 데이터를 생성하였다. 즉, 아래의 test 함수들을 사용하여 부각위로 데이터 위치점 (x_i, y_i, z_i) 을 결정하였고, 이것을 각 test 함수에 대입하여 데이터의 속성값인 $F(x_i, y_i, z_i)$ 을 구하였다. 참고로 2번째 데이터의 매개변수 좌표값은 데이터 위치점의 좌표값 (x_i, y_i, z_i) 을 그대로 사용하였다. 한편 사용된 test 함수들은 Nielson^[2]

이 분산형 데이터 모델링 방법들을 비교 평가하기 위하여 사용하였던 함수들로서 다수의 관련 연구에서 그 수행 성능을 평가하기 위하여 자주 사용하는 함수들이다.

$$F_1(x, y, z) = 0.75 \exp\left[-\frac{(9x-2)^2 + (9y-2)^2 + (9z-2)^2}{4}\right] + 0.75 \exp\left[-\frac{(9x+1)^2}{49} - \frac{(9y+1)^2}{10} - \frac{(9z+1)^2}{10}\right] + 0.5 \exp\left[-\frac{(9x-7)^2 + (9y-3)^2 + (9z-5)^2}{4}\right] - 0.2 \exp[-(9x-4)^2 - (9y-7)^2 - (9z-5)^2]$$

$$F_2(x, y, z) = [\tanh(9z - 9x - 9y) + 1]/9$$

$$F_3(x, y, z) = [(1.25 + \cos(5.4y))\cos(6z)]/[6 + 6(3x-1)^2]$$

$$F_4(x, y, z) = \exp\left[-\frac{81}{16}((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2)\right]/3$$

$$F_5(x, y, z) = \exp\left[-\frac{81}{4}((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2)\right]/3$$

$$F_6(x, y, z) = \sqrt{64 - 81((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2)}y^9 - 0.5$$

한편, 이렇게 생성된 분산형 데이터는 2.2절의 VNURBS 근사법에 의해 모델링 되었고, 2가지 오차 계산 방식에 의해 근사 정밀도를 측정하였다. 하나는 입력된 데이터의 위치점에서의 근사 정밀도이고, 다른 하나는 데이터 볼륨 공간 내에서 일정한 간격으로 생성된 격자 점에서의 근사 정밀도이다. 데이터 점 및 격자 점에서의 근사 정밀도는 아래와 같이 L₂-error인 RMS(root mean square) 오차에 의해 계산하였다. 즉,

■ 데이터 점에서의 RMS오차

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [F(x_i, y_i, z_i) - A(x_i, y_i, z_i)]^2}$$

■ 격자 점에서의 RMS오차

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M_i} \sum_{j=0}^{M_j} \sum_{k=0}^{M_k} [F\left(\frac{i}{M_i}, \frac{j}{M_j}, \frac{k}{M_k}\right) - A\left(\frac{i}{M_i}, \frac{j}{M_j}, \frac{k}{M_k}\right)]^2}{(M_i+1)(M_j+1)(M_k+1)}}$$

여기서 F는 Nielson의 test 함수이며, A는 근사법에 의해 생성된 VNURBS를 나타낸다. 그리고 M은 분산형 데이터의 크기이며, 격자 점은 $M_i = M_j = M_k = 20$ 에 의해 정의하였다.

한편, 본 연구에서는 오차의 상대적 크기를 평가하

기 위하여, 위의 RMS오차를 각 함수의 최대값과 최소값의 차이로 나눈 정규화된(normalized) RMS오차를 사용하였다. Table 1과 Table 2는 각각 데이터 점 및 격자 점에서의 정규 RMS 오차 결과를 보여주고 있다. 여기서 가로축은 Nielson의 test 함수이고, 세로축은 분산형 데이터의 크기 M 을 나타낸다.

Table 1. Normalized RMS error for data point sets versus test functions for VNURBS approximation

case(I)

M	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
250	0.0000	0.0325	0.0481	0.0285	0.0280	0.0609	0.0031
500	0.0000	0.0403	0.0538	0.0354	0.0325	0.0661	0.0042
1000	0.0000	0.0405	0.0582	0.0357	0.0329	0.0692	0.0044
2000	0.0000	0.0398	0.0613	0.0359	0.0336	0.0701	0.0051
4000	0.0000	0.0392	0.0625	0.0352	0.0344	0.0761	0.0053

case(II)

M	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
250	0.0000	0.0142	0.0474	0.0064	0.0008	0.0152	0.0015
500	0.0000	0.0149	0.0585	0.0070	0.0009	0.0160	0.0020
1000	0.0000	0.0158	0.0392	0.0064	0.0010	0.0172	0.0008
2000	0.0000	0.0169	0.0418	0.0067	0.0011	0.0176	0.0009
4000	0.0000	0.0176	0.0434	0.0067	0.0012	0.0192	0.0010

Table 2. Normalized RMS error for grid point sets versus test functions for VNURBS approximation

case(I)

