대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.2, 291-312. Jun. 2007

제 10-단계 수학에서 복소수 지도에 관한 연구[1)]

김 흥 기[*] · 이 종 철[**]

복소수의 취급이 처음으로 시작되는 제 10-단계 교과서들을 살펴본 결과 그 도입 방법은 모두 이차방정식 $x^2+1=0$ 을 만족하는 해를 생각하는 과정에서 새로운 수 i를 도입하여 사용하고 있다. 이 방법은 우선 새로운 수 i의 도입이 인위적이기 때문에 학생들이 도입과정에서 혼란스러워하며, 이차방정식을 잘 이해하지 못하는 학생들이 이해하도록 하게 하는 것이 어렵다. 이에 비하여 복소수 도입을 좌표평면 위의 점인 순서쌍과 화살표를 사용하여 도입하면 이차방정식을 이해하지 못한 학생들 까지도 흥미를 갖고 학습에 임하게 할 수 있고, 또 수체계를 체계적인 확장으로 다룰 수 있어 학습 효과도 높일 수 있다. 그러나 고등학교 과정에 적합한 지도 내용의 개발이 없어서인지 고등학교에서 순서쌍을 사용한 복소수 도입은 시도되고 있지 않다. 여기서는 수체계의 확장 과정을 초등학교 과정부터 중학교과정을 거쳐 복소수 도입까지 연계되는 체계적이고 가시적인 표현을 통하여 학습할 수 있도록 지도 내용을 개발하였다. 그리고 이 내용으로 지도를 하여본 결과 개발된 학습내용으로 학습지도가 가능함을 알았고, 이 학습이 바람직한 학습임도 알 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

수체계의 지도는 수학교육에서 기본을 이루는 중요한 한 부분으로 학교 수업이 시작되면서 체계적으로 그 확장에 대하여 학습하게 된다.

초등학교 과정에서는 자연수로부터 시작하여 0과 양의 유리수 범위까지, 중학교 과정에서는 정수로부터 실수까지, 고등학교 과정에서는 복소수까지 학습을 하게 된다.

이와 같은 수체계의 확장에서는 그 확장과정을 잘 이해하게 하기 위하여 가시적 표현을 활용하며, 보다 바람직한 학습을 위한 가시적 표현을 사용하기 위해 세계적으로 교과용도서 마다 많은 연구들에 의한 나름대로의 표현을 사용하고 있다.

초등학교 과정에서는 자연수의 도입으로 개수와 순서를 나타내는 방법으로 생활 주변에서의 여러 종류의 모형들을 활용하고, 또 분수와 소수에 대하여도 여러 종류의 모형들을 활용하여 가시적 표현을 한다. 그리고 수를 수직선위에서 생각할 때는 0이상만을 나타내는 0 이상의 오른쪽 부분만 생각한 반직선을 사용하여 나타낸다. 중학교에서는 음수까지 확장된 수를 다루면서 그에 상응하는 생활 주변에서의 여러 종류의 모형들 이를테면 바둑돌, 카드, 전류, 화살표, … 등을 활용하여 가시적 표현을 하고 있다. 그리고 수를 수직선위에서 생각할 때

[*] 단국대학교(hkkim@dankook.ac.kr)
[**] 단국대학교 대학원(yulbane@hanmail.net)
1) 이 연구는 2005학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

는 0 이상의 오른쪽 부분만 아니라 0이하인 왼쪽 부분까지 확장한 전체의 직선을 사용하여 활용하며, 이때는 수의 한 가시적 표현으로 주로 화살표를 많이 사용한다. 또 무리수를 처음 도입하는 제 9-단계에서는 모눈종이에서 넓이를 이용하여 제곱해서 2가 되는 수 곧, $\sqrt{2}$의 존재는 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 바로 $\sqrt{2}$ 임을 가시적으로 보여주고 있다. 그러나 고등학교 과정에서 처음 도입되는 복소수의 경우에는 제곱해서 -1이 되는 수 곧, $\sqrt{-1}$에 대하여는 단지 그러한 수를 i로 나타내는 것으로 하여 사용하도록 하면서 그에 대한 어떠한 가시적 표현도 없이 사용하여 복소수를 도입하고 있다.

수체계의 확장을 수직선을 사용한 경우에서 살펴보면, 우선 자연수는 수직선 위에서 0보다 큰 쪽에서 단위 길이만큼 떨어져 있는 점으로 표현되며, 0이상의 유리수도 수직선 위에 표현됨을 학습한다. 그리고 정수도 확장된 한 수직선 위에 단위 길이만큼 떨어져 있는 점들로 표현되며, 유리수와 무리수 곧 실수도 수직선 위에 표현됨을 중학교 과정에서 학습한다. 그러면 복소수는 수직선을 사용하여 어떻게 표현될 수 있는 가를 생각해볼 수 있는데, 중학교 3학년 교과서에서 수직선 위의 점과 수(실수)는 서로 일대일로 대응한다고 하고 있으므로 이 수직선에는 실수의외 다른 수를 더 나타낼 수 없다는 것을 이해할 수 있다.

따라서 다른 방법을 생각해야만 하며, 그 방법으로 일차원 곧 한 직선이 아닌 경우를 생각할 수밖에 없으며, 확장된 경우로 좌표평면을 생각하게 할 수 있다.

이와 같은 방법으로 복소수를 도입하는 것은 일차원인 직선에 표현된 실수 체계에서 자연스럽게 이차원인 평면으로 수체계를 확장하게 하는 일반화를 생각하게 할 수 있게 되며, 이 경우에 갑자기 인위적으로 도입한 새로운 수 i를 사용하여 학습내용을 전개하는 것 보다 도입과정의 이해를 쉽게 하게 할 수 있고, 또 벡터, 행렬의 지도에 까지 연결되어 바람직한 학습효과도 얻을 수도 있다. 그리고 이때에도 실수에서와 같이 복소수를 가시적으로 표현하여 복소수 체계에서 활용한다면 수체계 전체를 같은 맥락에서 자연스럽게 확장하는 것이 되어 학습의 연계에도 도움이 되는 바람직한 방법이 될 것이다.

그러나 고등학교 과정에 적합한 지도 내용의 개발이 없어서인지 고등학교에서 순서쌍을 사용한 복소수 도입은 시도되고 있지 않다. 여기서는 수체계의 확장 과정을 초등학교 과정부터 중학교과정을 거쳐 복소수 도입까지 연계되는 체계적이고 가시적인 표현을 통하여 학습할 수 있도록 지도 내용을 개발하고, 개발한 학습 내용으로 학습지도가 가능함을 알아보아 가능한 경우에 그 활용을 제안하려 한다.

II 교육과정과 교과서의 분석

1. 교육과정의 분석

제 6차 교육과정과 달리 제 7차 교육과정에서는 제 10단계의 수와 연산 부분에서만 간단히 다루고 있는데 그 내용은 다음과 같다.

가. 수와 연산

1 집합의 연산법칙

① 집합의 연산법칙을 이해하게한다.

2 명제

① 명제의 뜻을 알고, 참, 거짓을 판별할 수 있다.

② 명제의 역, 이, 대우를 이해한다.

③ 필요조건과 충분조건을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

3 실수

① 실수의 연산에 관한 성질을 이해한다.

② 실수의 대소 관계를 이해한다.

4 복소수

① 복소수의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.

② 복소수의 기본성질을 이해한다.

[심화 과정]

① 임의의 수의 집합에서 사칙연산에 대하여 닫혀 있는지를 조사할 수 있다.

수와 연산에 대한 학습내용에 대한 교육과정을 초등학교 과정에서부터 간단히 살펴보면 다음과 같다. 우선 제 1, 2-단계에서는 자연수(1000 까지의 수)와 그 수에 대한 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대하여 다루고, 제 3-단계에서부터 제 6-단계까지는 수(0 이상의 수)의 분수, 소수표현과 그 연산에 대하여 다루고 있으며, 또 수직선을 사용하여 이들 수들을 나타내고 있다. 중학교 과정인 제 7-단계에서는 수의 확장으로 음수까지 생각한 유리수를 다루고 이들을 수직선 위에 나타내어 연산을 다루고 있으며, 제 8-단계에서는 유리수와 유리수의 소수표현과의 관계에 관하여 다루고 있고, 제 9-단계에서는 제 8-단계에서 알아본 유리수와 소수와의 관계로부터 무리수를 도입하며, 수직선 위의 점과 실수는 일대일 대응을 함이 알려져 있다는 것을 제시하고 있다. 그리고 고등학교 과정인 제 10-단계에서 복소수를 수와 연산에서 위와 같이 도입하고 있는데, 위의 내용에 의하면 복소수의 도입을 어떤 방법으로 하여야하는 가에 대한 언급은 없다. 교육과정의 내용을 그대로 본다면 바로 앞에서 실수를 연산과 순서에 대하여 알아보고 그 연장으로 복소수를 다루는 것으로만 되어 있다. 이때, 복소수의 도입은 현행 교과서에서와 같이 모두 $\sqrt{-1}=i$를 사용하여 인위적으로 갑자기 새로운 수가 생긴 것처럼 도입하는 방법만을 지향할 것인가는 고려해볼 일이다. 물론 역사적으로 살펴보면, 15세기 초에 $\sqrt{-1}$과 같은 수가 존재하는 보다 큰 수체계를 생각하기 시작했고 이차방정식 $x^2+1=0$의 해로 $\sqrt{-1}$을 쓰기 시작했으며 다른 대수적 기호와 함께 기호 $\sqrt{-1}$을 사용했다. 그리고 $\sqrt{-1}$을 기호 i로 나타낸 것은 상당히 뒤인 1748년에 오일러에 의해서이다.(E P. Keenan. et al., 1999 ; J E. Marsden, 1973 ; L L Pennisi, et al., 1967 ; G R Rising, et al., 1991) 실제로 이와 같이 많은 숙고와 시련에 의하여 이루어진 수의 확장과 새로운 기호의 사용을 역사적인 관점에만 중점을 두어 고등학교 과정에서도 그대로 답습하고 있다. 실제로 19세기 말부터 실현된 실수 체계에 대한 공준적 접근에 의하면, 복소수는 실수의 순서쌍으로 정의 하고 있고 복소수 교재에서는 이 방법으로 복소수를 도입하고 있다. 그러나 계속 답습되어온 현재와 같은 도입 방법에 익숙해있는 경우에 그 방법을 현대적인 방법인 순서쌍을 사용한 방법으로 도입하는 것은 기존의 사고 때문에 거부 반응을 일으킬 수도 있을 것이다. 하지만 이를테면 함수의 경우를 보면 19세기 초에 함수는 한정된 식(definite formula)으로 인식되던 것이 현대에서는 집합론적인 방법(순서쌍 이용)으로 일반화 되었고, 이에 따라 많은 나라의 중등학교에서 함수의 정의를 한정된 식으로가 아니라 직관적으로라도 일반화된 정의 쪽에 맞추기 위하여 대응, 관계, 그래프 등을 활용하여 정의하고 있다. 이런 맥락에서 볼 때 복소수의 도입도 보다 현대적인 방법의 도입을 그에 맞게 도입할 수

