Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol, 30, No. 2, pp.51－57, June 2007.

삼변수운용방침이 적용되는 M/G/1 대기모형에서 가상확률밀도함수를 이용한 busy period의 기대값 유도

이한교† · 오현승

한남대학교 산업경영공학과

Derivation of the Expected Busy Period for the Controllable M/G/1 Queueing Model Operating under the Triadic Policy using the Pseudo Probability Density Function

Hahn-Kyou Rhee† · Hyun-Seung Oh

Department of Industrial & Management Engineering, Hannam University

The expected busy period for the controllable M/G/1 queueing model operating under the triadic policy is derived by using the pseudo probability density function which is totally different from the actual probability density function. In order to justify the approach using the pseudo probability density function to derive the expected busy period for the triadic policy, well-known expected busy periods for the dyadic policies are derived from the obtained result as special cases.

Keywords : Expected Busy Period, Pseudo Probability Density Function, M/G/1

1. 서 론

서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 유무에 관계없이 서비스를 제공하는 server가 앞으로 도착할 고객에 대비하여 항상 준비상태에 있는 일반적인 대기모형(ordinary queueing model)은 server를 효과적으로 활용할 수 없기 때문에 비효율적이라 지적되어 왔다. 이와 같은 문제점을 해결하기 위해 제안된 방법들 중의 하나는 시스템 내부에 기다리는 고객이 없을 때에는 서비스창구를 폐쇄하여 server를 다른 업무에 활용하고, 추후 시스템 상태의 변화에 따라 폐쇄된 service창구를 재개할 수 있도록 개발된 조정 가능한 대기 모형(controllable queueing model)이다. 조정 가능한 대기모형에서는 폐쇄된 service 창구가 어떠한 시스템의 상태에서 service 창구가 재개되는지를 정확히 규정하는 운용방침(operating policy)의 역할이 매우 중요하다. 이러한 운용방침에는 시스템의 상태를 나타내는 입력변수의 수에 따라 분류할 수 있는데, 한 개의 입력변수가 포함되어 있는 단순 운용방침(simple operating policy), 두 개의 입력변수가 포함되어 있는 이변수 운용방침(dyadic operating policy)이 있다(Gakis, Rhee and Sivazlian[4], Rhee[9, 10, 11]) 혹은 Teghem[13]).

단순 운용방침에는 N 운용방침(N-policy), T 운용방침(T-policy) 그리고 D 운용방침(D-policy)이 중요한 역할을 하고 있으며 각각의 의미는 아래와 같다.

(i) N 운용방침 : Yadin and Naor[14]가 제안한 것으로, 일단 시스템 내부에 고객이 한 명도 없으면 server는

---

† 교신저자 hkrhee@hannam.ac.kr
※ 본 연구는 2006년 한남대학교 학술조성연구비 지원에 의하여 연구되었음.

서비스창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행하게 함으로서 server의 유휴시간을 활용하도록 한다. 따라서 창구가 폐쇄된 상태에서 시스템에 도착하는 고객은 즉시 서비스를 받을 수가 없다. 그러나 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 $N(N \geq 1)$이 되면 server는 수행중인 다른 업무를 즉시 중단하고 서비스창구를 재개하여 기다리는 고객을 상대로 서비스를 제공하기 시작하여 또다시 시스템 내부에 기다리는 고객이 없을 때까지 서비스를 제공한다.

(ii) T 운용방침 : Heyman[5]등이 제안한 운용방침으로, N 운용방침과 유사하게, 시스템 내부에 기다리는 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행하게 한다. 창구가 폐쇄된 후 T 단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 즉시 기다리는 고객에게 서비스제공을 재개하여 또 다시 기다리는 고객이 없을 때까지 서비스 제공이 계속된다. 그러나 T 단위시간이 경과된 다음에도 기다리는 고객이 없을 경우 다시 T 단위시간 또 다른 T 단위시간 등 최소한 한 명의 고객이 있을 때까지 창구가 폐쇄된다.