M	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
250	0.0000	0.0943	0.1888	0.1051	0.0766	0.1268	0.0199
500	0.0000	0.0558	0.0892	0.0538	0.0439	0.0837	0.0135
1000	0.0000	0.0441	0.0823	0.0495	0.0419	0.0813	0.0115
2000	0.0000	0.0427	0.0757	0.0443	0.0395	0.0799	0.0086
4000	0.0000	0.0420	0.0736	0.0446	0.0390	0.0797	0.0085

case(II)

M	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
250	0.0000	0.0472	0.1944	0.0495	0.0031	0.0936	0.0182
500	0.0000	0.0361	0.0873	0.0280	0.0017	0.0446	0.0134
1000	0.0000	0.0268	0.0858	0.0122	0.0012	0.0242	0.0050
2000	0.0000	0.0227	0.0573	0.0097	0.0011	0.0235	0.0030
4000	0.0000	0.0214	0.0541	0.0091	0.0011	0.0236	0.0026

Table 1과 2에서 사용된 VNURBS의 조정점 개수, 차수 및 절점 벡터는 다음과 같다.

■ case(I)의 경우: 조정점의 개수는 $n_1 = n_2 = n_3 = 4$ 이며, 차수는 $k_1 = k_2 = k_3 = 4$ 이고, 절점 벡터는 다음과

같이 정의하였다. 즉,

$$U_1 = U_2 = U_3 = \{0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0\}$$

■ case(II)의 경우: 조정점 개수는 $n_1 = n_2 = n_3 = 5$ 이며, 차수는 $k_1 = k_2 = k_3 = 4$ 이고, 절점 벡터는 다음과 같이 정의하였다. 즉,

$$U_1 = U_2 = U_3 = \{0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.5, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0\}$$

Table 1과 2에서 F_0 는 본 연구에서 VNURBS 근사법이 올바르게 구현되어 작동되는지를 판단하기 위해 추가된 test 함수로써 식 (14)와 같고, 측정된 RMS오차가 모두 0.0이므로 나머지 test 함수들에 의해 수행된 수치 결과에 대해 신뢰성을 가질 수 있다.

$$F_0(x, y, z) = x \tag{14}$$

한편, Table 1과 2의 결과를 바탕으로 VNURBS 근사법에서 나타나는 주요 특징 및 분석 결과를 살펴보면 다음과 같다.

- 데이터의 크기: 정규 RMS 오차는 주어진 데이터의 크기가 클수록, 데이터 점의 경우, 대부분 미소하게 증가한다. 이것은 유한 개의 한정된 조정점을 가지고 근사해야 하는 구속조건의 수가 많아져서 생긴 결과라 볼 수 있다. 그리고 격자 점의 경우는 오차가 점점 작아지는데, 이는 많은 데이터 점이 test 함수를 보다 근사적으로 표현하고 있기 때문이다.
- 조정점 개수: 복잡한 구조를 가진 볼륨 공간의 경우, 조정점의 개수가 증가할수록 정규 RMS 오차는 작아진다. 이는 조정점의 개수가 증가할수록 VNURBS의 표현 능력이 증가하여 보다 정밀하게 근사할 수 있기 때문이다. 반면, 단순한 구조의 볼륨 공간을 표현할 때, 이론상으로 많은 조정점은 과도한 메모리 사용이라는 문제만을 지적할 수 있으나, 실제 구현 과정 상에 메모리 문제를 포함하여, 계산 시간 분배 및 구속 만지 못하는 조정점의 불확실성 문제로 인하여, 계산 성능 및 근사 정밀도 등에 영향을 줄 수 있다.
- 차수: 볼륨 데이터가 정의하는 볼륨 공간의 완만성(smoothness)에 의존하여 차수는 결정되어야 한다. 본 연구에서는 볼륨 공간의 완만성에 대한 정보가 없다고 가정하였고, 이때 차수 4를 사용하여 안정된 수치 결과를 얻었다.

- 절점 벡터: 근사 정밀도에 상당한 영향을 줄 수 있는 요소로서 많은 추가 연구가 필요한 영역이다. 즉 근사 정밀도를 개선하기 위해서 적절한 절점의 위치도 중요하며, 절점의 추가 삽입 및 제거를 통한 정밀도 향상에 관한 연구도 필요하다. 본 적용 예제의 경우에 절점 벡터의 영향을 배제하기 위하여 균일한 절점 벡터를 사용하였다.

3. Multiresidual VNURBS Approximation

2장에서 소개한 VNURBS 근사법을 기반으로 근사 정밀도를 안정되게 향상시키기 위하여, 다중 잔차 근사 방식(multiresidual approximation scheme)을 제안한다. 이 방식은 multilevel 근사법의 여러 소거법과 유사하나, 근본적으로 multilevel 방식에서 요구하는 데이터 필터링 작업²⁴⁾이 필요하지 않다. 즉 multilevel 방식은 RBF에 의한 데이터 근사 작업을 수행하기 이전에, data thinning과 같은 데이터 필터링 작업을 통하여 주어진 데이터를 계층적 혹은 level별로 분류해 놓고, 각 level별로 RBF를 생성하고 이들을 대수적 합에 의해 더함으로써 데이터 근사 작업을 완료한다. 이러한 데이터 필터링 작업의 근본 목적은 RBF의 대용량 데이터 처리의 한계점을 극복하는데 있으며, 이를 통하여 보다 안정된 수치적 계산을 유도하기 위함이다. 반면 본 연구 방식은 데이터 필터링과 같은 부가적 작업이 필요치 않기 때문에 데이터의 크기 및 분포에 관한 의존성이 없다고 말할 수 있다.

