

# 가시화 영상의 웨이브렛 해석

## Wavelet Analysis of Visualized Image

박영식\*, 김옥규\*\*

Young-Sik Park\* Okug-gyu Kim\*\*

### 요약

영상처리에 있어서 갑작스러운 신호와 불확실한 시스템의 특징을 정확하게 표현하기 위하여 많은 연구가 수행되어 왔다. 많이 알려진 푸리에 변환은 임의 신호의 주파수 해석에 폭넓게 사용되어 왔다. 그러나 이 방법은 시간 축에서 발생하는 갑작스러운 신호 변환과 비정상적인 신호를 주파수 변환 영역에서 나타낼 수 없으므로 유용하지 않다. 본 논문은 이산 웨이브렛을 이용한 영상해석을 하였다. 이는 웨이브렛 영역에서의 극대치는 Lipschitz 지수 표현이 가능하고, 또한 극대치만 사용하여 영상 데이터의 윤곽선 및 데이터 특성을 표현하는 유용함을 나타내었다. 더욱이 적은 극대치만을 사용하여 본래 영상을 재생하는 것도 가능하게 되었다. fractal 해석은 예로서 적용되었다. 그리고, 모형 배에서 기름 띠의 가시화 영상이 해석되었다. 극대치 해석으로 fractal 변수를 구하고, 가시화 영상 해석의 실험으로 양호한 결과를 얻었다.

### Abstract

The many studies have been proceeding to express accurately the feature of a sudden signal and a uncertain system in the image processing field. It is well know that Fourier Transform is widely used for frequency analysis of any signal. However, The frequency transform domain is not used for expressing the sudden signal change and non-stationary signal at the time-axis by this method.

This paper describes of image analysis by discrete wavelet transform. Wavelet modulus maxima on transformed plane gives the Lipschitz exponent expression, which is useful to examine the characteristics of signal or the edge of an image. It is possible to reconstruct the original image only using the few maxima points. The fractal analysis is applied as an examples. The visualized image of oil flow on a ship model is analyzed. The fractal variable is obtained by the maxima analysis and the good resultes on the exprement is obtained by the visualized image analysis.

Keyword : wavelet, visualized image, fractal, maxima, Lipschitz, image processing.

## I. 서론

어떤 시계열 신호의 스펙트럼을 해석을 할 때 웨이브렛 변환이 유용하며, 이 웨이브렛 변환은 난류의 조직적 구조 해석 및 음향신호 그리고 심전도 해석 등 다양한 분야에 응용되고 있다. Mallat는 스케일이 다른 필터를 통계적으로 사용하는 다중해석도 해석과 깊은 관계가 있는 것을 알 수 있고, 처리를 해야 하는 신호에 웨이브렛 함수를 이용할 경우 유용할 수 있음을 나타내었다[1]. 그리고 Daubechies는 직교 웨이브렛 변환이 각종 신호해석에 유용함을 증명함과 동시에, 그것의 수학적인 의미도

분명히 하다[2].

그 후 많은 연구자들은 웨이브렛 변환이 가지고 있는 새로운 가능성에 주목하여 각종 연구에 웨이브렛을 활발히 사용하여 왔지만 대부분의 웨이브렛 연구는 영상 데이터에 관한 데이터 압축 등에 관한 것이 많았다[3-5]. 그리고, 영상해석 그 자체에 관한 연구는 생각하고 있는 것보다 적다. 최근에는 가시화시킨 영상 데이터해석에 웨이브렛을 사용할 수 있다는 새로운 가능성이 대두되고 있다[6]. 본 논문에서는 먼저 웨이브렛 변환된 데이터의 극대치를 구한 뒤에 영상 데이터해석에 극대치를 이용한 해석을 시도하였다. 이는 원리적 측면에서 생각하면 웨이브렛 변환 영역의 데이터는 새로운 함수구간이 되고 이 구간의 극대치 데이터만 가지고도 본래의 영상을 복원하는 것이 가능하다. 이것은 대량의 데이터가 매우 적은 데이터로 표현될 수 있다는 것을 나타내는 것으로 해석은 데이터 압축뿐만 아니라 웨이브렛 공간에서 2차원 데이터의 각종 처리가 가능함을

\*동의대학교 컴퓨터과학과 \*\*오사까시립대

논문 번호 : 2007-2-5 접수 일자 : 2007. 4. 20

심사 완료 : 2007. 7. 13

\* 본 논문은 2005년도 동의대학교 일반과제 (2007AA104)에 의해 연구되었음.

