대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.2, 277-289. Jun. 2007

입체도형에 대한 6~7학년 수학영재들의 공간시각화 능력 분석[1)]

류 현 아* · 정 영 옥** · 송 상 헌**

본 연구는 수학영재들의 공간 시각화 능력을 살펴보는데 그 목적이 있다. 연구 대상은 국가가 지원하는 대학부설 과학영재교육원에서 교육을 받고 있는 초등학교 6학년 6명과 중학교 1학년 1명으로, 각 학생들에게 정이십면체의 겨냥도에서 각 변과 모서리들의 길이, 변과 모서리들이 이루는 각도들을 비교하는 과제를 제시하여 그들이 해결하는 과정에서 드러나는 공간 시각화 능력을 질적인 방법으로 분석하였다. 이 때 자료 분석은 McGee의 공간 시각화 능력을 중심으로 Duval과 Del Grand의 이론을 참조하였다. 분석 결과, 수학영재학생들은 윤곽을 시각화하는 능력, 상상 속에서 대상을 조작하는 능력, 묘사된 대상의 회전을 상상하는 능력, 묘사된 대상을 다른 형태로 변형하는 능력을 보이는 보였으며, 일부 수학영재학생들은 평면에 묘사된 대상을 다시 입체로 상상해 내고 이를 표현해내는 데 다소 어려움을 겪고 있다는 것을 알 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

Freudenthal(1973)은 '기하 교육의 목표는 단순히 도형에 대한 탐구만이 아니라 학생들이 이 세상에서 더 풍요롭게 생활하고, 호흡하고, 활동하기 위해 알아야 하고, 탐구하고, 정복해야 할 공간에 대한 파악'이라고 하면서 기하에서 공간에 대한 이해를 강조하였다.

이와 관련하여 공간에 대한 이해에 중요한 공간 능력에 관한 많은 연구들이 이루어져 왔다(McGee, 1979; Hershkowitz, 1990; Clements, 1981; Clements, 1983; Clements, 1999; Clements & Battista, 1992; Gutierrez, 1996). 이런 연구들은 공간 능력을 구성하고 있는 요인으로 공간 관계, 공간 시각화, 공간 방향 등을 제시하고 있다.

이런 공간 능력의 요인 중에 무엇보다도 공간 시각화는 이미 오래 전부터 강조되어 왔는데 Yakimanskaya(1971)에 의하면 소련 수학자들은 기하에서 공간적 사고의 중요성을 강조하면서 시각화를 추상적인 기하 지식과 개개의 개념들을 동화시키기 위한 기초로 보고 특히 공간 시각화 능력을 강조하였다. 또한 Fischbein (1987)은 시각적 이미지에 따라 생각하며 시각적으로 상상할 수 없다면 정신적으로 인식하는 것은 어렵다는 것을 강조하였고, Herschkowitz (1990)는 시각화는 그 자체로서 중요하지만 그와 관련된 정신적 과정이 수학의 다른 분야에서도 필요하고 전이될 수 있으며, 특히 기하에

* 건국대학교대학원(ryuha29@naver.com)
** 경인교육대학교(yochong@gin.ac.kr, shsong@gin.ac.kr)
1) 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

서는 더욱 중요함을 강조하고 있다. 한편 전미수학교사협의회(NCTM, 2000)에서는 기하에 관련된 최근의 연구 결과들을 반영하여 공간에 대한 이해의 중요성을 강조하면서 공간 시각화를 기하 규준의 하나로 제시하고 있다. 따라서 공간 시각화 능력은 기하뿐만 아니라 수학 전반에 걸쳐 중요한 기초 능력이라고 볼 수 있다. 그러나 공간 시각화에 관련된 우리나라 학생들을 대상으로 하는 연구도 부족하지만, 특히 수학영재학생들을 대상으로 하는 연구는 거의 찾아보기 어렵다.

이에 본 연구는 공간 시각화 능력에 관한 연구의 일환으로 2차원 평면에 표현된 3차원의 대상인 입체도형을 정신적으로 조작하거나 회전하여 관련된 구성 요소들을 구별해내는 한 가지 과제를 통해 특별히 초등수학영재들의 공간 시각화 능력을 분석하고자 한다.

II. 공간 능력과 공간 시각화

공간 능력에 대한 정의는 연구자마다 다양한데, 몇몇 관점을 살펴보면 다음과 같다. 우선 Lohman은 공간 능력을 '추상적인 공간 이미지를 생성하고, 유지하고, 교묘하게 다룰 수 있는 능력(Clements, 1981)'으로 정의하고, 하위 요인을 공간 관계, 공간 시각화, 공간 방향화로 구분하였다. McGee(1979)는 공간 능력을 '그림 상으로 제시된 대상을 마음속으로 조작하거나, 회전하거나, 방향을 바꾸는 능력으로 주어진 대상을 정신적 이미지에 의하여 회전시키거나 재배열 혹은 조합시키는 능력'으로 정의하고, 그 하위 요인으로 시각화와 방향화를 제시하고 있다. 이는 Clements(1981)와도 일치한다.