본 연구에서 제시하는 다중 잔차식 VNURBS 근사법은 그 목적하는 바에 따라, wavelet-type의 성질을 가진 급수(series) 형태의 잔차 급수법(residual series method)과 이를 변형하여 계산 시간 및 메모리 사용량을 향상시킨 잔차 병합법(residual merging method) 두 가지가 있다. 각 방법의 알고리즘 및 성능 평가 결과를 살펴보면 다음과 같다.

3.1 잔차 급수법

잔차 급수법은 기존의 multilevel 방식의 기본 아이디어를 VNURBS에 적용시킨 근사 방법으로서, 데이터 값과 근사값의 차이, 즉 잔차를 2.2절에서 언급한 VNURBS 근사법에 의해 근사하고, 이 근사 과정에서 발생된 새로운 잔차를 다시 VNURBS 근사법으로 근사해 나가는 일련의 과정이 반복 수행되는 방식이다. 그리고 이렇게 생성된 각 VNURBS는 급수(series) 형식의 대수적 합을 통하여 최종의 근사 결과를 얻게 된

다. 구체적인 알고리즘은 Algorithm 1과 같다. 즉,

분산형 볼륨 데이터 $\{F_i\}(i=0, \dots, M-1)$ 가 주어졌을 때, level s 에서의 잔차를 $R^{(s)}$, level s 에서의 VNURBS를 $A^{(s)}(\mathbf{u})$ 라 정의하자. 먼저 초기 잔차를 $R^{(0)} = \{F_i\}$ 라 놓고, 이로부터 2.2절의 VNURBS 근사법을 사용하여 최초 level $s=1$ 인 $A^{(1)}(\mathbf{u})$ 을 구한다. 여기서 $A^{(s-1)}(\mathbf{u})$ 을 생성하기 위해 VNURBS 근사법에서 사용한 차수(order)는 $k_1 = k_2 = k_3 = 4$ 이고, 조정점의 개수는 $n_1 = n_2 = n_3 = 4$ 이다.

그 다음, 생성된 $A^{(s)}(\mathbf{u})$ 에 의해 발생된 새로운 잔차를 $R^{(s)} = R^{(s-1)} - A^{(s)}(\mathbf{u})$ 에 의해 계산(step-①)하고, 다시 잔차 $R^{(s)}$ 로부터 VNURBS 근사법을 수행하여 다음 level인 $s+1$ 에서의 $A^{(s+1)}(\mathbf{u})$ 을 생성(step-②)한다. 여기서 $A^{(s+2)}(\mathbf{u})$ 을 생성하기 위해 사용된 차수는 $k_1 = k_2 = k_3 = 4$ 이고, 조정점의 개수는

Algorithm 1. MultiResidual Approximation : Residual Series Method

input: volumetric scattered data $\{F_i\}(i=0, \dots, M-1)$

output: VNURBS $A^{(1)}(\mathbf{u}), A^{(2)}(\mathbf{u}), \dots, A^{(m)}(\mathbf{u})$

let $R^{(0)} = \{F_i\}$ and $s = 1$

construct $A^{(s)}(\mathbf{u})$ from $R^{(0)}$ by the approximation algorithm described in the section (2.2)

(To build $A^{(s=1)}(\mathbf{u})$, we set orders to be and # of control points to be $k_1 = k_2 = k_3 = 4$ and $n_1 = n_2 = n_3 = 4$, respectively.)

while $s < m$ do

① compute $R^{(s)} = R^{(s-1)} - A^{(s)}(\mathbf{u})$

② construct $A^{(s+1)}(\mathbf{u})$ from $R^{(s)}$ by the approximation algorithm described in the section (2.2)

(To build $A^{(s \geq 2)}(\mathbf{u})$, we set $k_1 = k_2 = k_3 = 4$ and

$$n_1 = n_2 = n_3 = 4 + \sum_{r=0}^{s-2} 2^r .)$$

③ let $s = s + 1$

end

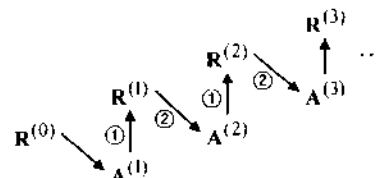


Fig. 1. Iterative refinement process of residual series method.

다음과 같다.

$$n_1 = n_2 = n_3 = 4 + \sum_{r=0}^{s-2} 2^r \quad (15)$$

마지막으로 잔차 크기에 의존한 특정 stop 조건이 만족될 때까지 반복하여 수행한다. 본 연구에서는 알고리즘의 성능 평가를 목적으로 반복 횟수, 즉 최대 level이 m 을 초과하지 않는 stop 조건을 사용하였다.