나타내고 있다.

시물레이션 상에서는 먼저 웨이브렛 변환 공간에서의 데이터의 극대치가 신호의 급격한 변환에 대응하고 있는 것을 나타내었다. 또한 그것이 영상의 윤곽선 추출에 유용한 것을 나타냄과 동시에 이 구간에서 구한 극대치 신호로 특이성 신호를 Lipschitz 지수로 나타낸다.

실험적으로는 신호의 자기 상관성을 나타내는 fractal 해석도 같은 방법에 의해 비교 분석하였다[7]. 그리고 유막법(流膜法)에 의한 실험으로 인공적으로 빠르고 강한 기류를 보내는 장치를 설치한 다음에 실험 모형 베에 오일을 뿌리고 유체 중에 각 점의 접선이 일정 시각에 물의 흐름과 같은 방향과 일치하는 곡선인 한계유선 등을 측정하는 장치로서 난류 및 층류를 발생시켜 해석하였다. 더욱이 실험으로 얻은 가시화 영상에 관하여 Lipschitz 해석을 실시하여 이 해석의 유용성을 증명하였다.

## II. 이산웨이브렛 변환

어떤 신호  $f(x)$ 의 웨이브렛 변환은 mother 웨이브렛 함수  $\psi(x)$ 의 스케일  $s$ 에 의해서 얻어지는 함수는 다음과 같고,

$$\psi_s(x) = s^{-1} \psi(xs^{-1}) \quad (1)$$

신호  $f$ 와의 내적의 관계식은 식 (2)로 표현되어 진다.

$$Wf(s, x) = f * \psi_s(x) \quad (2)$$

스케일  $s$ 와 좌표  $x$ 을  $1/s = 2^j$ ,  $x = \xi$ 로 이산화하면, 다음 식과 같이 이산 웨이브렛 변환을 정의 할 수 있다.

$$W_2^j f(j, \xi) = f * \psi_{2^j}(\xi) \quad (3)$$

그림 1은 일차원 신호법을 Mallet의 이론에 의해 웨이브렛 변환시킨 것이다. 여기서 점 (a),(b),(c)는 특이성이 다른 3개의 신호 파형을 그림의 아래에 표현되는 레벨 4까지 웨이브렛으로 전개한 것이다. 여기서 웨이브렛 레벨을 높이는 것은 해상도를 낮추는 것을 의미한다. 이는 공간주파수에서 보면 저주파성분을 추출한 것에 상당한다. 신호처리에 있어서는 웨이브렛 변환이 어떤 필터의 조작과 같이 취급되는 것은 이와 같은 이유이다.

본 논문에서는 웨이브렛 기본 함수인 Hara 함수를 이용하였다.

$$\psi_H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1, & \text{if } 1/2 \leq x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

그리고, 데이터 수를 줄이기 위해서는 이른바 다운샘플링

을 하지 않는 다중 해상도 표현을 사용하였고, 스케일 함수는 식 (5)와 같다.