있도록 하게 하는 것이 오히려 나름대로도 바람직할 것이다. 따라서 앞으로는 교육과정에서도 현재와 같이 막연하게 내용을 제시하기 보다는 이러한 점을 집고 넘어가야만 할 것이다.

특히 제 7차 교육과정에는 제 6차 교육과정에서 다루던 복소수의 극좌표를 다루지 않고 있으므로 복소수의 벡터 취급 등에로의 학습내용 연계를 생각한다면 순서쌍(좌표)을 사용한 복소수의 도입은 학습의 내용 자체의 이해뿐만 아니라 후속학습의 연계에도 많은 도움을 줄 것으로 생각된다.

2. 교과서의 분석

현재 사용되고 있는 16종의 모든 고등학교 수학 교과서 10-가에서 복소수의 도입은 $\sqrt{-1} = i$ 를 사용하고 있는데 내용의 전개 방법은 대동소이하며 간단히 살펴보면 다음과 같다.

우선 복소수의 정의로 임의의 실수 x에 대하여 이차방정식 $x^2+1=0$을 만족하는 해는 존재하지 않는다. 따라서 위의 이차방정식을 만족하는 근을 구하기 위하여 실수 이외의 다른 새로운 수를 정의해야 한다. 이제 $x^2=-1$을 만족하는 x가 존재한다고 가정하여 이것을 i라 하자. 즉, $i^2=-1$. 여기서 i를 허수단위라 한다. 임의의 실수 a, b에 대하여 $a+bi$ 꼴로 나타내어지는 수를 복소수라 하고 a를 실수부분, b를 허수부분이라 한다. $0i=0$이라 하면 $a=a+0i$이고, 따라서 실수전체의 집합은 복소수 전체의 집합의 부분집합이다. 특히 복소수 $a+bi$에서 실수가 아닌 복소수($b\neq 0$일 때, $a+bi$)를 허수라 하고 허수 중 실수부분이 0인 복소수($a=0$일 때, bi)를 순허수라 한다. 이에 따른 복소수의 상등과 켤레복소수는 다음과 같이 정한다.

임의의 실수 a, b, c, d에 대하여

$$a+bi=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0,$$
$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,\ b=d.$$

복소수 $a+bi$에 대하여 허수부분의 부호를 바꾼 복소수 $a-bi$를 복소수 $a+bi$의 켤레복소수라 하고 기호로는 $\overline{a+bi}$으로 나타낸다. 즉,

$$\overline{a+bi}=a-bi$$

그리고 복소수의 연산은 다음과 같이 정한다.

덧셈 :

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

뺄셈 :

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

곱셈 :

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)$$

나눗셈 :

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

(단, $c+di\neq 0$)

이상에서 살펴본 바에 의하면 현행 교과서에서는 모두 이차방정식의 해를 구하는 것으로부터 새로운 수의 필요성을 언급하면서 갑자기 인위적이기도 한 새로운 수 i를 도입하고 있다. 그리고 이 i를 사용하여 만들어진 수들 곧 복소수에 대한 에 대하여 상등, 켤레, 연산 등에 대하여 학습내용을 전개하고 있다.

여기서 생각해보아야 할 것 중의 하나는 갑자기 인위적인 수 i를 도입하는 것에 대한 학습자들의 사고 과정의 연계에 대한 간격이고, 또 이와 같은 학습은 복소수를 i에 관한 일차식으로 생각하여 대수적인 취급에 의한 간편

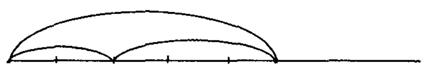
한 점도 있을 수 있지만, 벡터 등으로의 학습 연계에도 문제점이 있을 수도 있다. 실제로 제 6차 교육과정에서는 수학Ⅱ에서 다루었던 복소수의 극형식에 대한 내용을 7차 교육과정에서는 모두 삭제하여 복소수의 좌표평면 표시를 그나마도 알 수 없도록 되어 있다. 복소수의 도입을 순서쌍으로 도입하면 수체계의 확장과정에서 그 이해를 보다 바람직하게 할 수 있으며, 연산에 대한 가시적 표현도 초등학교 과정에서부터 다음과 같이 계속 연계된 상태로 체계적으로 학습할 수 있다.

III 가시적 표현에 의한 수체계의 확장 소고

초등학교에서 처음으로 수를 다룰 때 개수 또는 크기는 어떤 물건이나 또는 선분을 사용하며, 이 때 이를테면 덧셈 2 + 3 은 다음과 같이 가시적인 표현을 하여 이해하게 한다.

(가) ●● + ●●● = ●●●●●

(나)



여기서 첫 번째 (가)의 경우에는 2개의 ●에 다음으로 계속하여 3개의 ●를 덧 붙여서 처음부터 계속하여 덧붙인 끝까지의 ●의 개수로, 곧

① 처음의 2개 ●●를 늘어놓고

② 그 끝에서 계속하여 다음의 3개 ●●● 를 계속 늘어놓은 후

③ 처음 늘어놓은 것의 첫 번째 부터 두 번째 늘어놓은 것의 맨 끝까지를 차례로 세 어나간 개수를

두 수 2, 3의 합 2 + 3으로 한 것이고,

두 번째 (나)의 경우에는 단위 길이가 2개인 선분에 잇대어 단위 길이가 3개인 선분을 나타내어 처음 선분이 시작한 곳에서부터 두 번째 선분이 끝난 곳까지의 선분의 길이로, 곧

① 처음의 길이가 2인 선분 을 나타내고

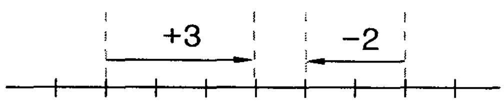
② 그 끝에서 시작하는 길이가 3인 선분 을 잇대어 나타낸 후

③ 처음 시작한 곳에서 계속하여 두 번째 선분이 끝난 곳까지의 선분의 길이를

두 수 2, 3의 합 2 + 3 으로 한 것이다.

그리고 중학교 1학년에서는 이 방법을 그대로 확장하여 수직선 위에서 처음 시작하는 점을 원점 O로 하여 두 수의 덧셈을 양수, 음수까지 확장된 경우에서 다음과 같이 지도하는데, 이 방법은 실제로 실수인 경우까지도 그대로 적용한다.

우선 양수 음수의 표현으로 양수는 오른쪽으로 향하는 화살표, 음수는 왼쪽으로 향하는 화살표를 사용하여 나타낸다. 이를테면 +3, −2 를 화살표를 사용하여 나타내면 아래 그림과 같다.



[참고] 화살표를 사용하여 양수, 음수를 나타낼 때, 왼쪽 그림과 같이 화살표의 시작점 위치는 어느 곳에서 시작하여도 관계없고, 단지 길이와 화살표 방향만 관계된다.

수직선 위에서 두 수의 덧셈은 우선 첫 번째 수를 원점 O에서 시작하는 화살표로 나타내고, 그 끝점에서 시작하는 화살표로 두 번째 수를 나타내어 그 끝점의 수를 두 수의 합 곧,

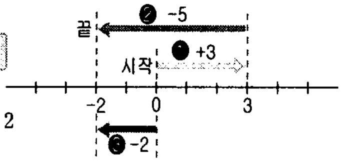
두 수의 합을 나타내는 화살표는 첫 번째 화살표가 시작하는 점에서 시작하여 두 번째 화살표가 끝나는 점에서 끝나는 화살표로 나타낸다.

여기서 두 수가 양수, 음수인 네 가지 경우의 각 경우 곧, (양수) + (양수), (양수) + (음수), (음수) + (양수), (음수) + (음수)의 경우를 예시하면 다음과 같이 나타내어진다.