한편, 이러한 반복식 알고리즘의 이해를 높이기 위해 일련의 순차적 과정을 도식화하면 Fig. 1과 같다. 즉, 주어진 데이터인 초기 잔차 $R^{(0)}$ 로부터 $A^{(s)}(u)$ 을 생성한 후, 이 VNURBS로부터 새로운 잔차 $R^{(s)}$ 을 계산 (step-①)하고, 다시 이 잔차로부터 새로운 $A^{(s+1)}(u)$ 을 생성(step-②)하는 반복적 계산 과정을 보여주고 있다. Fig. 2는 이러한 반복 과정이 진행될수록, 즉 level이 증가할수록, 잔차를 근사하기 위해 생성된 VNURBS의 개수가 증가함을 보여주고 있으며, 이들의 수치적 합에 의해 최종의 근사 결과가 생성됨을 보여주고 있다. 더불어 잔차 $R^{(s)}$ 의 크기는 감소하며 이를 통하여 수치적 수렴성을 확인할 수 있다.

한편, 이러한 반복 과정을 통하여 획득한 결과는 wavelet 개념의 다중해상도 표현 구조를 가지고 있다. 즉, 최종 level에서 구해진 각 VNURBS들은 이전 level의 잔차를 근사한 함수이고 이들의 크기가 점차 감소하므로, 해상도 증가에 따라 데이터가 정의하는 볼륨 영역의 복잡성을 표현할 수 있다.

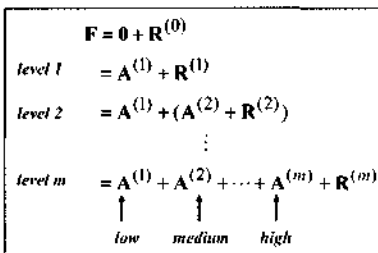


Fig. 2. Development of VNURBS in residual series method where the final approximation is $F \approx \sum_{s=1}^m A^{(s)}$.

3.2 잔차 병합법

본 연구에서 구현한 잔차 병합법은 앞에서 서술한 잔차 급수법을 기반으로, 잔차 급수법의 메모리 사용량 및 계산 시간 성능을 향상시킨 방법이다. 즉, 잔차 데이터로부터 VNURBS를 생성하고, 이것을 이전 과정에서 이미 생성된 VNURBS에 병합하여 1개의 병

합VNURBS를 생성하고, 다시 잔차를 계산하는 방식이다. 구체적인 알고리즘은 Algorithm 2와 같다. 즉,

분산형 블록 데이터 $\{F_i\} (i=0, \dots, M-1)$ 가 주어졌을 때, level s 에서의 잔차를 $R^{(s)}$, level s 에서의 VNURBS를 $A^{(s)}(u)$ 라 정의하자. 먼저 초기 잔차를 $R^{(0)} = \{F_i\}$ 라 놓고, 이로부터 2.2절의 VNURBS 근사법을 사용하여 최초 level $s = 1$ 인 $A^{(s)}(u)$ 을 구한다. 이상은 잔차 급수법과 동일하다.

그 다음, 생성된 $A^{(s)}(u)$ 에 의해 발생된 새로운 잔차를 $R^{(s)} = R^{(0)} - A^{(s)}(u)$ 에 의해 계산(step-①)하고, 다시 잔차 $R^{(s)}$ 로부터 VNURBS 근사법을 수행하여 다음 level인 $s + 1$ 에서의 $A^{(s+1)}(u)$ 을 생성(step-②)한다. 여기서 $A^{(s+2)}(u)$ 을 생성하기 위해 사용된 차수 및 조정점의 개수는 잔차 급수법과 동일하다.

그리고 다음 과정에서 수행될 병합 작업을 위하여 $A^{(s)}(u)$ 에 적절한 절점(knot)을 삽입하여 $\hat{A}^{(s)}(u)$ 로 변환(step-③)시킨다. 여기서 삽입되는 절점의 위치는 기존 내부 절점들 사이의 중간 위치이며, $A^{(s)}(u)$ 에 2^{s-1} 개의 절점이 각각 삽입된다.

다음 과정은 병합 작업으로서 앞에서 구한 $\hat{A}^{(s)}(u)$ 와 $A^{(s+1)}(u)$ 를 $A^{(s+1)}(u) = \hat{A}^{(s)}(u) + A^{(s+1)}(u)$ 에 의해 병합하여 level이 $s+1$ 인 새로운 $A^{(s+1)}(u)$ 을 생성(step-④)한다.

마지막으로 잔차 크기에 의존한 특정 stop 조건이 만족될 때까지 반복하여 수행한다. 본 연구의 경우 알고리즘의 성능 평가를 목적으로 반복 횟수, 즉 최대 level이 m 을 초과하지 않는 stop 조건을 사용하였다.