$$\Phi_H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

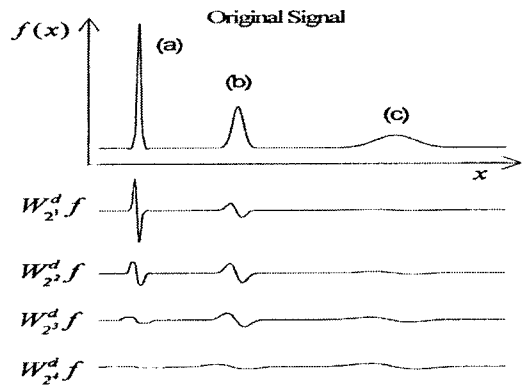


그림 1. 1차원신호의 웨이브렛 해석

Fig. 1. Wavelet analysis on one-dimensional signal

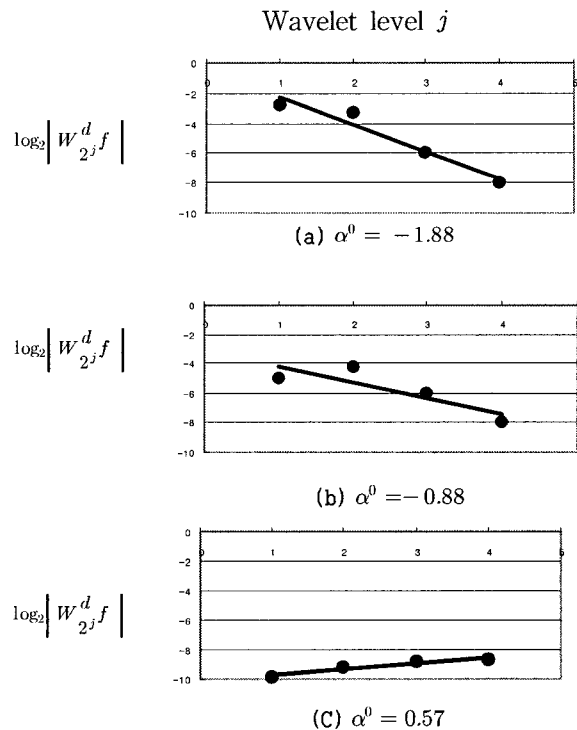


그림 2. Lipschitz  $\alpha^0$  해석

Fig. 2. Lipschitz  $\alpha^0$  analysis

여기서, 함수  $f(x)$ 의 임의의 점  $x_0$ 에 있어서 Lipschitz 조건은 다음의 식에 의해 표현된다.

$$|f(x_0+h) - P_n(h)| \leq A|h|^r \quad (6)$$

$n \in \mathbb{Z}, n \leq \alpha \leq n+1, A \rightarrow \text{Constant}$   $P_n$ 은 신호  $f(x)$ 를 테일러 전개하여 얻은 함수이다. 이에 이산 웨이브렛 변환은 식 (7)처럼 표현되어 진다.

$$\left| W_{2^j}^d f(j, \xi) \leq A_1 (2^j)^\alpha \right| \quad (7)$$

여기서 밑수를 2로 하는 대수를 취한 후에 이 식을 만족하는  $\alpha$ 의 상한치를  $\alpha^0$ 라고 하면 식 (8)과 같다.

$$\log_2 \left| W_{2^j}^d f(j, \xi) \right| = \log_2 A_1 + \alpha^0 j \quad (8)$$

$\alpha^0$ 는 웨이브렛 계수의 대수를 레벨  $j$ 에 점으로 놓았을 때의 직선의 기울기가 된다. 여기서 이  $\alpha^0$ 을 Lipschitz 지수라고 부른다. 그림 2는 이러한 상태를 나타낸 것으로 신호 파형이 날카로울수록  $\alpha^0$  값이 적어짐으로 파형의 특이성의 정도가  $\alpha^0$ 로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

### III. 영상데이터의 극대치 해석

영상의 윤곽선 특성을 표현하기 위해서 식 (6)에 정의한 Lipschitz 지수를 이용한다. 이차원 신호의 점  $f(x_0, y_0)$ 에 1차원 신호를 2차원으로 표현하며 식을 확장하면 다음과 같다.

$$\left| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \right| \leq A (h^2 + k^2)^{\alpha/2} \quad (9)$$

일반적으로 2차원 데이터의 경우에는 웨이브렛 변환은 가감산되는 조합으로 4개의 부분공간으로  $W_{\psi_{LL}}, W_{\psi_{LU}}, W_{\psi_{LU}}, W_{\psi_{LL}}$ 로 분류된다. 그러면 크기  $Mf(2^j, x, y)$ 는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$Mf(2^j, x, y) = \sqrt{\left| W_{\psi_{LU}} f(2^j, x, y) \right|^2 + \left| W_{\psi_{LU}} f(2^j, x, y) \right|^2} \quad (10)$$

그러므로, 2차원의 Lipschitz 지수  $\alpha$ 는 식 (11)로 된다.

$$\left| Mf(2^j, x, y) \right| = A_2 (2^j)^\alpha \quad (11)$$

또한 2차원 데이터의 경우에 특이성을 가지는 방향성을 나타 낼 수 있다. 이것은 식 (12)의  $Af(2^j, x, y)$ 에 의해 표현된다.

$$Af(2^j, x, y) = \text{argtan} \left( \frac{W_{\psi_{LU}} f(2^j, x, y)}{W_{\psi_{LU}} f(2^j, x, y)} \right) \quad (12)$$

웨이브렛 공간에서 극대치를 이용한 원 신호 복원 방법에는 convex 사영(射影)복원이 있다[8]. 이 방법으로 원 신호를 복원하기 위해서는 많은 반복 계산이 필요하다.