(1)

(양수)+(음수)

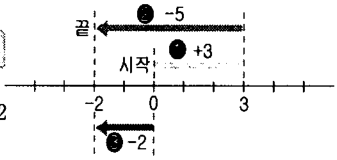
$(+3)+(-5)=-2$



(2)

(양수)+(음수)

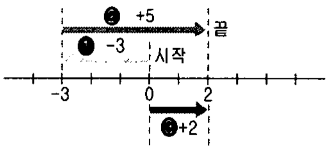
$(+3)+(-5)=-2$



(3)

(음수)+(양수)

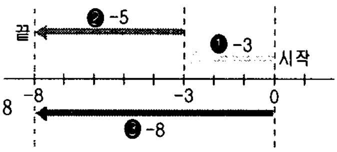
$(-3)+(+5)=+2$



(4)

(음수)+(음수)

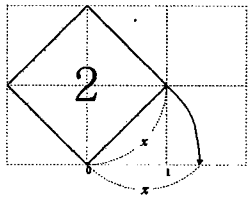
$(-3)+(-5)=-8$



[참고] 위의 그림에서 번호 ❶, ❷, ❸ 은 주어진 수 곧, 화살표를 그리는 순서를 나타낸다.

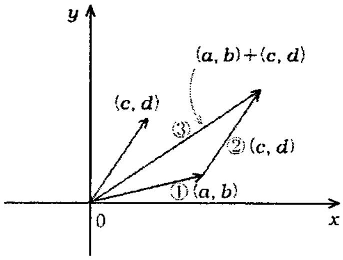
중학교 3학년에서는 무리수를 도입하면서 비(분수, 유리수)로 나타낼 수 없는 수 곧 무리수는, 유리수(분수) 표현을 소수표현으로 바꾸어 「분수 표현 ⇔ 순환소수 표현」을 학습한 후 순환소수가 아닌 수 이를테면, 0.10100100001⋯ , 0.112123123412345 ⋯ 등과 같은 수가 있음을 실례로 들어 보여주면서 이들을 무리수라고 하고 있다.

그리고 제곱해서 2가되는 수 곧 $x^2=2$ 인 수 x가 존재함을 가시적으로 보여주기 위하여 다음 그림과 같이 모눈종이를 사용하였다. 그림에서 알 수 있듯이 한 변의 길이가 1 정사각형의 대각선의 길이로 그림과 같은 정사각형을 그리면 그 넓이는 한 변의 길이가 1 인 정사각형 넓이의 반인 삼각형이 네 개이므로 2가 된다.



따라서 그림의 길이가 1 인 정사각형의 대각선의 길이 x가 바로 보여주려는 수의 가시적 표현이다.

만일 제곱해서 -2 (또는 -1)가 되는 수의 가시적 표현도 위와 같이 쉽게 된다면 복소수 도입의 학습지도에 바람직한 방법으로 활용할 수 있을 것이다. 그러나 실직선 위에서의 이와 같은 구현은 할 수 없으므로 좌표평면과 그리고 앞에서 사용했던 화살표를 좌표평면위에 그대로 활용하여 구현해본다. 곧 위에서 사용한 화살표의 사용을 좌표평면 위로 확장하여 사용하면 다음과 같다.



실수에서의 수직선 위에서의 원점은 좌표 평면위에서 원점으로 바뀌고, 실수의 덧셈에서와 같이 두 복소수 (a, b), (c, d)의 덧셈은 우선 첫 번째 복소수 (a, b)를 원점 O에서 시작하는 화살표로 나타내고, 그 끝점에서 시작하는 화살표로 두 번째 복소수(c, d)를 나타내어 그 끝점의 복소수를 두 복소수의 합 (a, b) + (c, d)로 한다. 곧, 두 복소수의 합을 나타내는 화살표는 첫 번째 화살표가 시작하는 점에서 시작하여 두 번째 화살표가 끝나는 점에서 끝나는 화살표로 나타낸다. 이 때

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

이다. 그리고 뺄셈은 덧셈의 역산으로 생각하면 된다.

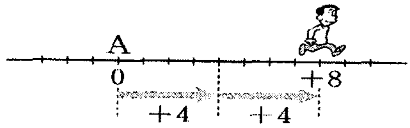
한편 곱셈은 초등학교에서는 여러 경우의 사물들을 묶어서 세는 방법으로부터 두 수의 곱셈을 도입하고 곱셈구구를 이해하게하여 곱셈에 활용하도록 하고 있다. 그리고 양수, 음수가 도입되는 중학교에서는 두 수의 곱을 화살표를 사용하여 이를테면 다음과 같이 도입하고 있다.

2시간 후를 +2로 2시간 전은 −2로, 동쪽으로 매시 4km의 속력을 +4로 서쪽으로 매시 4km의 속력은 −4 로, 동쪽으로 8km 떨어진 지점을 +8로 서쪽으로 8km 떨어진 지점은 −8로 나타내기로 할 때, 지수는 현재 동서로 뻗어 있는 직선 도로 위의 점 A에 와있다. 동쪽으로 가는 것과 현재보다 나중 시간을 각각 양수, 서쪽으로 가는 것과 현재보다 앞의 시간을 각각 음수로 나타내자. 이 때 점 A를 수직선 위의 원점 O로 하여 (속력)×(시간) = (거리)에서 다음을 생각할 수 있다.

① 동쪽으로 매시 4km의 속력으로 걸어갈 때 현재 보다 2시간 후의 지점을

$(+4)\times(+2)$ **(양수)×(양수)**

$= +8$

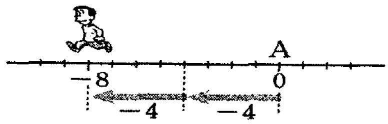


로 하면, 서쪽으로 매시 4km의 속력으로 걸어갈 때 현재 보다 2시간 후의 지점은

$(-4)\times(+2)$ **(음수)×(양수)**

$= -8$

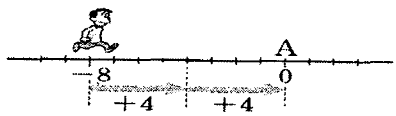
이다.



② 동쪽으로 매시 4km의 속력으로 걸어갈 때 현재 보다 2시간 전의 지점을

$(+4)\times(-2)$ **(양수)×(음수)**

$= -8$

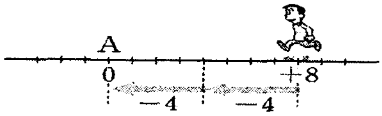


로 하면, 서쪽으로 매시 4km의 속력으로 걸어갈 때 현재 보다 2시간 전의 지점은

$(-4)\times(-2)$ **(음수)×(음수)**

$= +8$

이다.



앞의 $(+4)\times(+2)$, $(-4)\times(+2)$에서 곱하는 수가 양수 +2인 경우엔 양의 부호를 생략하여 나타내면 그 곱은 $(+4)\times 2$, $(-4)\times 2$에서

$$(+4)\times(+2)=(+4)\times 2$$
$$=(+4)+(+4)$$
$$=+8$$

$$(-4)\times(+2)=(-4)\times 2$$
$$=(-4)+(-4)$$
$$=-8$$

에서, 곱하는 수가 양수 $+2$인 경우 그 곱은 곱하여지는 수의 2배임을 알 수 있다.

한편, 앞의 $(+4)\times(-2)$, $(-4)\times(-2)$ 에서

$$(+4)\times(-2)=-8$$
$$=(-4)+(-4)$$
$$=(-4)\times 2$$
$$(-4)\times(-2)=+8$$
$$=(+4)+(+4)$$
$$=(+4)\times 2$$

이므로 곱하는 수가 음수 -2인 경우 그 곱은 곱하임수와 반대의 수의 2배임을 알 수 있다. 이상에서 두 수의 곱은

(1) 첫 번째 수(곱하임수)를 원점 O에서 시작하는 화살표로 나타내고,

(2) 두 번째 수(곱하는 수)가

① 양수일 때는 첫 번째 수의 화살표와 같은 방향으로 크기가 두 수의 절대값의 곱인 화살표로 나타내어

② 음수일 때는 첫 번째 수의 화살표와 반대 방향으로 크기가 두 수의 절대값의 곱인 화살표로 나타내어

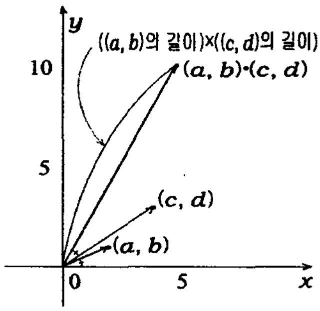
(3) 그 끝점의 수를 두 수의 곱으로 한다. (김홍기 외 1인, 2006)

이제 두 실 수의 곱셈과 같이 복소수의 곱셈을 화살표를 사용하여 나타내어 보자.

이를테면 두 복소수 (a, b), (c, d)의 곱

(a, b) · (c, d)

를 나타내는 화살표는 길이가 각각 복소수 (a, b), (c, d)를 나타내는 화살표의 길이의 곱이고, 방향이 복소수 (c, d)를 나타내는 화살표에 복소수 (a, b)를 나타내는 화살표가 x-축과 이루는 각 만큼 더해서 그린 오른쪽 그림과 같이 그린 화살표이다.