(iii) D 운용방침 : Balachandran and Tijms[1]이 제안한 것으로, 앞의 두 운용방침과 유사하게, 시스템 내부에 기다리는 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 창구가 폐쇄된 후, 시스템 내부에서 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 즉시 기다리는 고객에게 서비스제공을 재개하여 다시 기다리는 고객이 없을 때까지 서비스 제공이 계속된다.

단순 운용방침들은 일반적인 대기모형보다 시스템의 상황에 따라 server를 효과적으로 운용할 수 있지만 하나의 조건만으로 폐쇄된 서비스창구가 재개되도록 결정이 이루어지기 때문에 실제 상황에 적용의 어려움이 따를 수 있다. 따라서 이러한 문제점을 보완할 수 있도록 시스템 내부의 다양한 조건에 따라 폐쇄된 서비스창구가 재개될 수 있도록 유연성이 부여된 이변수 운용방침(dyadic policy)이 Gakis, Rhee, and Sivazlian[4]에 의해 제안되었다.

이변수 운용방침은 세 개의 단순 운용방침들 중에서 선정된 두 개가 특이하게 결합된 새로운 형태로 실제 상황에 활용될 가능성이 더 크다고 할 수 있다. 이러한 이변수 운용방침에는 $Min(N, T)$, $Max(N, T)$, $Min(N, D)$, $Max(N, D)$, $Min(T, D)$ 그리고 $Max(T, D)$ 운용방침이 있으며 $Min(N, T)$와 $Max(N, T)$ 운용방침은 다음과 같은 의미를 갖으며 나머지들도 유사한 의미를 갖는다 (Gakis, Rhee and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9, 11]).

(i) $Min(N, T)$ 운용방침 : 시스템 내부에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 서비스를 기다리는 고객의 수가 N명이 되어야 service가 재개되는 N 운용방침의 조건 혹은 $mT(m = 1, 2, 3 \cdots)$ 단위시간이 경과한 후 최소한 한 명의 고객이 도착되어야 service가 시작되는 T 운용방침의 조건 중 어느 것이나 먼저 만족이 되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 service를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $T \to \infty$이면 $Min(N, T)$ 운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \to \infty$이면 $Min(N, T)$ 운용방침은 T 운용방침과 동일하게 된다.

(ii) $Max(N, T)$ 운용방침 : 시스템 내부에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 service를 기다리는 고객의 수가 N명이 되어야 서비스가 재개되는 N 운용방침의 조건과 mT $(m = 1, 2, 3 \cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한 명의 고객이 도착되어야 서비스가 시작되는 T 운용방침의 조건을 처음으로 모두 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 service를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $T \to 0$이면 $Max(N, T)$운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \to 0$이면 $Max(N, T)$운용방침은 T 운용방침과 동일하게 된다.

사실 이변수 운용방침은 통계의 샘플링 이론에서도 찾아 볼 수가 있다. 예를 들면 Wald의 연속 샘플링 모델에서도 로트의 검수의 결과를 합격 또는 불합격으로 판단하는데 두변수를 사용한다. 설비 교체 관리 분야에서도 이변수 모형이 사용되는데 Sivazlian and Iyer[12]의 이변수 설비교체 운용 정책이 좋은 예가 된다. 대기이론 영역에서도 활발하게 연구가 진행되어 오고 있으며 Rhee and Sivazlian[11], Kella[7], Brill and Harris[2], Kella and Yachiali[6] 등을 예로 들 수 있다. 그러나, 이변수와 그 이상의 다변수 운용방침은 단순 운용방침보다 포괄적이고 광범위하게 여러 영역에 적용 가능한 장점이 있는 반면, 고려하는 대기모형의 특성치를 구하기 위해서는 많은 계산량과 어려움이 수반되는 단점이 있기 때문에 실제 적용에 한계성이 있다고 볼 수 있다. 따라서 시스템 분석에 필요한 특성치를 보다 간편하게 그리고 쉽게 얻을 수 있다면 다변수 운용방침이 적용되는 대기모형이 보다 활발하게 활용되어 복잡한 문제 해결에 촉

매 역할을 할 수 있는 것은 자명한 일이다. 보다 더 깊은 내용은 Gakis, Rhee, and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9, 10]의 연구를 참조하면 된다.