convex 사영복원 방식을 이용하여 선택되어진 신호의 시뮬레이션한 결과를 그림 3에 나타내었다. 여기서 신호 A는 원 신호로서 잡음이 많은 신호와 특이성이 많은 신호를 포함하고 있다. 그리고, A 신호를 웨이브렛 변환 영역에서 극대치를 구한 후에 복원할 경우에 앞에서 설명한 반복 계산 횟수  $N=1$ 인 경우는 A4 파형이 되고,  $N=50$  경우에는 A3이고,  $N=300$  일 때는 A2가 되고, 마지막으로  $N=1000$ 번 일 때는 A1으로 재생한 경우를 나타내고 있다. 그러므로, 이와 같이 반복횟수를 증가시킬수록 원 신호 A에 가깝게 되는 것을 알 수 있었다. 이것은 적은 데이터로도 신호 표현이 가능함을 나타냄과 동시에 극대치를 이용한 데이터 압축이 가능함을 알 수 있다.

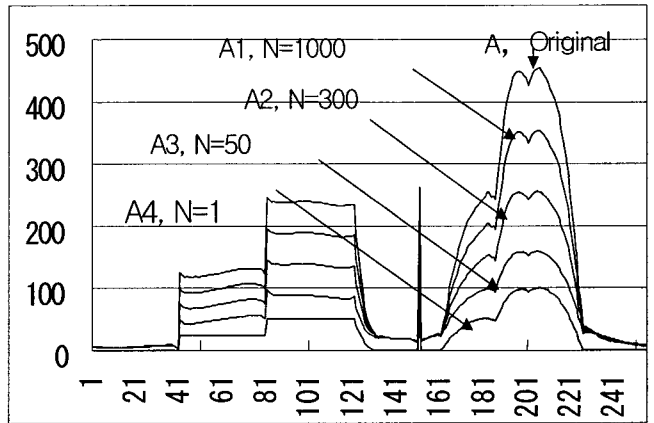


그림 3. 1차원 극대치를 사용한 신호의 복원  
Fig. 3. Reconstruction of signal using one dimensional maxima

### IV. Fractal 차원

일반적인 신호의 자기 상관성은 fractal 차원으로 표현하면 어떤 함수 근방의  $x_0$ 는 식 (13)으로 정의되고,

$$f_{x_0} = f(x_0 + x) - f(x_0) \quad (13)$$

$f(x)$ 가 fractal 특성을 가지고 있는 경우는  $x \rightarrow \lambda x$ 라는 변환에 의해서도 그 분포가 불변하므로 식 (14)의 함수식이 성립된다.

$$f_{x_0}(\lambda x) \propto f_{x_0}(x) \quad (14)$$

따라서  $f(x)$ 는  $x = x_0$ 에서 지수  $\alpha$ 의 특이성을 갖는 경우

에는 다음과 같으며

$$f_{x_0}(\lambda x) \approx \lambda^\alpha f_{x_0}(x) \quad (15)$$

이 함수를 웨이브렛 변환하면  $x_0$ 부근에서는 다음 식이 성립된다.

$$Wf(\lambda s, x_0 + \lambda x) = \lambda^{\alpha+1/2} W(s, x_0 + x) \quad (16)$$

이때  $\alpha$ 는 fractal 차원이 된다[9]. 이 지수는 앞에서 설명한 Lipschitz 지수와 같은 순서로 구해지므로 신호에 의한 국소적 스펙트럼 분포의 특이성을 나타내는 것이 된다.

또한 영상 데이터에 통계적인 자기상관성이 있는 경우에는 브라운 운동을 모델로서 차원을 구하는 방법이 알려져 있다[10]. 이것은 자기상관성 파라미터  $H$ 를 구한 뒤에 fractal 차원을  $D=3-H$ 로서 구하는 방법이다.