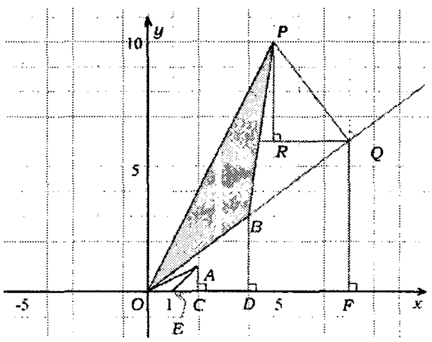


이 때 곱을 나타내는 화살표는 아래의 오른쪽 그림과 같이 그릴 수 있다.

우선 (a, b)를 나타내는 화살표 OA의 끝점 A와 x-축의 단위점 E, 그리고 원점 O를 꼭지점으로 하는 △AOE 를 그린다. 그리고 ∠AOE = ∠POB 이면서 변 OE에 대응하는 변을 변 OB로 하는 △OEA와 닮은 △POB를 그리면 이 때 화살표 OP가 바로 구하는 복소수를 나타내는 화살표이다. 여기서

(a, b) · (c, d) = (ac - bd, ad + bc)

이며 이것은 다음과 같이 알 수 있다.



오른쪽 그림으로 부터

△AOC ∽ △POQ 에서

$\overline{OQ} = a\sqrt{c^2+d^2}$, $\overline{PQ} = b\sqrt{c^2+d^2}$

△BOD ∽ △QOF 에서

$$\overline{OF} = ac, \qquad \overline{QF} = ad$$

△BOD ∽ △QPR에서

$$\overline{RQ} = bd, \qquad \overline{PR} = bc$$

따라서, 점 P의 좌표는 (ac - bd, ad + bc)임을 알 수 있다. 이 때 곱을 나타내는 화살표의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{OP} = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$$

제 6차 교육과정에서는 위의 사실을 수학 II에서 복소수의 극형식을 통하여 지도하였지만 제 7차 교육과정에서는 아예 복소수의 극형식을 취급하지 않으므로 위와 같이 삼각형의 닮음을 이용하여 밝히면 된다.

이상의 가시적 표현을 사용한 수체계의 확장을 고려하여 고등학교 과정에서 순서쌍을 사용한 복소수의 도입 지도 내용을 개발한다.

IV 복소수 학습 지도안

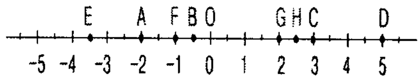
1. 복소수의 뜻

가. 실수와 수직선

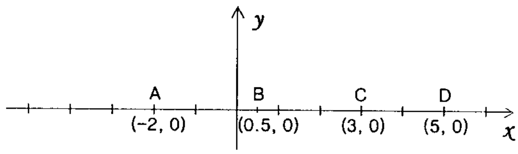
수직선 위의 점 전체의 집합과 실수 전체의 집합 사이에는 일대일의 대응이 이루어져 있음이 알려져 있어, 이것은 바로 수직선이 실수를 나타내는 직선이라는 것을 말하고 있다는 것을 제 9-단계(가)에서 배웠다.

따라서 수직선 위의 점은 수로 나타낼 수 있고, 수는 수직선 위에 나타낼 수 있다.

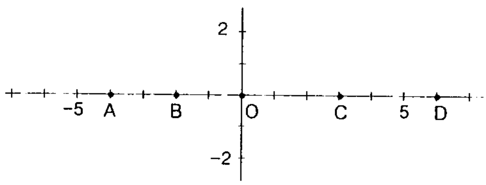
이를테면 다음 수직선 위의 점 A, B, C, D는 수 -2, -0.5, 3, 5를 나타내는 점이고, 수 -3.5, -1, 2, 2.5 등은 수직선 위의 점 E, F, G, H로 나타내어진다.



이제 위의 수직선을 x-축으로 하고 이 수직선의 0을 원점 O로 한 다음과 같은 좌표평면을 생각해보자. 이 때 주어진 점 A, B, C, D 곧 수 -2, -0.5, 3, 5는 좌표평면 위에서 순서쌍 (-2, 0), (-0.5, 0), (3, 0), (5, 0) 로 나타내어진다. 따라서 수직선 위의 실수는 좌표평면 위에서 생각하면 y-축의 좌표가 0인 순서쌍으로 나타내어짐을 알 수 있다.



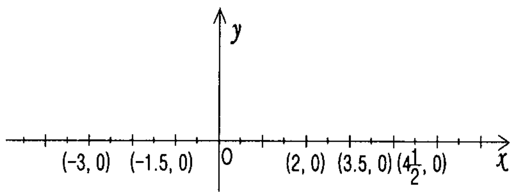
[예1] 아래의 그림에 주어진 좌표평면 위의 점 A, B, O, C, D 를 순서쌍으로 나타내면. 각 점은 모두 x-축(수직선) 위의 점으로 y-좌표는 모두 0이 되어
$A(-4,0)$, $B(-2,0)$, $O(0,0)$,
$C(3,0)$, $D(6,0)$
이다.



문제 1 좌표평면 위에서 x-축을 원점 O가 0인 수직선으로 보고 실수 1, 5, 7, -4,

6을 좌표평면위의 x-축 위에 나타내고 각 점을 순서쌍을 사용하여 나타내어라.

문제 2 위의 문제 1에서 생각한 방법을 거꾸로 생각하여 다음 좌표평면에서 x-축 위에 있는 $(a, 0)$꼴의 점을 실수로 표현하여라.



이상으로부터 실수를 수직선 위에 나타내면 수직선 위의 각 점에 하나의 수(실수)가 일대일로 대응하고, 또 수직선을 좌표평면 위에서의 x-축으로 생각하면 실수 a 는 $(a, 0)$ 으로 나타낼 수 있고 $(a, 0)$은 실수 a를 나타냄을 알 수 있다.

따라서, $(a, 0)$을 a, 곧 $(a, 0) = a$로 하기로 한다.

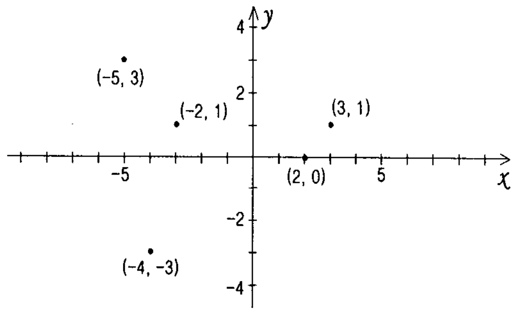
나. 좌표평면과 복소수

좌표평면 위의 점 (a, b) 에서 y-좌표 b가 0인 순서쌍 곧 $(a, 0)$ 은 바로 실수 a를 나타냄을 앞에서 알아보았다. 이제 y-좌표 b가 0 뿐만이 아닌 임의의 수인 좌표평면 위의 점 (a, b) 에 대하여 생각해보자.

[예 3] 순서쌍

$(2, 0)$, $(3, 1)$, $(-2, 1)$, $(-5, 3)$, $(-4, -3)$

을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.

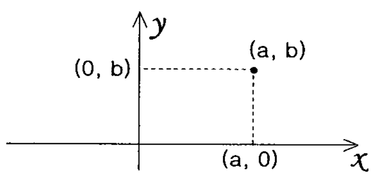


일반으로 두 수 a, b에 대한 순서쌍 (a, b)는 모두 좌표평면 위에 나타낼 수 있고, 좌표평면 위의 점은 두 수 a, b에 대한 순서쌍 (a, b)로 나타낼 수 있다. 위에서 알아본 실수 $(a, 0)$ 은 순서쌍 (a, b) 에서 $b=0$인 특수한 경우임을 알 수 있다.

실수를 나타내는 순서쌍 $(a, 0)$에서 y-좌표 b가 0 뿐만이 아닌 임의의 두 실수 a, b에 대한 순서쌍

(a, b)

를 복소수라고 한다. 실수가 아닌 복소수 (a, b)를 허수라고 하며, 특히 x-좌표 a가 0인 경우의 복소수 $(0, b)$를 순허수라고 한다. 그리고 복소수 (a, b) 에서 a를 실수부분, b를 허수부분이라 한다.



[예 4] 복소수 $(1,0)$, $(-2,0)$, $(-1,4)$, $(0,-3)$, $(0,2)$, $(-2,-5)$, $(0,-4)$중에서 특히 $(1,0)$, $(-2,0)$는 실수이고, $(0,-3)$, $(0,2)$, $(0,-4)$는 순허수이다. 또 $(-1,4)$, $(0,-3)$, $(0,2)$, $(-2,-5)$, $(0,-4)$ 는 모두 허수이다.

[참고] 순허수는 허수 (a, b) 에서 x-좌표 a가 0인 특수한 형태이고, 순허수도 허수이다. 실제로 복소수 (a, b)를 먼저 생각하면 실수 a는 복소수 (a, b)중에서 y-좌표 b가 0인 순서쌍 $(a, 0)$ 인 경우이고, 복소수 (a, b)는 실수 a를 나타내는 순서쌍 $(a, 0)$ 에서 y-좌표 b가 0뿐만이 아닌 임의의 두 수 a, b에 대한 순서쌍 (a, b)로 확장된 수인 것임을 알 수 있다.

문제 3. 실수, 허수, 복소수의 관계에 대한 설명 중 틀린 것을 모두 찾아라.

① 실수는 복소수이다.
② 허수는 실제 존재하지 않는 수이다.
③ 실수와 허수는 모두 복소수이다.
④ 복소수는 모두 실수로 나타낼 수 있다.

문제 4. 실수전체의 집합을 R, 복소수 전체의 집합을 C라 할 때, R과 C를 기호 $\subset$ 또는 $\supset$를 써서 나타내어라.