또한 Linn & Peterson(1985)은 공간 능력을 '주어진 공간적 정보를 머릿속에서 가시화하여 그려볼 수 있는 능력'이라고 정의하고, 그 하위 요인을 공간 지각, 공간 회전, 공간 시각화로 구분하였다. 특히 Del Grande(1987)는 공간 지각을 '공간에서 또는 공간으로부터 자극을 인식하고 변별하며, 이전의 경험과 관련시켜서 그 자극을 해석하는 능력'이라 하고, 그 하위 영역을 7가지, 즉 ① 몸의 움직임과 시각을 상호 조정하는 능력, ② 교차하거나 숨겨진 모양이 있는 복잡한 배경에서 도형을 지각하는 능력, ③ 대상의 표면적인 인상이 달라도 모양이나 크기 등 불변인 속성을 인지하는 능력, ④ 공간 대상과 자신을 연결하는 능력, ⑤ 2개 이상의 대상들을 대상 중 하나와의 관계로, 또는 대상들 상호간의 관계로 보는 능력, ⑥ 대상들의 유사점과 차이점을 구별하는 능력, ⑦ 보지 않고 대상을 정확하게 회상하는 능력, 보거나 보지 않으면서 그 대상의 특징을 다른 대상의 특징과 연결하는 능력으로 보고 있다.

이와 같은 공간 능력에 관한 정의를 종합하면, 어떤 대상을 시각적으로 지각할 수 있거나 그렇지 않을 때에도 그것에 관한 이미지를 정신적으로 생성하고 그것을 회전하고, 방향을 바꾸고, 재배열 하는 등 다양한 방법으로 조작할 수 있는 능력이라 할 수 있다. 이 때 공간 능력을 구성하는 요인은 다양하지만, 공간 시각화가 공간 능력에서 중요한 요인으로 작용하고 있음을 알 수 있다.

이런 공간 시각화의 의미를 좀 더 구체적으로 살펴보면, Lohman은 공간 시각화를 '종이 접기나 전체적인 형태를 완성시키기 위하여 한 대상물의 조각들을 마음속에서 재배열하는 능력'으로 정의하였다(Clements, 1983).

Gutiérrez(1996)는 Yakimanskaya, Dreyfus, Presmeg에 의해 정의된 공간적 사고, 시각적 심상, 시각화를 동등한 것으로 간주하였고, 수학에서 시각화를 '정신적이든 물리적이든 시각적

또는 공간적 요소에 기초한 일종의 추론 활동'으로 정의하였다. 이 때 Yakimanskaya의 공간적 사고는 공간 이미지를 생성할 수 있고 각종 실제적이고 이론적인 문제를 해결하는 과정에서 그것들을 조작할 수 있는 정신적 활동의 형태이다. 여기서 공간 이미지는 공간 관계에 대한 지각적인 인식으로부터 생성되며, 그것은 도형, 영상, 그림, 윤곽 등의 다양한 그래프 형식으로 표현될 수 있다. 그러므로 공간 시각화에서 공간 이미지 생성과 외적 표현 사이의 상호작용이 중요하다.

이런 관점을 종합하면 공간 시각화는 도형이나 그림 등으로 제시된 대상을 정신적으로 회전시키거나 재배열하여 시각적 또는 공간적 이미지를 생성하는 것으로 볼 수 있다.

공간 시각화의 의미뿐만 아니라 이를 구성하는 하위 요인도 연구자의 관점에 따라 다소 다르게 해석될 수 있다. 그 중 McGee(1979)는 Humphreys에 의해 시작된 요인 분석 연구들로부터 공간 능력의 존재를 설명하고, Guilford & Lacey의 AAF 테스트 분석 결과 나타난 두 가지 공간 요인, 즉 공간 시각화, 공간 방향화 로부터 공간 능력을 시각화와 방향화로 구별하였다. 더 나아가 Thurstone, French등의 연구들로부터 공간 시각화의 하위 요인을 ① 윤곽의 내부 사이를 움직이는 윤곽을 인지하고, 유지하고, 연상하는 능력, ② 3차원 공간에서 상상의 움직임을 인지하거나 상상 속에서 대상을 조작하는 능력, ③ 공간에서 대상의 위치 변화의 관계를 상상하는 능력으로 플랫 패턴을 접거나 펴는 능력 또는 묘사된 대상을 회전하는 능력, ④ 공간 패턴의 이미지를 다른 배열로 조작하거나 변형하는 능력으로 구분하고 있다.

한편, Duval(1998)은 기하에서 도형을 해석하는 관점에 따라 시각화에서 나타나는 세 가지 변화, 즉 차원의 변화(dimensional change), 고정의 변화(anchorage change), 도형의 변화(figural change)에 대하여 설명하였다. 어떤 대상을 바라볼 때, 차원의 변화가 가장 분명하게 나타나는데, 그것은 공간 기하에서 관련된 것들을 구별해내기 위해 입체에서 서로 다른 평면 부분을 구별하는 것이 먼저 필요하기 때문이다. 고정의 변화는 예를 들면, 한 사각형 ABCD가 제시되었을 때 'ABCD는 평행사변형이다.'라고 하는 것과 'ABCD를 평행사변형이라 하자.'라고 했을 때 그 도형의 형태를 시각화하는 것의 차이이다. 도형의 변화는 주어진 대상을 변화시켜 조작적으로 이해하는 것과 같다. 이것은 주어진 도형에서 몇 개의 도형으로 발전시킬 수 있으며, 그 중 하나는 해답을 위한 통찰을 제공해 줄 수 있다.