2차원 데이터가 이산 웨이브렛 변환되어 있는 경우에는 비정상적인 가우스 과정으로서 정의되는 브라운 운동을  $B(x)$ 로 가정하면, 이것의 이산 웨이브렛 변환의 차분신호를 다음과 같이 정의된다.

$$d_j[\xi] = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-x}^x B(x)\psi(2^j x - \xi) dx \quad (17)$$

그리고, 아래의 관계식이 성립된다.

$$\log_2(\text{var}(d_j[\xi])) = (2H+1)j + \text{const} \quad (18)$$

따라서 고주파 성분을 나타내는 차분신호의 분산치를 각각의 레벨 별로 구한 뒤에 기울기로부터  $H$ 가 구하여 지는 것을 알 수 있다. 이것은 스펙트럼 분포의 특이성을 나타내고 있는 것으로 앞에서 서술한 것과 같다. 더욱이, 이 분산치는 식 (19)와 같이 극대치만으로 구할 수 있음을 알 수 있다.

$$\log_2(\text{var}(d_j[\xi]_{\max})) = (2H+1)j + \text{const} \quad (19)$$

그림 4는 일반적으로 각 분야에 영상 해석의 표준 달 표면 영상으로 fractal 차원은 2.7이다[11]. 이 영상을 본 논문에서 제안한 극대치 값만 가지고 비교한 시뮬레이션 결과는 그림 5와 같다. 이 두 방법 모두가 거의 차이가 보이지 않는 것으로 보아 극대치만으로 fractal 차원을 구하는 것이 가능함을 증명할 수 있었다.

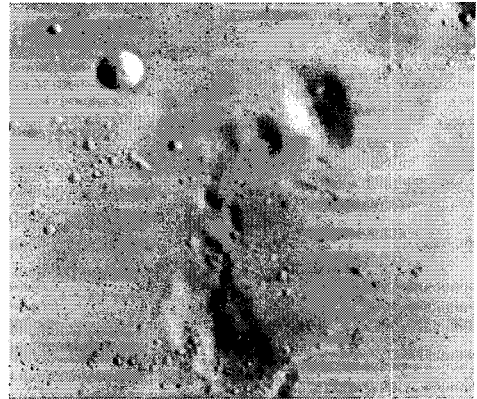


그림 4 달 표면 영상(SIDBA)

Fig. 4. Moon surface image(SIDBA)

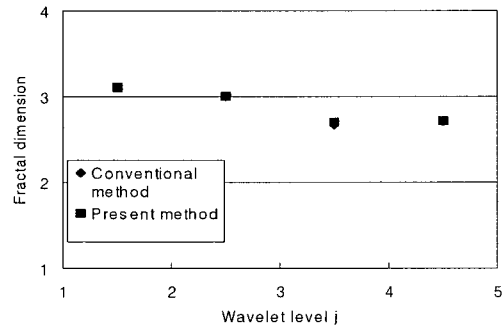


그림 5. 프랙탈 차원의 달 표면

Fig. 5. Fractal dimension of moon surface

## V. 가시화 영상의 해석

영상 데이터의 극대치 해석에 의한 웨이브렛 해석을 이용하여 가시화하기 힘든 영상을 가시화 영상으로 해석할 수 있다. 이는 불규칙한 유체 흐름(난류)과 규칙적인 유체(층류)를 숫자로 표현하여 인식하는 실험장치이다. 즉 그림 6은 실험 데이터를 구하는 시스템에서 난류와 층류를 사람이 일일이 모양을 보고 난류인가 층류인가를 판단하는 것이 아니라 자동적으로 찍은 사진으로 난류인가 층류인가를 판단하게 한다. 실험 모형배의 앞 부근에서 자동적으로 데이터를 얻을 수 있고, 이 그림의 중심선 가까이에는 물의 경계를 나타내는 선이 그어져 있다. 그림에서는 상세하게 판별하기 힘들지만 난류측진의 앞쪽으로는 규칙적인 모습을 하고 있는 층류(영역A)가 있고, 바로 뒤쪽에는 종축방향으로 소용돌이 모양을 하고 있는 난류모습(영역B)을 관찰할 수 있다.

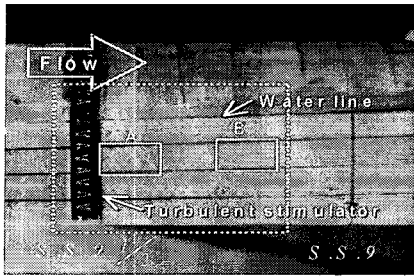


그림 6. 두 개 모델에 가시화된 기름띠  
Fig. 6. Visualized oil flow on double hull model

특히, S.S.9전방의 선에(영역B) 유막이 수직으로 되어 있어 난류가 되어 있는 것을 관찰할 수 있다.