다. 서로 같은 복소수와 켤레복소수

두 복소수는 서로 같은 순서쌍, 곧 x-좌표는 x-좌표끼리 y-좌표는 y-좌표끼리 서로 같을 때, 두 복소수는 서로 같다고 한다.

두 복소수가 같을 조건

$$(a,\ b) = (c,\ d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d$$

예제 1. 다음 두 복소수가 같은 복소수가 되도록 a, b의 값을 구하여라.

(1) (a - 1, 4) = (3, 2b)
(2) (a +2b, a - 2) = (b, -3)

[풀이] 두 복소수가 서로 같기 위하여는 x-좌표는 x-좌표끼리 y-좌표는 y-좌표끼리 서로 같아야 하므로

(1) $\begin{cases} a-1=3 \\ 4=2b \end{cases}$ 에서 $a=4,\ b=2$

(2) $\begin{cases} a+2b=b \\ a-2=-3 \end{cases}$ 에서 $a=-1,\ b=1$

답 : (1) $a=4,\ b=2$ (2) $a=-1,\ b=1$

문제 5 다음 두 복소수가 같은 복소수가 되도록 a, b의 값을 구하여라.

(1) (a + 1, b -1), (1, 0)
(2) (a - 5, 2b +3), (-2, 5)
(3) (a - b, a + b), (a - 1, b + 1)
(4) (a + 2b, 2a -b), (0, 1)

a, b가 실수일 때. 복소수 (a, b)에 대하여 y-좌표인 허수부분의 수 b를 -b로 바꾸어 놓은 복소수 (a, -b)를 복소수 (a, b) 의 **켤레복소수**라고 하고, 이것을 기호로

$$\overline{(a,\ b)}$$

와 같이 나타낸다. 곧, $\overline{(a,\ b)} = (a,\ -b)$ 이다.

[예 5] 복소수 (2, 5), (-4, -3), (7, 0), (0, -9)의 켤레복소수는 각각 다음과 같다.

$\overline{(2,\ 5)} = (2,\ -5)$
$\overline{(-4,\ -3)} = (-4,\ 3)$
$\overline{(7,\ 0)} = (7,\ 0)$
$\overline{(0,\ -9)} = (0,\ 9)$

문제 6 다음 복소수의 켤레복소수를 구하여라.

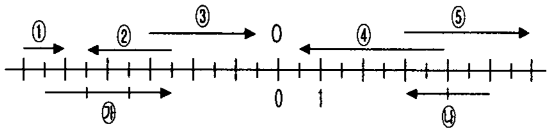
(1) (3, -5), (2) (-5, 3)
(3) (-5, -5), (4) (0, 0)
(5) (1. 1)

중학교에서 실수의 가시적 표현으로 화살표를 사용하였다. 이를테면, 두 수 $+3,\ -2$를

화살표를 사용하여 나타내면 아래 그림과 같다.

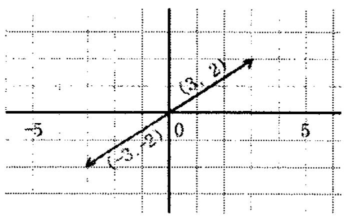
이 때 두 수 +3, −2 는 화살표의 시작점 위치는 어느 곳에서 시작하여 도 관계없고, 단지 길이와 화살표 방향만 관계된다.

[예 5] 다음 화살표에서 ㉮를 +3, ㉯를 −2로 할 때, ①, ②, ③, ④, ⑤ 중에서 +3을 나타낸 것은 ⑤ 이고, −2를 나타낸 ② 이다.

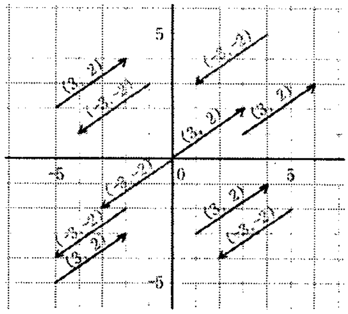


같은 방법으로 복소수도 화살표를 사용하여 나타낼 수 있다.

이를테면, 복소수 (3,2), (−3,−2)를 시작하는 점을 원점 O로 하는 화살표로 나타내면 각각 오른쪽 그림과 같다.



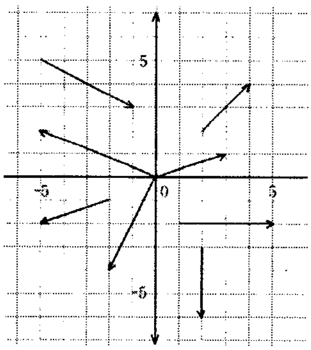
이때, 복소수 (3,2), (−3,−2)도 실수에서와 같이 화살표의 시작점 위치는 어느 곳에서 시작하여도 관계없고, 단지 길이와 화살표 방향만 관계된다.



위에서 복소수 (3,2) 의 반대 수 −(3,2) 는 (−3,−2)임을 알 수 있다.

[참고]실수 a 의 반(대)수는 $-a$ 이다.

문제 7. 오른쪽 그래프에 화살표로 나타낸 복소수를 말 하여라.



2. 복소수의 연산

가. 복소수의 덧셈 뺄셈

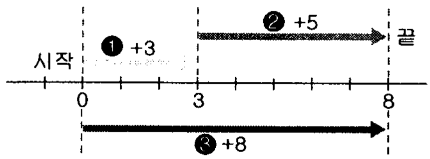
중학교에서 덧셈의 가시적 표현으로 수직선 위에서 두 수의 덧셈은 우선 첫 번째 수를 원점 O에서 시작하는 화살표로 나타내고, 그 끝점에서 시작하는 화살표로 두 번째 수를 나타내어 그 끝점의 수를 두 수의 합 곧,

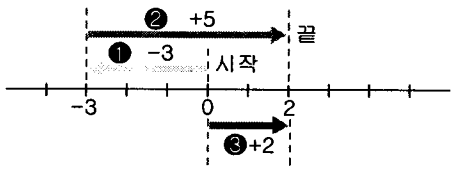
"두 수의 합을 나타내는 화살표는 첫 번째 화살표가 시작하는 점에서 시작하여 두 번째 화살표가 끝나는 점에서 끝나는 화살표로 나타

난다." 는 것으로 배웠다. 이를테면,

$(+3)+(+5)=+8$, $(-3)+(+5)=+2$

은 각각 다음과 같이 나타내었다.





복소수의 덧셈도 위와 같은 방법으로 나타낼 수 있다.

좌표평면 위에서 두 복소수의 덧셈은 우선 첫 번째 복소수를 원점 O에서 시작하는 화살표로 나타내고, 그 끝점에서 시작하는 화살표로 두 번째 복소수를 나타내어 그 끝점의 복소수를 두 복소수의 합 곧,

두 복소수의 합을 나타내는 화살표는 첫 번째 화살표가 시작하는 원점 O에서 시작하여 두 번째 화살표가 끝나는 점에서 끝나는 화살표로 나타난다.

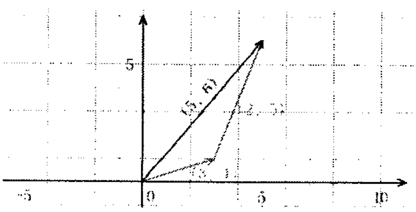
이를테면 두 복소수

(3, 1), (2, 5)

의 합

(3,1) +(2, 5)

은 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



위의 그림에서 두 복소수 (3, 1), (2, 5) 의 합은

(3,1) +(2, 5) = (3 + 2, 1 +5) = (5, 6)

에서 x-좌표는 x-좌표끼리, y-좌표는 y-좌표끼리 서로 더한 것임을 알 수 있다.

문제 1. 다음 두 복소수와 그 합을 좌표평면 위에 화살표를 사용하여 나타내어라.

(1) (3, -4), (-5, 7)

(2) (1,4), (4, 0)

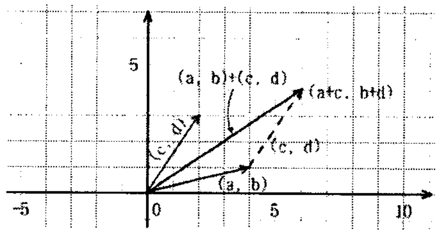
(3) (-3, -2), (-1, -2)

(4) (-5, 2), (6, -4)

일반으로 두 복소수 (a, b), (c, d) 의 덧셈은 각 순서쌍에서 x-좌표는 x-좌표끼리, y-좌표는 y-좌표끼리 서로 더한 순서쌍으로 정한다.

곧

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$$



[예 1] (1) (5, 3) + (12, 8)

= (5 +12, 3 + 8)

= (17, 11)

(2) (-4, 7) + (-5, -2)

= (-4 +(-5), 7 + (-2))

= (-9, 5)

문제 2 다음 계산을 하여라.

(1) (21, -12) + (-12, 12)

(2) (7, 8) + (-8, -7)

(3) (-5, 0) +(-11, -3)

(4) (15, -32) + (-15, 32)

두 복소수의 뺄셈 $(a, b)-(c, d)$은

$(a, b)-(c, d)=(x, y)$

라 놓고, 이 식을 덧셈으로 바꾸면

$(a, b)=(c, d)+(x, y)=(c+x, d+y)$

로 나타내어진다.