본 연구의 과제는 2차원에 제시된 3차원 대상을 정신적으로 조작하거나 회전시키고 또는 방향을 바꾸어 생각했을 때, 해결이 가능한 것이다. 공간 능력을 그림 상으로 제시된 대상을 마음속으로 조작하거나, 회전하거나, 방향을 바꾸는 능력으로 주어진 대상을 정신적 이미지에 의하여 회전시키거나 재배열 혹은 조합시키는 능력으로 정의한 McGee의 공간 시각화 요인이 본 연구의 과제를 해결하는 데 있어서 필수적인 능력이라 볼 수 있다. 한편 공간 기하의 3차원 대상을 2차원으로 표현한 것에서 평면을 규명하는 것은 공간상의 기하적 표현에서 맨 처음 해야 하는 단계로 매우 중요한 문제이다 (Rommevaux, 1997). 다시 말해, 공간 기하의 입체도형에서 관련된 것들을 구별하기 위해 가장 먼저 필요한 것은 서로 다른 평면 부분을 구별하는 것이다. 한편 2차원에 제시된 3차원 대상을 파악하기 위해서는 교차하거나 숨겨진 모양이 있는 복잡한 배경에서 도형을 지각하는 능력, 대상의 표면적인 인상이 달라도 모양이나 크기 등 불변인 속성을 인지하는 능력 등 공간

지각력이 필요하다. 따라서 이 과제는 McGee의 공간 시각화 요인뿐만 아니라 같은 차원의 변화(Duval, 1998)가 요구되는 공간 시각화의 특성과 공간 지각력을 관찰하기에 유용할 것으로 판단된다. 따라서 과제 수행에서 드러나는 공간 시각화 능력을 McGee의 공간 시각화 요인을 중심으로 Duval과 Del Grande를 고려하면서 분석하고자 한다.

III. 연구 방법

1. 실험 과제

본 연구에서 사용한 기하 과제는 Raqual (2001)의 박사학위 논문에서 학생들의 기하적 사고와 공간 능력의 향상에 대한 GSP(The Geometer's Sketchpad)의 역할을 탐구하기 위해 제시되었던 것으로, 정이십면체를 점선을 사용하지 않고 묘사한 그림 각각에서 변의 길이와 각의 크기를 비교하는 문제이다[그림 III-1].

2. 연구 대상

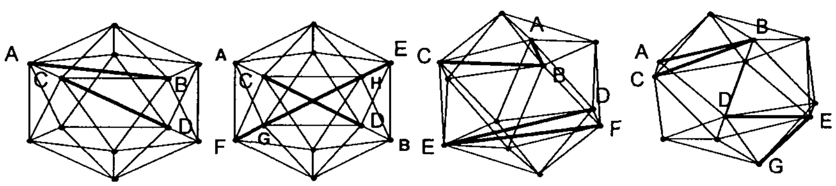
본 연구의 대상자는 국가가 지원하는 수학영재교육을 받고 있는 초등학교 6학년(11세-12세: B, H, K, L, S, Y) 남학생 6명과 중학교 1학년 (13세: O) 남학생 1명이다. 이들은 과학기술부의 지원과 영재교육진흥법에 따라 운영하는 대학부설 과학영재교육원의 지도교수들에 의해 11월경에 실시된 2차례의 수학문제해결력 검사와 최종 수학구술면접을 거쳐 선발된 경기도지역에 거주하는 가장 우수한 학생들이다. 일반적으로 이들은 각 시도교육청과 한국교육개발원에서 공동으로 개발한 영재교육선발대상자 검사를 통과하고 지역교육청의 과학영재교육원에 소속되어 교육을 받고 있는 학생들과의 1차 경쟁에서 우선 선발되므로 수학문제해결력은 매우 우수한 편이다. 그들의 지도교수에 의하면 이들의 문제해결력은 또래 연령의 상위 0.5%이내에 속하는 것으로 추정된다. 실험 당시에 이들은 A대학부설과학영재교육원의 초등 수학반과 중등 수학반에 각각 소속되어 봄, 가을학기와 여름학기를 거치면서 9개월 이상 수학영재교육을 받아오고 있었지만 실험 과제와 유사한 내용의 교육을 받은 경험은 없었다.

3. 연구 절차

본 연구의 자료 수집과 자료 분석은 2006년

다음은 정이십면체를 평면에 표현한 그림입니다. 다음의 각 물음에 답하시오.

<문제1> <문제2>	<문제3> <문제4>
표시된 두 선분의 실제 길이를 비교하고 그 이유를 설명하시오.	표시된 두 각의 실제 크기를 비교하고 그 이유를 설명하시오.



[그림 III-1] 공간 시각화 과제

11월-12월에 이루어졌다. 본 과제에 대한 이해, 접근 방식, 해결에 필요한 시각화 능력 등에 대한 분석 방법을 설계하기 위해 초등학교 6학년 수학영재 1명, 중학교 1학년 수학영재 1명, 그리고 중학교 1학년 일반학생 5명을 대상으로 1차례의 예비실험을 실시하였다.