한편, 이러한 반복식 알고리즘의 이해를 높이기 위해 일련의 순차적 과정을 도식화하면 Fig. 3과 같다. 즉, 주어진 데이터인 초기 잔차 $R^{(0)}$ 로부터 $A^{(s)}(u)$ 을 생성한 후, 이 VNURBS로부터 새로운 잔차 $R^{(s)}$ 을 계산(step-①)하고, 다시 이 잔차로부터 $A^{(s+1)}(u)$ 을 생성(step-②)한 후, 여기에 절점 삽입(step-③)에 의해 구해진 $\hat{A}^{(s)}(u)$ 을 병합(step-④)하여 새로운 $A^{(s+1)}(u)$ 을 생성하는 반복적 계산 과정을 보여주고 있다. Fig. 4는 이러한 반복 과정이 진행될 때, 즉 level이 증가할 때, 병합 과정을 통해 누적되는 VNURBS의 발달 과정을 보여주고 있다. 더불어 각 level에서의 잔차 $R^{(s)}$ 의 크기가 감소하며 이를 통하여 반복 과정의 수치적 수렴성을 확인할 수 있다.

한편, 이러한 반복 과정을 통하여 획득한 결과는 다중해상도 표현 구조를 지원할 수 있다. 즉, 각 level에서 구해진 VNURBS들은, 점차 감소해 나가는 잔차를 근사한 함수들이 병합되어 생성되기 때문에, 해상도

Algorithm 2. MultiResidual Approximation : Residual Merging Method

input: volumetric scattered data $\{F_i\} (i=0, \dots, M-1)$

output: VNURBS $A^{(m)}(u)$

let $R^{(0)} = \{F_i\}$ and $s=1$

construct $A^{(s)}(u)$ from $R^{(0)}$ by the approximation algorithm described in the section (2.2)

(To build $A^{(s=1)}(u)$, we set orders to be and # of control points to be $k_1 = k_2 = k_3 = 4$ and $n_1 = n_2 = n_3 = 4$, respectively.)

while $s < m$ do

① compute $R^{(s)} = R^{(0)} - A^{(s)}(u)$

② construct $A^{(s+1)}(u)$ from $R^{(s)}$ by the approximation algorithm described in the section (2.2)

(To build $A^{(s \geq 2)}(u)$, we set $k_1 = k_2 = k_3 = 4$ and $n_1 = n_2 = n_3 = 4 + \sum_{r=0}^{s-2} 2^r$.)

③ refine $A^{(s)}(u)$ into $\hat{A}^{(s)}(u)$ by the knot insertion[23] (new knots are inserted to the middle positions between the interior knots.)

④ compute $A^{(s+1)}(u) = \hat{A}^{(s)}(u) + A^{(s+1)}(u)$

⑤ let $s = s + 1$

end

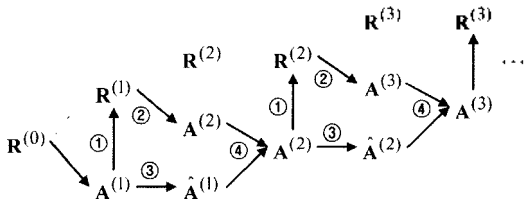


Fig. 3. Iterative refinement process of residual merging method.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{F} = \mathbf{0} + \mathbf{R}^{(0)} \\
 \text{level 1} & = \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{R}^{(1)} \leftarrow \text{low} \\
 \text{level 2} & = \mathbf{A}^{(2)} + \mathbf{R}^{(2)} \leftarrow \text{medium} \\
 & \vdots \\
 \text{level } m & = \mathbf{A}^{(m)} + \mathbf{R}^{(m)} \leftarrow \text{high}
 \end{aligned}$$

Fig. 4. Development of VNURBS in residual merging method where the final approximation is $\mathbf{F} \approx \mathbf{A}^{(m)}$.

증가에 따라 데이터가 정의하는 볼륨 영역의 복잡성을 표현하게 된다.

3.3 수치 결과 및 성능 분석

본 연구에서 수행한 잔차 급수법과 잔차 병합법의 수치 결과 및 근사법 성능을 비교하여 정리하면 Table 3과 같다. 본 연구에서 사용된 근사법 성능은 근사 정밀도, 계산 시간, 그리고 메모리 사용량이다. 근사 정밀도는 데이터 점에서의 정밀도와 격자 점에서의 정밀도로 나누어 측정하였고, 계산 시간은 근사법 수행 시간인 생성(construction) 시간과 임의의 위치에서 함수 속성값을 1번 계산하는 사정(evaluation) 시간으로 구분하여 측정하였다. 그리고 메모리 사용량은 데이터 근사에 사용되는 VNURBS의 크기를 바이트(byte) 단위로 측정하였다. 참고로 Table 3의 결과는 2.3절에서 언급한 test 함수 F_1 을 사용하였고, 모든 계산은 Pentium IV, 512 MB RAM에서 수행되었다.