따라서

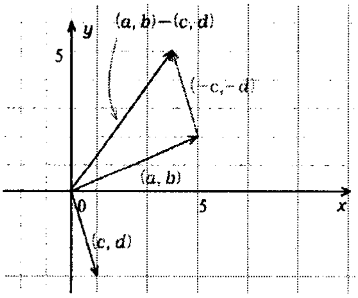
$a=c+x, \ b=d+y$

위 식에서 x, y를 구하면

$x=a-c, \ y=b-d$

이상으로부터, 두 복소수 $(a, b), (c, d)$에 대하여 뺄셈은 다음과 같다.

$$(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d)$$



[예 2] (1) (5, 3) - (12, 8) = (5 -12, 3 - 8)
= (-7, -5)

(2) (-4, 7) - (-5, -2)
= (-4 -(-5), 7 - (-2))
= (1, 9)

문제 3 다음 계산을 하여라.

(1) (21, -12) - (-12, 12)

(2) (7, 8) - (-8, -7)

(3) (-5, 0) - (-11, -3)

(4) (15, -32) - (-15, 32)

[참고] 두 복소수 $(a, b), (c, d)$에서 b와 d가 0인 경우 곧 $(a, 0)$, $(c, 0)$의 덧셈, 뺄셈은

$(a, 0)+(c, 0)$
$=(a+c, 0)$, $(a, 0)-(c, 0)$
$=(a-c, 0)$

에서 각각 두 실수 a, c의 합과 차인 $a+c, \ a-c$를 나타냄을 알 수 있다.

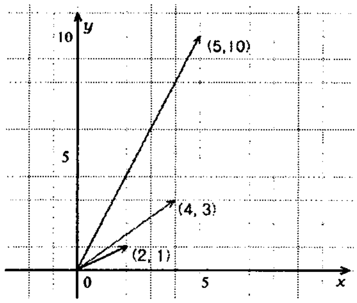
나. 복소수의 곱셈 나눗셈

두 실 수의 곱셈과 같이 복소수의 곱셈을 화살표를 사용하여 나타내어 보자.

이를테면 두 복소수

(2, 1), (4, 3)

의 곱을 나타내는 화살표는 길이가 각 복소수를 나타내는 화살표의 길이의 곱이고, 방향이 복소수 (4, 3)를 나타내는 화살표에 복소수 (2, 1)이 나타내는 화살표가 x-축과 이루는 각 만큼 더해서 그린 오른쪽 그림과 같이 그린 화살표이다.



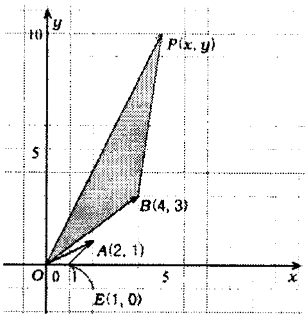
이 때 곱을 나타내는 화살표는 복소수 (5, 10)이고, 이것은 (2, 1), (4, 3)의 x-좌표, y-좌표에 대하여

(2×4 − 1×3 , 2×3 + 1×4)

와 같은 계산에서 나온 것임을 밝힐 수 있다.

[참고] 위의 그림에서 복소수 (5, 10)은 세 점 O(0, 0), E(1, 0), A(2, 1)을 꼭지점으로 하는 $\triangle OEA$와 세 점 O(0, 0), B(4, 3), P(x, y)를 꼭지점으로 하는 닮은 삼각형

$\triangle OBP$를 오른쪽 그림과 같이 그리면 P(x, y)는
바로 $P(2\times4-1\times3,\ 2\times3+1\times4)$임을 밝힐 수 있다.

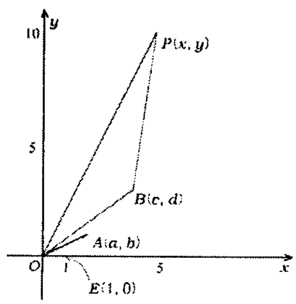


일반으로 두 복소수 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$에 대하여 곱셈은 다음과 같이 정한다.

$$(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ bc+ad)$$

[참고] 복소수 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$의 곱 $(a,\ b)(c,\ d)$는 오른쪽 그림에서 삼각형 $\triangle OEA$ 와 닮은 삼각형 $\triangle OBP$의 꼭지점 P 의 좌표 $(x,\ y)=(ac-bd,\ bc+ad)$로 나타내어지며, 이 좌표는 다항식의 전개에서와 같이 다음과 같은 방법으로 생각하여 기억하면 편하다.

ac−bd
(a, b) (c, d)
bc+ad



[예 3] (1) (5, 3)(12, 8)
= (5×12 - 3×8, 3×12 +5×8)
= (36, 76)

(2) (-4, 7)(-5, -2)
= ((-4)×(-5) - 7×(-2), 7×(-5) +(-4)×(-2))= (34, -27)

문제 4 다음 계산을 하여라.

(1) (21, -12)(-12, 12)
(2) (0, 8)(0, -7)
(3) (-5, 0)(-11, 0)
(4) (15, -32)(-15, 32)

위와 같은 곱셈 정의에 의하면 두 실수 a, b의 곱은
(a, 0)(b, 0) = (a×b - 0×0, 0×b +a×0)
= (a×b, 0)
이 됨을 알 수 있다.

문제 5 다음 계산을 하여라.

(1) (3, 0)(-5, 0)
(2) (-2, 0)(-9, 0)

[예제 1] 다음 계산을 하여라

(1) (0, 1)(a, b)
(2) (b, 0)(0, 1)

풀이 ; (1) 복소수 (0, 1)과 임의의 복소수 (a, b)에 대한 곱으로
(0, 1)(a, b)
= (0×a - 0×b, 1×a +0×b)
= (-b, a)

(2) 실수 b와 복소수 (0, 1)의 곱으로
(b, 0)(0, 1)
= (b×0 - 0×1, 0×0 +b×1)
= (0, b)

답 : (1) (-b, a) (2) (0, b)

문제 6 다음 계산을 하여라.

(1) (a, b)(0, 1)　　(2) (0, 1)(b, 0)

x-좌표 a가 0인 경우의 순허수 $(0, b)$에서 특히 y-좌표가 1인 (0, 1)을 i 로 나타내기로 한다. 곧,

$$i = (0, 1)$$

이 때, i 를 허수단위라고 한다.

[참고] (1, 0)은 실수 1로 실수에서 단위를 나타내는 수이다.

실수 1에 대하여 1^2, 곧 $(1, 0)^2$을 구하면

$(1, 0)^2 = (1, 0)(1, 0)$

$= (1\times1 - 0\times0,\ 0\times1 + 1\times0) = (1, 0) = 1$

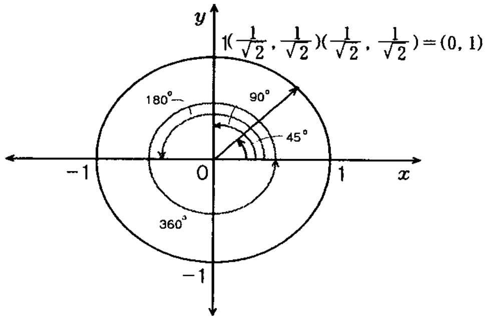
에서 $1^2 = 1$임을 알 수 있다. 한편 허수단위 i에 대하여 i^2, 곧 $(0, 1)^2$을 구하면

$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1)$

$= (0\times0 - 1\times1,\ 1\times0 + 0\times1) = (-1, 0) = -1$

에서 $i^2 = -1$임을 알 수 있다. 따라서 복소수 (0, 1), 곧 i는 -1의 한 제곱근으로 생각할 수 있다.

[예 4] 화살표를 사용한 복소수의 곱을 오른쪽 그림에서 살펴보면, 복소수 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$의 제곱은 (0, 1)임을 알 수 있다. 곧 제곱을 하여 i가 되는 복소수는 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$이다.



문제 7 위의 예 4의 그림을 보고 다음을 구하여라.

(1) $(0, 1)^2$　　(2) $(-1, 0)^2$

(3) $(0, -1)^2$

이제 위의 예제 1에 의하면 (0, b) = (b, 0)(0, 1)에서 임의의 복소수 (a, b)는

(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)

로 나타낼 수 있다. 여기서 복소수 (a, b)는 실수 (a, 0) = a와, 그리고 실수 (b, 0) = b와 복소수 (0, 1) $= i$ 의 곱인 (b, 0)(0, 1) $= bi$ 의 합으로 이루어진 것이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(a, b) = a + bi$$

[참고] (0, 1)(b, 0) = (b, 0)(0, 1)에서 (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)이므로 (a, b) = a + i b 로 나타내어도 된다. 또, (a,b) 의 켤레복소수 $\overline{(a, b)}$는 $\overline{(a,b)} = \overline{a+bi} = a - bi$로 나타내어진다.

문제 8 다음의 복소수 중에서 순서쌍 (a, b) 꼴로 나타내어진 것은 a + bi 꼴로 나타내고, a + bi 꼴로 나타내어진 복소수는 순서쌍 (a, b) 꼴로 나타내어라.

(1) (1, 1), (2, -3), (-3, 5), (-2, -6), (7, 0), (0, -4)

(2) 2 + i, -1 - i, -4 +3i, -5, 3i, 0

[참고] 두 복소수 z_1 = (a, b), z_2 = (c, d)를 z_1 = a + bi, z_2 = c + di 로 하여 a + bi, c + di 를 각각 i 에 관한 일차다항식

으로 보고 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 하면 다음 과 같다.