예비실험에 참여한 학생 중에서 초등학교 6학년 수학영재학생은 정다면체에 관한 학습을 하지 않은 상태였고, 중학교 1학년의 일반학생과 영재학생은 실험 전에 중학교 1학년 교육과정의 내용, 즉 정다면체의 종류와 성질, 겨냥도, 오일러식 등에 대하여 학습한 경험이 있었다. 그리고 중학교 1학년의 일반학생 5명의 학교 성적은 상위 1명(BS), 중상위 2명(HS, WJ), 중위(YL) 1명, 중하위(KW) 1명이었다.

예비실험을 통해 과제와 그림에 대한 이해에 어려움은 없는지, 학생들이 과제를 수행하는 시간과 그들이 인식한 내용을 표현하는 방법, 관찰자의 질문 방식, 과제를 제시하는 방법 등을 검토하였을 뿐만 아니라 일반학생들의 공간 시각화 능력의 정도에 대해 알아보았다.

본 실험은 수학 영재 초등학교 6학년 6명과 중학교 1학년 1명을 대상으로 1시간-1시간 30분 동안 개별적으로 과제를 해결하도록 하였다. 학생들에게는 자와 컴퍼스와 같은 도구를 사용하지 않도록 하였고 아무런 구체물도 제공하지 않았으며 면담과 녹화를 위해서는 3대의 비디오와 3명의 면담/관찰자가 참여하였다. 모든 학생들에게 <문제 1>과 <문제 2>를 동시에 제시하였고, 학생들은 먼저 해결한 순서대로 비어있는 비디오 앞으로 나와 자신의 문제해결 과정을 설명하였다. 면담/관찰자들은 학생들의 설명에 대한 추가 해설을 요구하거나 개인의 심리적인 상태도 확인하였다. 이후 다시 <문제 3>과 <문제 4>를 동시에 해결하고 면담과 녹화의 과정을 반복하였다. 학생들에게 자신들이 기록한 답안지를 지우지 않도록 요구했으며 모든 기록물들을 수집하였다.

4. 분석 방법

자료 분석은 학생들의 문제 해결을 위한 결정적인 정보를 얻기 위한 시각화 과정에서 나타나는 공간 시각화 능력을 [표 Ⅲ-1]과 같이 McGee(1979)의 공간 시각화 요인을 기초로 분류하고 Duval(1998)과 Del Grande(1987)도 고려하면서 분석하였다.

<표 Ⅲ-1> 학생들의 공간 시각화 능력 분류

공간시각화능력	학생들의 문제해결 과정
윤곽을 시각화하는 능력	전체 그림에서 부분적으로 도형을 인지하는 경우
상상 속에서 조작하는 능력	구체물이 없는 상태에서 그림을 그려보지 않고 머릿속에서 대상을 떠올려 조작하는 경우
대상의 회전을 상상하는 경우	문제해결을 위해 대상을 상상 속에서 회전시키는 경우
다른 형태로 변형하는 능력	대상을 자르거나 붙여서 다른 도형으로 변형하는 경우

Ⅳ. 연구의 결과 및 논의

1. 일반학생들의 문제 해결

예비실험에서 중학교 1학년의 일반학생 5명의 과제 해결 과정을 분석한 결과는 다음과 같다.

<문제 1>과 <문제 2>에서 학생들은(BS, WJ, YL, KW) 주어진 선분들을 길이가 같은 다른 선분으로 바꾸면서 길이 비교를 시도하거나, 선분과 각이 포함된 평면을 찾으려 하였으나 그것을 명확하게 시각화하지 못하였다. 선분이

포함된 평면을 입체적으로 바라보지 못하고 평면 그림에서 보이는 그대로 인식하였다.

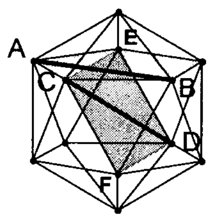
<문제 3>에서는 한 학생(KW)을 제외한 모든 학생들이 두 각이 포함된 평면인 정오각형을 시각화하여 비교적 쉽게 문제를 해결하였다.

몇몇 학생들은 <문제 4>에서 각의 위치를 명확하게 파악하지 못하고 공간의 각을 평면의 각과 구별하지 못하여 어려움을 겪고 있었다. 한편 몇몇 학생(HS, WJ)들은 교사의 질문으로 도움을 얻어 두 각을 각각 포함하고 있는 삼각형을 시각화할 수 있었다.

경우에 따라 학생들이 문제 해결을 시도조차 하지 못하는 경우 관찰자는 과제에서 모두 실선으로 되어 있는 겨냥도의 어려움을 고려하여 점선을 이용한 겨냥도를 제공하였다. 그러나 학생들은 문제를 해결하려고 시도는 하지만, 표시된 선들을 모두 정이십면체의 모서리고 보거나 원근감 없이 대상을 바라보았다.

다섯 명의 학생 중 학생 HS는 학교 성적은 중상위정도였으나 완전하게 문제를 해결하지 못하더라도 문제 해결을 위한 공간 시각화 능력이 비교적 우수하게 나타났다.

예를 들면, <문제 1>에서 학생 HS는 [그림 Ⅳ-1]와 같이 AB가 포함되어 있는 평면(정오각형)과 CD가 포함되어 있는 평면(직사각형)을 각각 시각화 하였다.