Table 3. Comparison of performance results between residual series and merging method for the scattered data, $M=4000$

Maximal Level 1		Residual Series	Residual Merging	Ratio
Fitting Accuracy (RMS error)	Data Points	0.0392	0.0392	1.00
	Grid Points	0.0420	0.0420	1.00
Computation Time (seconds)	Construction	0.647	0.641	1.01
	Evaluation (milliseconds)	0.774	0.770	1.01
Memory Usage (bytes)		1,404	1,404	1.00

Maximal Level 2		Residual Series	Residual Merging	Ratio
Fitting Accuracy (RMS error)	Data Points	0.0176	0.0176	1.00
	Grid Points	0.0214	0.0214	1.00
Computation Time (seconds)	Construction	20.140	6.172	3.26
	Evaluation (milliseconds)	1.520	0.770	1.97
Memory Usage (bytes)		4,040	2,636	1.53

Maximal Level 3		Residual Series	Residual Merging	Ratio
Fitting Accuracy (RMS error)	Data Points	0.0066	0.0066	1.00
	Grid Points	0.0077	0.0077	1.00
Computation Time (seconds)	Construction	110.937	27.688	4.01
	Evaluation (milliseconds)	2.387	0.777	3.07
Memory Usage (bytes)		11,060	7,020	1.58

Table 3의 결과를 바탕으로 본 연구에서 제시한 다

중 잔차식 VNURBS 근사법의 성능을 분석하여 정리하면 다음과 같다.

- 근사 정밀도: 잔차 급수법과 잔차 병합법 모두 level이 증가할수록 정규RMS오차가 상당히 향상되었음을 확인할 수 있으며, 그 값이 동일함을 측정 결과를 통하여 확인할 수 있다.
- 계산 시간: 잔차 급수법보다 잔차 병합법이 빠른 수행 속도를 보여주었고, 함수 evaluation 시간의 경우, 급수법에 비해 병합법이 level에 만큼 빠름을 확인할 수 있다. 이는 급수법이 level수 만큼의 VNURBS를 가지고 계산하는데 비하여 병합법은 오직 1개의 VNURBS를 가지고 계산하기 때문이다.
- 메모리 사용량: level s에서 잔차 병합법의 메모리 사용량은 잔차 급수법의 메모리 사용량보다 작다. 그 작은 정도는 level s-1에서 급수법이 사용하는 메모리만큼이다. 이는 급수법의 경우, level이 증가할수록 각 level에서 생성된 VNURBS의 메모리 크기가 증가하면서 이 메모리들이 누적되기 때문이다.

4. VNURBS 근사법의 응용

4.1 곡면 적합(surface fitting)

본 연구에서 수행한 VNURBS 근사법이 곡면 적합 문제에 활용될 수 있음을 확인하였다. 즉 간단한 해석 곡면으로부터 무작위로 추출된 분산형 데이터를 가지고, VNURBS 근사법에 의해 해석 곡면 형상이 정의될 수 있는지를 확인하였다. Fig. 5에서 보는 바와 같이, 해석 곡면으로 사용한 유형은 평면(plane), 구면(sphere), 원통면(cylinder), 원뿔면(cone), 그리고 원환면(torus)이며, 이때 사용된 분산형 데이터의 크기는 $M=500$ 이고, 생성된 VNURBS의 조정점 개수 및 차수는 Table 4와 같고, 균일한 절점 벡터를 사용하였다.

Table 4. The number of control points and the order of B-spline basis function for analytic surface fitting shown in Fig. 5

Types	n_1	n_2	n_3	k_1	k_2	k_3
Plane	2	2	2	2	2	2
Sphere	4	4	4	4	4	4
Cylinder	4	4	2	4	4	2
Cone	4	4	4	4	4	4
Torus	5	5	5	5	5	5

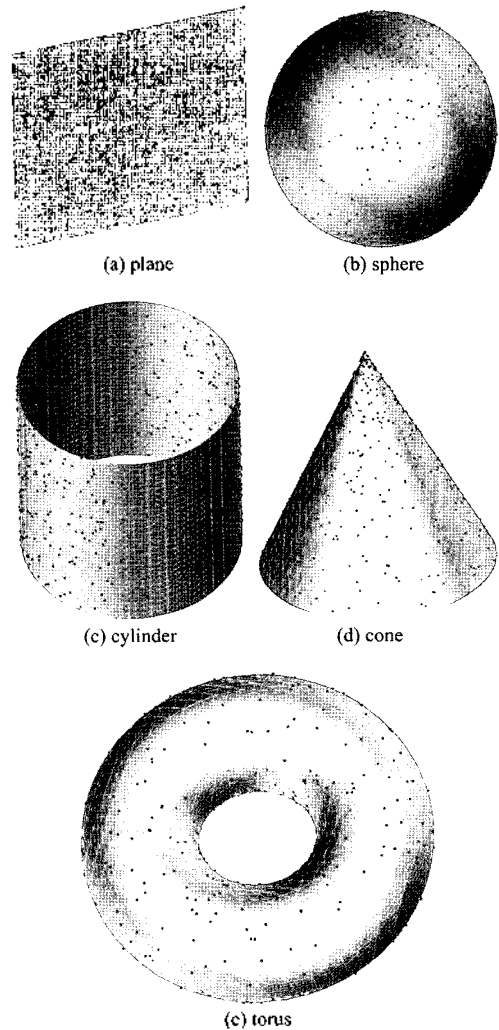


Fig. 5. Surface fitting examples of analytic shapes.