$z_1 + z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$,

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$

$= ac + adi + bic + bidi$

$= ac + (ad + bc)i + bdi^2$

$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

따라서, $z_1 + z_2 = (a + c,\ b + d)$, $z_1 - z_2$

$= (a - c,\ b - d)$, $z_1 \cdot z_2$

$= (ac - bd,\ ad + bc)$ 이다.

문제 9 다음 두 복소수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 위의 [참고]에서와 같이 i 에 관한 일차다항식으로 보고 하여라.

(1) $(2 + 3i)$, $(-5 + 4i)$

(2) $(2 + 3i)$, $(-5 + 4i)$

두 복소수의 나눗셈 $(a, b) \div (c, d)$ 는 우선 $(a, b) \div (c, d) = (x, y)$라 놓고,

이 식을 곱셈으로 바꾸면

$(a, b) = (x, y)(c, d) = (cx - dy,\ cy + dx)$

로 나타내어진다. 따라서 두 복소수가 같을 조건으로부터

$a = cx - dy, \quad b = cy + dx$

이다. 이 때, $c^2 + d^2 \neq 0$ 이면

$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

이다. 이상으로부터 두 복소수의 나눗셈 $(a, b) \div (c, d)$ 는 다음과 같다.

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

문제 10 다음 나눗셈을 하여라.

(1) $(1, 2) \div (4, 3)$

(2) $(-3, 4) \div (-5, -2)$

[참고] 두 복소수 $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ 를 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ 로 하여

$a + bi$, $c + di$ 를 각각 i 에 관한 일차다항식으로 보고 나눗셈을 하면 다음과 같다.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

따라서, $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}, \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}\right)$이다.

문제 11 다음의 나눗셈을 위의 [참고]에서와 같이 i 에 관한 일차다항식으로 보고 하여라.

(1) $(3 + 3i) \div (5 - i)$

(2) $(2 + 3i) \div (-5 + 4i)$

V 지도의 실제

학습 지도는 고등학교 1학년 학생 중에서 2개 학급이며 A반(35명)은 기존의 교과서에서 도입하는 방법을 그대로 수업으로 진행하고 실험반으로 잡은 B반(35명)은 순서쌍으로 복소수를 도입하여 문자 i를 이용한 표현으로 바꾸어 쓸 수 있게 하는 과정을 지도하여 두 반을 서로 비교 분석해 보았다.

우선 복소수를 도입하기 전에 두 반 학생들 모두에게 이차방정식 $x^2 - 1 = 0$ 의 해를 구할 수 있는지 평가하여 보았는데, 바르게 답을 한 학생은 A반 12명(34.4%), B반 14명(40%)으로 학생들의 수준은 중 하위에 속하는 경우이고 두 반 학생들의 학력 편차는 크지 않은 것으로 생각된다. 이 평가의 목적은 학생들이 실수범위 내에서 이차방정식을 해결할 수 있는지를 알아보는 것은 물론이고, $x^2 = -1$ 을 만

족하는 수, 곧 제곱하여 -1 이 되는 수를 생각하여 복소수를 도입한 기존의 방법과 순서쌍으로 복소수를 도입하였을 때, 이차방정식을 해결하지 못하는 학생들이 복소수의 이해를 어느 정도 할 수 있는지 알아보고자 한 것이다 ,

그런데 실제의 수업에서 기존의 방법인 $x^2 = -1$ 을 만족하는 수, 곧 제곱하여 -1 이 되는 수를 생각하여 복소수를 도입한 경우에는 우선 이차방정식에 대한 거부감으로 일부 학생들이 별 반응이 없이 수업이 진행되었는데, 이에 반해 실수의 확장 개념으로 실수를 순서쌍 (a, 0) 로 생각해보도록 하면서 더 확장된 수를 생각해보도록 수업을 진행한 반에서는 임의의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 의문과 호기심을 보이면서 많은 관심을 갖고 수업에 임하는 것을 알 수 있었다.

그리고 학습내용을 진행하면서 A, B 두 반 모두의 학습 내용에 있는 다음 문제로 학생들의 복소수에 대한 이해정도를 알아보았다.

문제 3. 실수, 허수, 복소수의 관계에 대한 설명 중 틀린 것을 모두 찾아라.
① 실수는 복소수이다.
② 허수는 실제 존재하지 않는 수이다.
③ 실수와 허수는 모두 복소수이다.
④ 복소수는 모두 실수로 나타낼 수 있다.

문제 4. 실수전체의 집합을 R, 복소수 전체의 집합을 C 라 할 때, R 과 C 를 기호 $\subset$ 또는 $\supset$ 를 써서 나타내어라.

우선 문제 3 에 대하여는 정답을 한 학생이 A 반의 경우 10명(28.6%), B 반의 경우 11 명(31.4%)으로 두 반 거의 비슷하였다. 그러나 문제 4 의 경우에는 정답을 한 학생이 A 반의 경우 13명(37.1%), B 반의 경우 24 명(68.6%)으로 B 반 학생들의 성취도가 높음을 알 수 있었다. 여기서 이차방정식을 해결하지 못한 A반의 학생 수와 오답 학생 수가 비슷하게 조사되었다는 것을 생각해보면, 이차방정식을 이해하지 못한 학생은 기존의 방법으로 지도할 경우 대부분 복소수에 대하여도 이해하지 못하는 것으로 판단된다. 반면에 순서쌍으로 지도한 B반에서는 문제 4 에서 방정식을 이해하지 못한 학생 중에서도 최대 10명은 복소수를 이해하였음을 알 수 있다. (이 경우 유의수준 1% 로 t-검정을 한 결과 기각역은 t >2.66 이고, 이 자료에서 구한 t 값은 2.73 이므로 유의수준 1% 에서 실험반의 정답률이 비교반 보다 매우 유의적으로 높다고 판단할 수 있다.) 이것은 이와 같이 이차방정식을 풀지 못한 학생도 순서쌍으로 복소수를 도입하였을 경우 다수의 학생이 복소수를 이해할 수 있었음을 알 수 있었다. 특히 이차방정식을 이해하지 못한 A 반의 학생은 i 가 곱해진 형태의 수 만 복소수이며 그렇지 않은 것은 복소수가 아니라는 엉뚱한 생각을 하고 있었다. 이를테면 $3,\ -2,\ 5i,\ 3-i$ 에서 $5i,\ 3-i$ 만 복소수이고 $3,\ -2$ 는 복소수가 아니라고 생각하고 있는 것이다. 이와 같은 오류는 현행교과서의 방법대로 학습한 학생들이 범하기가 쉬운 것임을 알 수 있다.

복소수의 덧셈, 뺄셈에 대한 이해 정도만을 알아보기 위하여 검증으로 다음의 문제를 사용하였다.

문제 1. A반 : $(2+2i)+(-1-3i)$,
B반 : $(2,2)+(-1,-3)$

문제 2. A반 : $(-1-5i)-(4+7i)$,
B반 : $(-1,-5)-(4,7)$

그 결과 A, B 두 반에서 정답을 한 학생들

은 덧셈에 대하여는 A반 B반 모두 30명(85.7%)이었고, 뺄셈에 대하여는 정답을 한 학생이 A반의 경우 28명(80%), B반의 경우 30명(85.7%)으로 큰 차이가 없었다.

따라서 덧셈, 뺄셈의 지도는 현행교과서의 방법과 차이가 별로 없는 순서쌍을 사용한 지도 도 가능한 것임을 알 수 있다.

또 곱셈과 나눗셈에 대하여는 다음과 같은 문제를 사용하였다.

문제 3. A반 : $(4+6i)\cdot(3+2i)$,

B반 : $(4,6)\cdot(3,2)$

문제 4. A반 : $\frac{(1+3i)}{(-2+i)}$,

B반 : $\frac{(1,3)}{(-2,1)}$

이 경우에, B반에서는 특히 순서쌍과 그리고 순서쌍 (0, 1)을 문자 i 로 나타내어 사용한 복소수를 모두 학습하였으므로 직접 비교할 수는 없었지만 B반의 학생들의 계산 능력이 A반 보다 약간 좋은 것으로 나타났다.

이상으로부터 실제 두 학급을 지도한 결과에서는 계산의 능력에 있어서 큰 차이가 없었음을 알 수 있었으며, 따라서 고등학교 과정에서 복소수를 순서쌍으로 도입하는 것은 큰 무리가 없다고 생각되었다.

특히 현행 교과서에 따라 복소수 학습지도를 끝낸 학생들에게 복소수의 순서쌍 표현에 대하여 추후로 지도를 하여 보았는데 거의 모든 학생들이 관심이 없었고, 학습 후 복소수를 순서쌍으로 표현하는 문제와 순서쌍을 사용하여 연산을 하도록 하는 문제를 평가하여보았더니 그 결과도 좋지 않았다. 이 상황을 학생들의 입장에서 살펴보면 한번 학습하여 인식된 학습내용을 또 다시 다른 방법으로 다시 인식하는 것을 번거롭게 생각하고 있으며, 따라서 처음에 학습하는 내용이 같은 내용의 다른 방법 학습 보다 학습 내용 인식에 큰 영향을 미침을 알 수 있었다. 이것은 새로운 학습 내용의 도입 방법이 후속학습에 미칠 영향을 충분히 고려하여 학습 내용의 도입 방법을 결정해야 함을 일깨워 주는 것이다.

끝으로 복소수 도입의 수업에 대한 두 반의 학습 분위기에 대하여 정리하면 다음과 같다.