[그림 Ⅳ-1] 학생 HS의 반응

그러나 AB와 CD의 길이 비교에서는 다음의 설명과 같이 다소 오류를 범하고 있었다. "오각형에 대각선을 그려서 삼각형으로 나누면 둔각삼각형이 되고, 직사각형은 직각삼각형이니까 버러진 정도가 둔각삼각형이 훨씬 크니까 나머지 한 변의 길이가 더 길어요."

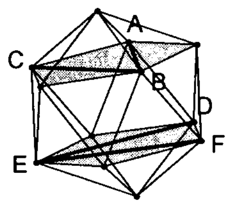
여기서, 교사의 질문을 통해 이 학생은 정오각형과 직사각형의 변의 길이를 비교하고 AB보다 CD가 더 길다는 것을 알아내었다.

2. 영재학생들의 문제해결에서 나타난 공간 시각화 능력

학생들이 주어진 과제를 해결하는 과정에서 주로 발견된 공간 시각화 능력은 윤곽을 시각화하는 능력, 상상 속에서 대상을 조작하는 능력, 묘사된 대상의 회전을 상상하는 능력, 묘사된 대상을 다른 형태로 변형하는 능력이다.

가. 윤곽을 시각화하는 능력

본 연구의 과제를 해결하는 과정에서 가장 많이 발견된 시각화 능력은 McGee가 설명한 윤곽의 내부 사이를 움직이는 윤곽을 인지하고, 유지하고, 연상하는 능력이었다. 학생들은 전체적인 윤곽에서 문제에 유용한 부분적인 윤곽을 명확하게 바라볼 수 있었다. 모든 학생들이 <문제 3>에서 각 ABC와 각 DEF의 크기를 비교하기 위해 [그림 Ⅳ-2]과 같이 두 각이 각각 포함된 평면 즉 정오각형을 시각화한 경우이다.



[그림 Ⅳ-2]

또한 <문제 1>에서 학생 S는 평면 그림에서 공간 그림의 윤곽을 명확하게 시각화하였다.

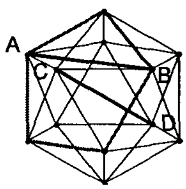
설명은 다음과 같다.

S: 정이십면체를 보면 맨 위에와 맨 아래에 꼭지점이 하나씩 있잖아요. 그런데, 그것을 각뿔의 꼭지점으로 하는 오각뿔이 하나씩 있어요. 그런데, 그것이 안 만나면 이었을 때 가장 긴 선분이에요.

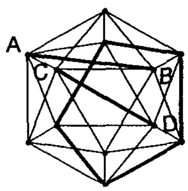
T: 원래 알고 있었니?

S: 예.

S: 그런데 그림에서 보면 여기([그림 Ⅳ-3a])와 여기([그림 Ⅳ-3b]) 두 개 있는데, 공유하는 부분이 없어서 CD는 지름이 되어서 가장 길어요.



[그림 Ⅳ-3a]
학생 S의 반응(1)



[그림 Ⅳ-3b]
학생 S의 반응(2)

T: 공유하는 부분이 없다는 건 무슨 뜻이니? 두 오각형이 만나지 않는다는 뜻이니?

S: 아니요. 입체적으로 봐서요. 두 오각뿔이 공유하는 부분이 없다는 거예요.

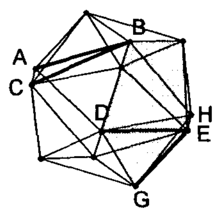
S: 그런데 AB는 지름이 아니에요.

T: 그럼 어떤 선이니?

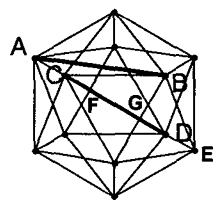
S: 그냥 선이에요. A, B 각뿔의 꼭지점으로 하는 두 오각뿔은 공통부분이 있으니 지름이 아니에요.

Duval(1999)은 조작적 이해(operation apprehension)는 모양을 바라보는 시각적 조직을 변형시킴으로써 수행된다고 하였다. 또한 주어진 도형에 변화를 주어 몇 개의 도형들로 발전시킬 수 있다. 그 중 한 가지 조작은 문제해결을 위한 통찰을 제공한다. 이러한 관점에서 평면에 표현된 공간 도형의 윤곽을 시각화하는 능력이 문제해결에 있어서 통찰을 일으키는 역할을 하였다고 볼 수 있다.

한편 학생 O는 문제 4에서 [그림 Ⅳ-4]과 같이 각 DEG가 포함된 정오각형을 문제의 그림에서 분리할 수 있었다. 이것은 두 선이 겹쳐져 있고 점이 선에 의해 구별이 어려운 복잡한 배경에서 도형을 지각한 것으로 Del Grande (1987)가 공간지각의 하위 영역 7가지를 정리한 것 중교차하거나 숨겨진 모양이 있는 복잡한 배경에서 도형을 지각하는 능력으로도 분류할 수 있다.