4.2 곡면 모델링(surface modeling)

본 연구에서 수행한 VNURBS 근사법이 자유 곡면의 형상 모델링에 활용될 수 있음을 확인하였다. 본 연구에서 사용한 모델링 방식은 특징점 기반의 형상 모델링으로써 기존 Turk^[23]가 제시한 음함수 곡면 모델링 기법과 유사하다. 이 방식은 설계하고자 하는 곡면의 전체 기본 형상을 몇 개의 특징점으로 표현하고, 여기에 추가적인 특징점 삽입을 통하여 국부적 상세 형상을 모델링해 나가는 방식으로써, 임의의 자유 곡면 형상을 특징점에 의해 직관적으로 정의할 수 있다는 장점이 있으며, 이들 특징점의 변환을 통하여 형상의 변환을 유도할 수 있다.

Fig. 5는 구 곡면의 생성 과정 및 형상 변형 과정을 보여주고 있으며, Fig. 6은 위인 잔의 모델링 결과를

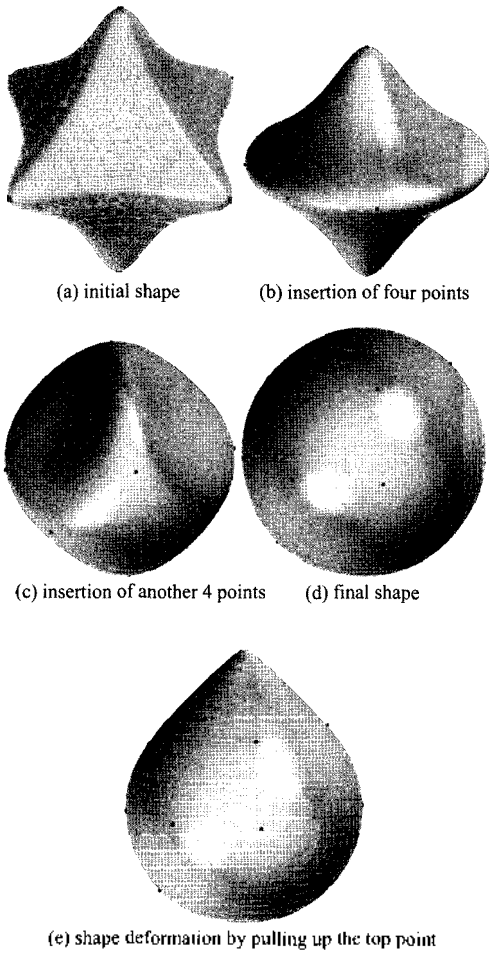


Fig. 6. Surface modeling example of a sphere shape.

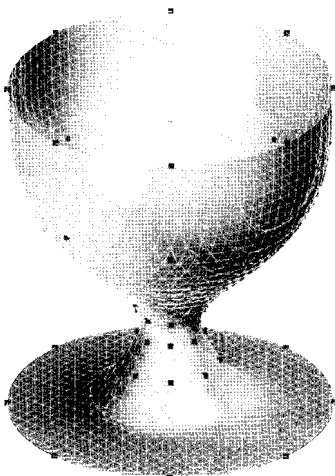


Fig. 7. Surface modeling example of a wine glass shape.

보여주고 있다. 참고로 Fig. 5와 6에서 생성된 VNURBS의 조정점 개수는 $n_1=n_2=n_3=4$ 이고, 차수는 $k_1=k_2=k_3=4$ 이다.

5. 결 론

본 연구에서는 측정 혹은 계산을 통하여 획득한 분산형 볼륨 데이터를 가지고 그 볼륨 데이터가 정의하는 볼륨 공간을 근사적으로 나타낼 수 있는 VNURBS 근사법에 관하여 수치 결과 및 성능 분석과 함께 상세히 서술하였다. 그리고 이 근사법의 활용 가치를 높이기 위하여 다중 잔차 방식의 VNURBS 근사법을 제안하였다. 즉 다중해상도 표현 구조를 가진 잔차 급수법을 소개하였고, 나아가 계산 성능 측면에서 보다 효과적인 잔차 병합법을 제시하였다. 잔차 급수법은 반복된 근사 과정에서 생성되는 잔차를 VNURBS 근사법에 의해 근사해 나가는 방식으로써 wavelet 개념의 표현 능력을 가지고 있으며, 잔차 병합법은 잔차를 1개의 VNURBS에 계속해서 병합해 나가는 방식으로써 계산 속도 및 메모리 측면에서 비교 우위에 있다.

이러한 다중 잔차 방식은 본 연구에서 사용한 VNURBS와의 다른 형태의 보간 함수들을 활용하여 구현해 볼 수 있는 범용성의 근사법 알고리즘으로서, 이를 통하여 타 분야로의 응용 및 확장을 기대해 볼 수 있다. 한편, 이러한 활용 가능성 측면에서 본 연구 방식을 사용한 곡면 접합 및 곡면 모델링 예제를 소개하였다. 비록 간단한 적용 예제이나 그 활용 가능성을 확인할 수 있었다.

추후 연구 과제로서 주어진 오차 범위 내에서 분산형 데이터를 근사할 수 있는 유계 오차 근사법(error-bounded approximation)에 관한 연구가 필요하고, 이때 사용될 최적의 차수 및 오차 감소를 위한 질점 벡터의 결정, 그리고 본 연구에서 매제한 VNURBS의 가중치 변수에 관한 추가 연구가 필요하다.