A 반의 경우에는 이차 방정식의 해로부터 복소수 도입을 시도함으로써 선수학습 곧 이차 방정식에 대한 이해가 제대로 되지 않은 학생들은 도입 단계부터 별 반응(관심)이 없었다. 그리고 학습에 따라오는 학생들도 산술적인 계산은 잘 이해하고 있으나 현실에서는 없는 수로만 인식하여 실제는 사용할 수 없는 수로 인정하면서 인위적인 학습내용으로 취급하여 다른 내용으로의 연계지도가 어려웠다.

한편 B 반의 경우에는 대개의 학생들이 수의 확장 과정에 흥미 있는 반응을 보였으며, 도입과정에 자발적인 학습 상황을 보였다. 그리고 좌표평면 위에 실수와 일반적인 경우로 복소수를 표현하는 것에 대해 신기해했으며, 그 활용에 호기심을 나타내기도 하였다. 특히 가시적 표현에 따른 수체계의 연계에 대하여 흥미를 보였으며, 따라서 계산 과정의 체계적인 가시적 전개에 따른 활용도 자연스럽게 이루어졌다. 곱셈의 가시적 표현에 대하여 어려움을 가졌지만 그래도 가시적 체계에 대하여 많은 흥미를 나타내었으며 나름대로 참여하여 이해하려고 하였다. 이상으로부터 좌표평면 위에 가시적 표현을 사용한 복소수체계의 지도는 학생들의 학습에 대한 동기유발과 흥미를 찾을 수 있게 하여 학습이 진지하게 이루어졌으며, 사고력 증진과 창의력을 키우는 태도를 갖게 함에 효과적임을 알 수 있었다.

Ⅵ 결론 및 제안

고등학교 1학년 과정에서 복소수는 이차방정식의 해를 구하는 문제에서 제곱해서 -1이 되는 수를 생각하여, 그 수를 문자 i로 하여 도입하고 있다. 이렇게 새로운 수로 문자 i를 수라고 하여 사용하는 것은 그 동안 수와 문자를 다르게 구분하여 생각해왔던 학생들을 혼란스럽게 할 뿐만 아니라, 더욱이 이차방정식을 이해하고 있지 못하는 학생들에게는 그 도입과정이 무의미하여 아예 학습에 관심조차 미약하였다.

이에 본 논문은 좌표평면의 순서쌍과 화살표를 사용한 가시적 표현을 사용하여 고등학교 1학년 과정에서 보다 바람직한 복소수의 도입과 지도 내용을 개발하였고, 그 내용에 따라 다음과 같은 지도를 하였다.

우선 이미 중학교 과정에서 학습한 내용의 복습으로, 실수와 수직선 위의 점의 일대일 대응 관계로부터 실수의 한 가시적 표현인 수직선(일차 공간) 위에는 실수 이외의 다른 수를 더 나타낼 수 없음을 상기시켜서, 복소수의 한 가시적 표현을 위해서는 한 수직선 이외의 것이 필요함을 생각하도록 하였다. 이에 그 확장으로 좌표평면(이차 공간)을 생각하여 복소수는 좌표평면 위의 순서쌍으로 나타낼 수 있고, 실수에서와 마찬가지로 이들을 화살표를 사용하여 나타낼 수 있음을 이해하게 하였다. 그리고 연산에서는 초등학교, 중학교 과정에서 화살표를 사용한 가시적 표현이 체계적으로 확장되는 과정을 이해하게 하고, 그 확장의 한 과정으로 화살표를 사용한 가시적인 표현으로 복소수의 연산도 이해할 수 있게 하였다.

특히 복소수 (0, 1)은 제곱하면 (-1, 0), 곧 실수 -1이 됨을 보여 이 수를 바로 i로 나타냄을 알게 하였다. 그리고 이 i를 사용하면 복소수 (a, b)가 바로 복소수 $a+bi$로 나타내어짐을 이해하게 하여 그 활용을 할 수 있게 하였다.

위와 같은 전개 과정에 따른 내용으로 지도한 학급과 그리고 현행 교과서의 내용으로 지도한 학급과 비교하여 본 결과는 다음과 같았다.

우선 본 논문의 개발 학습 내용으로 학습한 학급의 학생들이 학습내용에 대한 흥미와 동기유발이 현행 교과서의 내용으로 지도한 학급과 비교하여 보다 높았다.

그리고 학습 결과를 평가하여 본 결과도 순서쌍과 화살표를 사용하여 지도한 학급이 현행 교과서의 학습 내용으로 지도한 학급 보다 나쁘지 않았다.

이상으로부터 고등학교 과정에서 복소수의 지도는 좌표평면의 순서쌍과 화살표를 사용한 도입이 가능함을 알 수 있었고, 그 방법이 이차방정식의 풀이과정을 사용한 현행 도입 방법보다 못하지 않은 방법임을 알 수 있었다.

실제로 복소수의 순서쌍 취급은 후속 학습에도 많은 도움을 줄 수 있는 것이므로, 고등학교 과정에서 가능한 경우에 순서쌍을 사용한 복소수의 도입은 바람직한 것으로 생각한다.

특히 제 7차 교육과정에서는 제 6차 교육과정의 수학 Ⅱ에서 다루던 복소평면, 복소수의 극형식, … 등을 다루지 않고 있으므로 학생들이 복소수와 좌표평면위의 순서쌍과의 관계를 알 아 볼 기회가 없다. 그러나 복소수를 본 논문에서와 같이 순서쌍으로 도입한 후 문자 i(허수)와의 관계도 논문의 내용에서와 같이 학습하게 한다면, 극형식까지는 아니라도 좌표평면과의 관계와 그 이해에 따른 학습 내용에 도움을 줄 수 있는 이점이 있을 것이다.

따라서 제 10단계에서의 현행 방법에 의한 복소수의 도입은 재고 되어야하며, 앞으로 연

계될 후속 학습 내용들을 위해서도 복소수의 도입은 좌표평면을 사용한 순서쌍으로 도입하여 활용할 것을 제안한다. 그리고 앞으로 이 분야의 학습 내용의 보다 향상된 개발을 위하여 많은 연구가 계속되어야 할 것이다.

참고문헌

강행고외 6인(2002). **고등학교 수학 10-가**, 동화사.

교육부(1997). **수학과 교육과정(제 7차 교육과정)**. 교육부.

김홍기 외 1인(2006). 제 7-단계 수학에서 양·음수의 지도에 관한 연구, **학교수학**, 8(1).

박규홍외 3인(2001). **고등학교 수학 10-가**, (주)교학사.

박두일외 8인(2001)., **고등학교 수학 10-가**, (주)교학사.

박배훈외 4인(2002). **고등학교 수학 10-가**, 법문사.

박세희외 3인(2002). **고등학교 수학 10-가**, 동아서적(주)

박윤범외 5인(2001). **고등학교 수학 10-가**, 대한교과서(주).

박을용외 6인(1990). **수학대사전, 한국사전연구원**.

신현성외 1인(2001). **고등학교 수학 10-가**, (주)천재교육.

양승갑외 8인(2001). **고등학교 수학 10-가**, (주)금성출판사.

우정호외 3인(2001). **고등학교 수학 10-가**, 대한교과서(주).

이강섭외 6인(2001). **고등학교 수학 10-가**, 지학사

이광복외 3인(2002). **고등학교 수학 10-가**, (주)청색.

이방수외 1인(2001). **고등학교 수학 10-가**, (주)천재교육.

임재훈외 7인(2001). **고등학교 수학 10-가**, (주)두산.

장건수외 4인(2002). **고등학교 수학 10-가**, 지구문화사.

최봉대외 6인(2001). **고등학교 수학 10-가**, (주)중앙교육진흥연구소.

최상기외 3인(2001). **고등학교 수학 10-가**, (주)고려출판.

E. P. Keenan. et al.(1999), Integrated mathematics(course Ⅲ), AMSCO School Publications, Inc.

Jerrold E. Marsden(1973), Basic Complex Analysis, W. H. Freeman and Company.

L.L Pennisi, et al. (1967), Elements of complex variables, Holt, Rinehart and Winston

G. R Rising, et al.(1991), Unified Mathematics(Book 3), Houghton Mifflin Company / Boston

On Teaching of Complex Numbers in 10-th Grade Mathematics

Kim, Heung Ki (Dankook university)
Lee, Chong Cheol (Dankook university, Student)

As a result of observing the 10-th grade text books on mathematics now in use which show the way of introducing complex numbers for the first time, it is easy to see all the text books on mathematics use a quadratic equation $x^2+1=0$ for a new number i. However, Since using the new number i is artificial, this make students get confused in understanding the way of introducing complex numbers. And students who have problems with the quadratic equation can also have difficulty in understanding complex numbers. On the other hand, by using a coordinate plane with ordered pairs and arrows, students can understand complex numbers better because the number system can be extended systematically through intuitive methods. The problem is that how to bring and use ordered pairs and arrows to introduce complex numbers in highschool mathematics. To solve this problem, in this study, We developed a systematic and visible learning contents which make it possible to study the process of the step-by-step extension of number system that will be applied through elementary and middle school curriculum and all the way up to the introduction of complex numbers. After having applied the developed learning contents to the teaching and learning procedure, we can know that the developed learning contents are more efficient than the contents used in the text books on mathematics now in use.

* key words : complex number(복소수), number system(수 체계), coordinate plane(좌표평면), ordered pair(순서쌍), arrow(화살표)

논문접수 : 2007. 5. 15
심사완료 : 2007. 5. 22