[그림 Ⅳ-4]
학생 O의 반응(1)



[그림 Ⅳ-5]
학생 H의 반응

나. 상상 속에서 대상을 조작하는 능력

3차원의 대상물을 2차원의 그림으로 표현해서 제시했지만, 학생들 대부분이 그것을 3차원 공간에서 정신적으로 움직이거나 조작하면서 문제해결을 시도하였다. 그 중에서 학생 H는 <문제 1>에서 CD가 포함된 평면을 대상을 마음속에서 조작하여 CD가 포함된 단면은 육각형의 모양이라고 설명하고 그 육각형의 꼭지점을 [그림 Ⅳ-5]와 같이 A, C, G, E, D, F로 표시하였다. 그리고 <문제 2>에서 정이십면체를 잘랐을 때 CD가 포함된 단면과 EF가 포함된 단면이 모두 같은 모양의 육각형이고, CD와 EF는 육각형 위에서 길이가 같은 대각선이라고 설명하였다. 이 학생은 상상 속에서 정이십면체를 자유롭게 조작하여 보이지 않는 부분까지 정확하게 시각화하는 경우로, McGee가 공간 시

각화의 세부 요인으로 분류한 3차원 공간에서 상상의 움직임을 인지하거나 상상 속에서 대상을 조작하는 능력에 포함시킬 수 있다. 또한 이 공간 시각화 능력은 Del Grande가 설명한 공간 지각의 하위 영역 중에 보지 않고 대상을 정확하게 회상하는 능력, 보거나 보지 않으면서 그 대상의 특징을 다른 대상의 특징과 연결하는 능력에 포함시킬 수 있다.

다. 묘사된 대상의 회전을 상상하는 능력

학생들은 2차원에 묘사된 3차원의 입체도형을 정신적으로 회전시켜 그것의 구성 요소들의 위치를 변화시킬 수 있었다. 이를테면, 학생 K는 <문제 2>에서 묘사된 [그림 Ⅳ-5]를 돌려보면 CD와 EF가 위치가 바뀌어서 보이고, 결국 두 선의 길이는 같은 것이라고 하였다. 또한 Y는 문제 3에서 [그림 Ⅳ-2]와 같이 각 ABC와 각 DEF가 있는 정오각형을 찾아 두 각의 크기가 같다는 설명에 덧붙여, 대상을 돌려보면 각 DEF가 각 ABC와 같은 위치가 된다고 하였다. 이것은 Mc Gee가 분류한 공간에서 대상의 위치변화의 관계를 상상하는 능력으로 플랫 패턴을 접거나 펴는 능력 또는 묘사된 대상을 회전하는 능력에 포함된다.

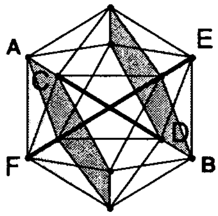
라. 묘사된 대상을 다른 형태로 변형하는 능력

학생들은 묘사된 대상을 정신적으로 자르거나 덧붙여서 다른 형태로 변형 할 수 있었다. 예를 들면 학생 O는 <문제 2>의 그림에서 CD와 EF의 길이를 비교하기 위해 E와 F를 꼭지점으로 하는 오각뿔을 각각 잘라내었을 때 생성되는 밑면이 정오각형이고, 옆면의 모양이 정삼각형이 엇갈려있는 입체로 변형하여 문제를 해결하였다[그림 Ⅳ-6].

O: EF를 보면 선분을 정오각형 위에 있는 부분(E가 있는 부분)이랑 아래 있는 부분(F가 있는 부분)으로 나누어요.

그러면, 정오각형(짙은 색으로 표시된 두 오각형)으로 잘리는 부분이 있잖아요. 그러면, 밑면은 정오각형이고, 옆면은 모두 정삼각형들로 둘러싸인 입체가 되거든요. 그 입체의 높이를 a라하고 분리해서 보면요. 양쪽 오각뿔 높이를 b라 하면 EF의 길이는 a+2b 에요.

CD도 마찬가지로 a+2b로 같아요.



[그림 Ⅳ-6]
학생 O의 반응(2)

이것은 Mc Gee가 제시한 공간 패턴의 이미지를 다른 배열로 조작하거나 변형하는 능력이라 볼 수 있다.

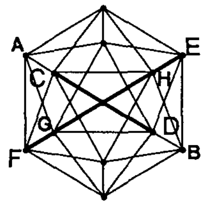
2. 공간 시각화 과정에서 발생하는 오류

가. 시각적 사실에 의존

문제의 그림이 입체도형을 묘사한 것임에도 불구하고, 그것을 공간의 대상으로 상상하지 못하고, 평면 그림의 시각적 사실에 의존하는 것이다.

이를테면, <문제 2>에서 학생 Y는 FE=AB, AB>CD이므로 FE>CD라 하였고, 학생 L은 CD=GH 이므로, EF가 CD에 비해 GF와 HE만큼 더 길다고 하였다([그림 Ⅳ-7]). 이것은 일반적으로 3차원의 대상을 점선을 사용하여 2차원으로 표현한 그림에 익숙한 학생들에게서 볼 수 있는 현상으로 문제와 같이 모든 선이 실선인 경우 원근감을 느끼지 못하고, 2차원 그림

의 시각적 사실에 의존하는 경우이다.

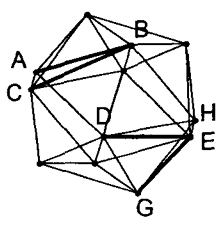


[그림 Ⅳ-7]
학생 L의 반응(1)

나. 모서리 구별의 혼동

몇몇 학생들은 본 연구의 과제에서 정이십면체의 모든 면은 정삼각형이고 모든 모서리의 길이가 같다는 것을 알고 있지만 평면에 묘사된 그림에서 어떤 선이 다면체의 모서리가 되는지 혼동하고 있었으며, 문제에서 표시된 선은 모두 모서리라고 착각하고 있었다.