감사의 글

이 논문은 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국 학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2005-003-D00026 및 KRF-2004-202-D00075).

참고문헌

1. Franke, R., "Scattered Data Interpolation: Tests of

- Some Methods", *Mathematics of Computation*, Vol. 38, No. 157, pp. 181-200, 1982.
2. Nielson, G. M., "Scattered Data Modeling", *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 12, No. 1, pp. 60-70, 1993.
 3. Shepard, D., "A Two Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data", in *Proceedings of ACM 23rd National Conference*, pp. 517-524, 1968.
 4. Franke, R. and Nielson, G. M., "Smooth Interpolation of Large Sets of Scattered Data", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp. 1,691-1,704, 1980.
 5. Schaback, R., "Multivariate Interpolation and Approximation by Translates of a Basis Function", in *Approximation Theory VIII, Vol. 1: Approximation and Interpolation*, C.K. Chui and L.L. Schumaker (eds.), World Scientific Publishing Co., Inc., Singapore, pp. 491-514, 1995.
 6. Wendland, H., "Piecewise Polynomial, Positive Definite and Compactly Supported Radial Functions of Minimal Degree", *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 4, pp. 389-396, 1995.
 7. Hardy, R., "Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces", *J. Geophysical Research*, Vol. 76, No. 8, pp. 1,905-1,915, 1971.
 8. Duchon, J., "Splines Minimizing Rotation-Invariant Semi-Norms in Sobolev Spaces", in *Multivariate Approximation Theory*, C.K. Chui, L.L. Schumaker, and J.D. Ward (eds.), Basel, Switzerland: Birkhauser, pp. 85-100, 1975.
 9. Lawson, C. L., "Properties of N-dimensional Triangulations", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 3, pp. 231-247, 1986.
 10. Worsley, A. J. and Farin, G. E., "An N-dimensional Clough-Tocher Interpolant", *Constructive Approximation*, Vol. 3, pp. 99-110, 1987.
 11. Alfeld, P., "Multivariate Perpendicular Interpolation", *SIAM J. Numerical Analysis*, Vol. 22, pp. 95-106, 1985.
 12. Gregory, J. A., "Interpolation to Boundary Data on the Simplex", *Computer Aided Geometry Design*, Vol. 2, pp. 43-52, 1985.
 13. Alfeld, P., "A Case Study of Multivariate Piecewise Polynomials", in *Geometric Modeling*, G. E. Farin (ed.), SIAM Publication, pp. 149-160, 1987.
 14. Narcowich, F. J., Schaback, R. and Ward, J. D., "Multilevel Interpolation and Approximation", *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 7, pp. 243-261, 1999.
 15. Floater, M. S. and Iske, A. "Multistep Scattered Data Interpolation Using Compactly Radial Basis Functions", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 73, pp. 65-78, 1996.
 16. Fasshauer, G. E. and Jerome, J. W., "Multistep Approximation Algorithms: Improved Convergence Rates through Postconditioning with Smoothing Kernels", *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 10, pp. 1-27, 1999.
 17. Lee, S., Wolberg, G. and Shin, S. Y., "Scattered Data Interpolation with Multilevel B-Splines", *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 3, No. 3, pp. 228-244, 1997.
 18. Forsey, D. R. and Bartels, "Hierarchical B-Spline Refinement", *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '88)*, Vol. 22, No. 4, pp. 205-212, 1988.
 19. Forsey, D. R. and Bartels, R. H., "Surface Fitting with Hierarchical Splines", *ACM Trans. On Graphics*, Vol. 14, No. 2, pp. 134-161, 1995.
 20. 박상근, "VNURBS기반의 다차원 불균질 볼륨 객체의 표현: 개념 및 형성", 한국CAD/CAM학회 논문집, 제10권, 제5호, pp. 303-313, 2005.
 21. 박상근, "VNURBS기반의 다차원 불균질 볼륨 객체의 표현: 모델링 및 응용", 한국CAD/CAM학회 논문집, 제10권, 제5호, pp. 314-327, 2005.
 22. Turk, G. and O'Brien, J., "Variational Implicit Surfaces", *Tech Report GIT-GVU-99-15*, Georgia Institute of Technology, 1999.
 23. Piegel, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer-Verlag, 1995.
 24. Iske, A., "Hierarchical Scattered Data Filtering for Multilevel Interpolation Schemes", in *Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo 2000*, T. Lyche and L.L. Schumaker (eds.), Vanderbilt University Press, Nashville, pp. 211-220, 2001.

박 상 근



1991년 포항공과대학교 학사
 1993년 서울대학교 기계설계학과 석사
 1997년 서울대학교 기계설계학과 박사
 1997년~1999년 삼성SDS 정보기술연구소 선임연구원
 2000년 서울대 BK21 기계분야사업단 계약교수

2000년~2002년 (주)K&I 테크놀로지 전무기술이사
 2003년~현재 국립충주대학교 기계공학과 조교수
 관심분야: Computational Geometry, CAD/CAM, Scientific Data Visualization, Virtual Engineering