그리고 실험에서는 유막에 의한 영상의 Lipschitz 지수로 영상의 명암이 물의 변화 정도를 알 수 있었다. Lipschitz 지수중에 비교적 작은 값만을 뽑아서 데이터로 나타 낼 수도 있었다. 이것은 원 영상에서 실험장치의 기준선과 물의 선을 무시한 것으로 유막을 사용하여 패턴을 추출한 형태이다.

더욱이 2차원 영상에 관하여 앞에서 정의한 Lipschitz 지수의 방향성을 나타내는 각도를 구한 후에(y축 방향에 특이성을 의미) 그림으로 나타내면 그림 7과 같다. 그리고 그림의 앞 부분에 삼각표시로 나타나는 이것은 원 영상을 상하방향으로 미분한 것과 많이 닮아 있는 것을 알 수 있다. 이것을 가지고 농도차를 표현하는 방향성을 나타내는 것이 가능하다.

다음은 유막법에 의한 한계유선 패턴에 관한 fractal 차원을 구한 결과를 그림 8에 나타내었다. 이것은 그림 6에 있는 A, B의 영상으로 고주파 성분의 분산치를 구한 것이다. 이것의 기울기로부터 fractal 차원을 구할 수 있다. 여기서 고주파 레벨에 관한 분산치는 거의 일정하고 저주파 영역에서는 기울기가 줄어드는 것을 알 수 있다.

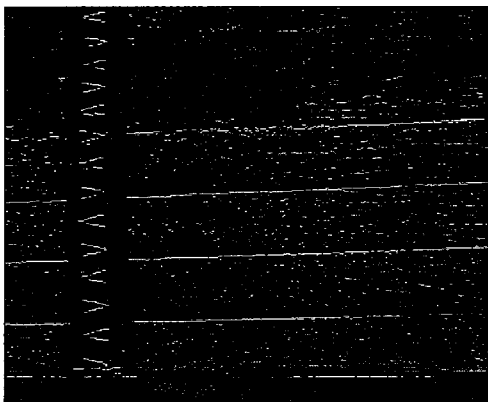


그림 7. Lipschitz 지수의 각도  
Fig. 7. Angle of Lipschitz exponent

이산화 시에 양자화 에러를 고려하여 웨이브렛 레벨 6

부근에서 기울기를 구한 후, fractal 차원 값을 구하면 A, B 양쪽 모두 3.0에 가까운 값이 된다. 이것은 A, B의 데이터가 통계적 성질이 거의 같은 것을 의미하고 있음을 나타내고 있다.

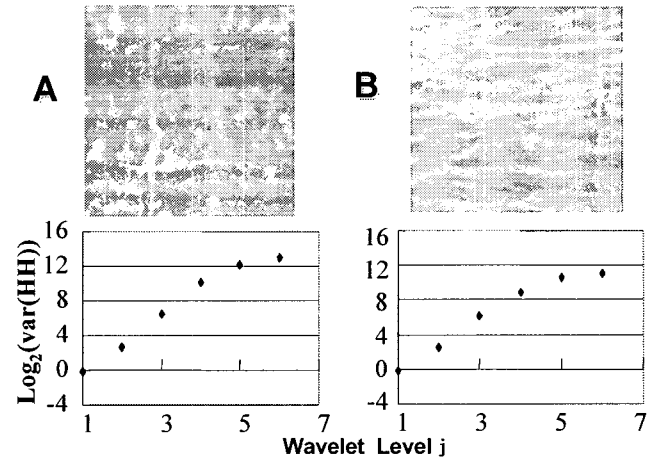


그림 8. 프랙탈 차원의 기름띠  
Fig. 8. Fractal dimension of oil flow

## VI. 결론

웨이브렛 변환은 Fourier 변환에 기반을 둔 기존의 신호 처리 알고리즘에 비해 속도가 빠르고 시간과 주파수영역에서 신호의 국소화를 효율적으로 구현하기 때문에 최근에 신호 및 영상처리 분야에 많이 응용되고 있다. 따라서 본 논문에서는 이산 웨이브렛 변환에 의한 영상해석으로 웨이브렛 영역에서의 주파수를 이용한 극대치 해석의 새로운 가능성을 나타내었다. 이는 웨이브렛 공간상에서 새로운 해석을 시도하기 위하여 웨이브렛 공간에서 주파수별로의 극대치만을 추출한 후에 각각의 주파수대역의 극대치를 가지고 기울기를 구한다. 그 결과 구한 각각의 기울기 값은 원 신호의 날카로움을 정도를 나타낼 수 있었다. 이는 웨이브렛 공간상에서 각 주파수 대역의 극대치를 이용하면 원신호의 국부적인 정량화가 가능함을 증명하였다.