이를테면, 학생 Y는 <문제 1>에서 AB>CD라 하였는데, 그 이유를 CD와 CB 모두 정삼각형의 한 변으로 길이가 같기 때문이라고 하였다. 이 학생은 CD는 정이십면체의 내부를 관통하는 대각선임에도 불구하고 정이십면체의 한 모서리로 인식하고 있었다. 학생 L은 문제 4에서 각 DEG=60°라 하였는데, 그 이유를 [그림Ⅳ-8]에서 DGEH가 모든 변의 길이가 같은 정사면체이기 때문이라고 하였다. 학생 L의 경우 전체에서 부분적인 윤곽을 시각화함으로써 공간 이미지를 생성하였지만, 실제 모서리와 평면위에 표시된 선분을 제대로 구별하지 못하였다.

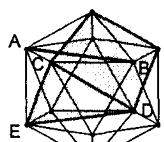


[그림 Ⅳ-8]
학생 L의 반응(2)

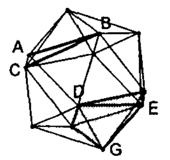
다. 입체도형의 단면에 대한 상상의 어려움

본 연구의 과제를 해결하기 위해 주요 아이디어는 평면에 표현된 입체도형에서 관련된 선분과 평면을 어떻게 구별해내는가라고 할 수 있다. 2차원 평면 위의 그림으로 3차원 공간에서의 평면을 상상하는 데에 어려움이 많이 나타났다. 몇몇 학생들은 표시된 선분이나 각의 크기를 비교하기 위해 그것들이 포함되는 단면을 찾으려고 하였으나 실제로 입체도형의 단면이라고 할 수 없는 부분을 표시하면서 그것이 평면이 됨을 주장하고 있었다.

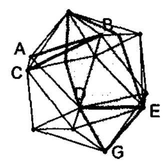
이를테면, 학생 H는 <문제 1>에서 AB의 길이와 ED의 길이가 같다는 것을 말하고, ED와 CD를 비교하기 위해 두 선분이 포함된 평면을 [그림 Ⅳ-9a]와 같이 표시하였다. <문제 4>에서도 각 DEG가 포함된 평면을 [그림 Ⅳ-9b]와 같이 표시하였다. 그리고 학생 B는 문제 4에서 각 DEG가 포함된 평면으로 정이십면체 내부의 단면을 [그림 Ⅳ-9c]와 같이 표시하였다.



[그림 Ⅳ-9a]



[그림 Ⅳ-9b]



[그림 Ⅳ-9c]

Ⅴ. 결 론

본 연구는 수학영재들이 평면에 표현된 입체도형을 어떻게 정신적으로 조작하거나 회전하여 관련된 구성 요소들을 구별해내는지 그 공간 시각화 능력을 살펴본 것이다.

학생 O와 S는 본 연구의 과제를 모두 수행하면서 특징적인 공간 시각화 능력을 보였다.

또한 학생 K와 B는 <문제 4> 해결 과정에서 주어진 선분을 입체도형의 모서리와 혼동하거나 입체도형의 단면을 상상하는데 어려움을 겪었지만 나머지 과제는 완전히 해결하였다. 한편, 학생 H, Y, L은 <과제 3>은 쉽게 해결하였고, 나머지 문제에서는 시각적 사실에 의존하거나 표시된 선분과 모서리를 혼동하여 결정적으로 문제를 해결하지 못하였지만 평면에 제시된 입체도형을 원근감 있게 바라볼 수 있었다.

학생들이 과제를 해결하는 과정에서 주로 발견된 공간 시각화 능력은 전체적인 윤곽에서 문제에 유용한 부분적인 윤곽을 명확하게 바라볼 수 있는 능력, 2차원에 묘사된 3차원의 대상을 상상 속에서 조작할 수 있는 능력, 2차원에 묘사된 3차원의 입체도형을 정신적으로 회전시켜 그것의 구성 요소들의 위치 변화를 인지할 수 있는 능력, 묘사된 대상을 정신적으로 자르거나 덧붙여서 다른 형태로 변형할 수 있는 능력으로 이것들은 McGee의 공간 시각화 능력과 유사하다. 이 중에서 문제에 유용한 부분적인 윤곽을 시각화하는 능력은 선이나 점의 겹침이 없는 보다 쉬운 그림에서는 모든 학생들에게서 나타났지만, 선이나 점의 겹침이 있는 복잡한 그림에서는 단 한 명의 학생에게서만 발견되었다. 이렇게 복잡한 그림에서 문제에 유용한 부분윤곽을 찾아낼 수 있는 능력은 Del Grande의 공간지각의 하위 영역 중 교차하거나 숨겨진 모양이 있는 복잡한 배경에서 도형을 지각하는 능력에 포함시킬 수 있다. 또한 2차원에 묘사된 3차원의 대상을 상상 속에서 조작하는 능력은 Del Grande가 설명한 공간 지각의 하위 영역 중에 보지 않고 대상을 정확하게 회상하는 능력, 보거나 보지 않으면서 그 대상의 특징을 다른 대상의 특징과 연결하는 능력에 포함시킬 수 있다.