또한 극대치의 유용성 확인을 위하여 많이 알려진 fractal 차원을 웨이브렛을 이용하여 구했다. 극대치의 유용성을 위하여 먼저 원 데이터 전체를 사용한 fractal 차원과 웨이브렛 공간에서의 극대치만을 사용한 fractal 차원의 결과 값을 구하였다.

시뮬레이션에서는 도쿄대학에서 얻은 달 표면의 fractal 차원 값과 같은 결과를 얻었다. 이는 fractal 차원에서 자기상관성은 원 데이터의 극대치만으로도 충분히 나타낼 수 있는 것이 증명되었다.

실험상에서는 유막에 의한 한계유선의 가시화 영상을 얻을 수 있었다. 이는 가시화 영상의 난류와 층류의 fractal 차원을 계산한 결과가 같은 값의 수치를 얻었다.

이는 난류와 층류의 기본구조는 달라도 복잡도는 같음을

의미한다. 또한 Lipschitz 지수 값을 가지고 한계유선 영상의 방향성과 얻은 영상의 Lipschitz 지수 값이 같음을 알 수 있었다. 이는 웨이블릿을 이용한 새로운 데이터 해석의 가능성이 제시되었다고 할 수 있다.

향후 연구계획으로는 웨이블릿을 이용한 공간주파수 해석으로 국소적인 스펙트럼의 차이를 상관법의 계산영역을 결정하는 지표로서 사용하여 극대치를 이용한 정밀한 영상 재현과 데이터 압축에 관하여 연구할 예정이다.

### 참고 문헌

- [1] Mallat, S. G : A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation , IEEE, Pattern Annual. and Machine Intel, Vol.11, No.71989.
- [2] Deaubechies : Ten Lectures on Wavelet, Soci. For Indul & App. Mathematics, 1992.
- [3] M. R Banham, and B. J. Sullivan, "A wavelet transform image coding technique with quadtree structure," in Proc. IEEE Int, Conf. on ASSP, PP.653-656, Mar.1992
- [4] Y. Q. Zhang and S. Zafar, " Motion-compensated wavelet transform coding for color video compression," in Visual Comm. and Image Processing ' 91, vol 1605, pp. 301-316,1991.
- [5] A. S. Lewis and G. Knowles, " Image compression using the 2-D wavelet transform," IEEE Trans. on Image Processing, Vol. 1, No.2, pp244-250, Apr. 1992.
- [6]Okuno Taketossi. Wavelet Analysis of Visualized Image, Journal of The Visualization Society of Janpan. Vol. 17, Suppl., No. 1, 1997.
- [7] J.F. Muzy, E Barcy and A. Areneodo,, " Wavelet and Multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data", Physical Review Letters, Vol. 67, No. 25, pp. 3515-3518, 1991.
- [8] Yulla, D.C. and Webb, H. :Image restoration by the method of convex projection, Part 1 theory, IEEE Trans. on Medical Imaging , Vol. MI-1, No.2,, 1991, p.p.81-94
- [9] 澁谷陽ニ: 웨이블릿による表面マイクロ構造의 멀티프랙탈解析、 日本機械學會論文書 (A) Vo. 61, No. 591, 1995.
- [10] 福田森介 : 웨이블릿による多重パラメータ SAR 畫像의 프랙탈次元推定의 試み, 新學期報 SANE96-95, SAT96-143, 1997.
- [11] 表面映像(東京大學 生産技術 研究所의 公開映像 SIDBA), fractal 次元은 2.7.



박 영 식 (Young-Sik Park)

1979년 동아대학교 전자공학과 졸업

1990년 동아대학교 박사

1992년 동의대학교 컴퓨터과학과 교수

관심분야 : 영상처리 및 시스템 제어, 신경회로망



김 옥 규 (Okug-Gyu Kim)

1992년 2월 금오공과대학(공학석사)

2000년12월 오사까부립대 해양시스템공학(공학박사)

2001년8월-2005년 8월 밀양대학교 겸임교수

2006년6월-현재 오사까시립대 객원연구원  
관심분야 : 디지털신호처리, 웨이블릿 변환