한편 대상 학생들의 평소 학습 능력에 비추어 볼 때 몇몇 학생들은 대수 또는 기하의 다른 영역에서 우수한 특징을 보이지만 공간을 시각화하는 과정에서 다소 어려움도 겪고 있다는 것을 발견할 수 있었다.

한 가지는 평면에 묘사된 입체 도형에서의 실제 길이를 비교할 때, 입체도형의 구조에 따른 원근감을 고려하지 못하고 그림에서 보이는 그대로를 인지하였다. 이것은 시각적 사실에 지나치게 의존하는 경우라 볼 수 있다. 그리고 묘사된 평면 그림으로 묘사된 입체도형의 윤곽을 시각화하는 과정에서 평면 위에 있는 선분과 입체도형의 모서리를 정확히 구별해내지 못하는 경우도 있었다. 또 다른 경우는 평면에 묘사된 그림으로 문제해결을 위해 입체도형에서의 단면을 상상하려고 시도하였으나 실제로 단면이 될 수 없는 부분을 표시하여 평면임을 주장하기도 하였다.

본 연구의 실험에서 몇몇 영재 학생들에게서 공간 시각화의 어려움이 발견되었으나 예비실험에서의 일반 학생들의 공간 시각화 능력과 비교할 때 상당히 우수하다고 볼 수 있다. 이를테면, 일반학생들은 입체도형을 평면에 실선으로 표현한 그림은 물론 점선을 이용한 그림에서도 입체적으로 인지하지 못하여 문제해결에 큰 어려움을 겪었지만, 영재학생들은 실선만을 이용한 평면 표현에서 입체도형을 인지할 수 있었고, 그것을 상상 속에서 다양한 방법으로 조작하면서 변형하고 회전시킬 수 있었다.

일반 학생들뿐만 아니라 영재학생들에게서도 공간 시각화에서 몇 가지 유형의 오류가 발견되는 것을 본다면 공간 시각화 능력의 형성이 어느 정도까지 타고난 능력의 영향을 받는 것인지 어느 정도까지 입체도형을 시각화하는 학습 경험의 영향을 받는 것인지에 관한 앞으로의 연구와 이를 바탕으로 영재교육에서의 교육적인 배려가 필요할 것이다.

참고문헌

Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics (2nd part). *For the learning of mathematics 2*(2), 33-39.

Clements, M. A. (1983). The question of how spatial ability is defined and its relevance to mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 15*, 8-20.

Clements, D. H. (1999). Geometric and spatial thinking in young children. In V. C. Juanita (Ed.), *Mathematics in the early years*(pp. 66-79). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H. & Battista, M. B. (1992). Geometry and spatial reasoning. In A. G. Douglas (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 420-464),. New York: Macmillan Publishing Company.

Del Grande, J. J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shults (Eds.), *Learning and teaching geometry K-12*(1987 yearbook, pp. 126-135). Reston, VA: NCTM.

Duval, R. (1998). Geometry form a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani(Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

_____(1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the international Group for the Psychology of Mathematics Education 21st.* 3-26.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudental, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordercht: D. Reidel Publishing Company.

Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, *Proceedings of the 20th PME Conference* 1, 3-19.

Hershikowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics and cognition*(pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Linn, M. C. & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development 56*(6), 1479-1498.

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin 86*(5), 889-918.

National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Raquel A. J. (2001). *Thinking in three dimensions: Exploring students' geometric thinking and spatial ability with the*

Geometer's Sketchpad. Unpublished doctoral dissertation. Florida International University, Miami.

Rommevaux, M. P. (1997). Le discernment des plans: un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensinnelle, Thèse U.L.P.: Strasbourg.

Yakimanskaya, I. S. (1971). The development of spatial concepts and their role in the mastery of elementary geometric knowledge. In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Ed.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics* (Vol5, pp. 145-168). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Analysis of the Mathematically Gifted 6th and 7th Graders' Spatial Visualization Ability of Solid Figures

Ryue, Hyun A (Konkuk University)
Chong, Yeong Ok · Song, Sang Hun (Gyeongin National University of Education)

This research aims to look into the mathematically gifted 6th and 7th graders spatial visualization ability of solid figures. The subjects of the research was six male elementary school students in the 6th grade and one male middle school student in the 1th grade receiving special education for the mathematically gifted students supported by the government. The task used in this research was the problems that compares the side lengths and the angle sizes in 4 pictures of its two dimensional representation of a regular icosahedron. The data collected included the activity sheets of the students and in-depth interviews on the problem solving. Data analysis was made based on McGee's theory about spatial visualization ability with referring to Duval's and Del Grande's.

According to the results of analysis of subjects' spatial visualization ability, the spatial visualization abilities mainly found in the students' problem-solving process were the ability to visualize a partial configuration of the whole object, the ability to manipulate an object in imagination, the ability to imagine the rotation of a depicted object and the ability to transform a depicted object into a different form. Though most subjects displayed excellent spatial visualization abilities carrying out the tasks in this research, but some of them had a little difficulty in mentally imagining three dimensional objects from its two dimensional representation of a solid figure.

* key words : the mathematically gifted(수학영재), spatial visualization(공간시각화), regular icosahedron(정이십면체)

논문접수 : 2007. 4. 30
심사완료 : 2007. 5. 31