조정가능한 대기모형에서 추구하는 기본적인 목적은 정해진 운용방침이 적용되었을 경우 예상되는 총비용을 가장 적게 하는 입력변수의 최적해를 결정하는 것이다. 이러한 과정에 꼭 필요한 특성치들 중 하나가 busy period의 기대값이다. 여기에서 busy period는 server가 폐쇄되었던 서비스창구를 재개되어 처음으로 서비스 제공하기 시작한 순간부터 고객이 없어 서비스창구가 다시 폐쇄될 때까지의 시간간격을 말한다. 일반적으로 조정가능한 대기모형에 관련된 busy period의 기대값은 확률밀도함수를 사용하여 유도해야 하기 때문에 그 과정이 매우 복잡하고 어렵다. 특히 D 운용방침이 포함되어 있는 경우 더욱 그러하다. 이러한 문제를 해결하기 위해 Rhee[9]는 D 운용방침과 D 운용방침이 포함된 이변수 운용방침 즉 $Min(D, T)$, $Max(D, T)$, $Min(N, D)$ 그리고 $Max(N, D)$ 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 가상확률밀도함수라는 새로운 개념을 개발하여 보다 쉽게 busy period의 기대값을 유도방법을 개발하였다. 여기에서 가상확률밀도함수란 아래의 *가상가정*을 만족하는 확률밀도함수를 뜻하지만 D 운용방침과 D 운용방침이 포함된 이변수 운용방침이 적용되는 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 실제 확률밀도함수와는 전혀 다른 형태로 표현되지만 정확한 busy period의 기대값을 보다 쉽게 얻을 수 있다(Rhee[9]).

*가상 가정(**Pseudo Assumption**) : 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 D 운용방침이 적용되어도, N 혹은 T 운용방침의 경우처럼, busy period가 시작되는 순간 시스템에 도착해 있는 고객수만을 고려하여 busy period를 규명할 수 있도록, busy period가 시작되기 전에 도착한 고객들의 서비스 시간에 부여되는 조건을 무시하여, busy period가 시작 이후에 도착한 고객의 서비스시간과 동일하게 아무런 제약 조건이 없다고 가정한다.*

2. 연구 목적

단순 운용방침과 이변수 운용방침은 시스템의 상황에 따라 폐쇄되었던 서비스창구를 재개함으로서 일반적인 대기모형보다 server를 효율적으로 활용할 수 있지만 좀 더 많은 유연성을 확보하기 위해서는 단순 그리고 이변수 운용방침을 포함할 수 있는 삼변수 운용방침(triadic policy), 즉 $Min(N, T, D)$을 제안하며 아래와 같은 의미로 정의한다.

- $Min(N, T, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후 서비스를 기다리는 고객의 수가 N명이 되어야 service가 재개되는 N 운용방침의 조건, 혹은 mT $(m=1, 2, 3\cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한 명의 고객이 도착되어야 service가 시작되는 T 운용방침의 조건, 그리고 시스템 내부에서 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 서비스가 재개되는 D 운용방침의 조건 중 어느 것이나 먼저 만족이 되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 service를 제공하기 시작하여 다시 시스템 내부에 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D\rightarrow\infty$이면 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 $Min(N, T)$ 운용방침과 동일하고, 또한 만약 $N\rightarrow\infty$이면 $Min(D, T)$ 운용방침과 동일하며 $T\rightarrow\infty$이면 $Min(N, D)$ 운용방침과 동일하게 된다. 따라서 $Min(N, T, D)$ 운용방침은 $Min(N, T)$, $Min(D, T)$ 그리고 $Min(N, D)$ 운용방침의 일반형으로 볼 수 있다.

그러나 위에서 설명된 $Min(N, T, D)$ 삼변수 운용방침이 적용되는 경우 $M/G/1$ 대기모형에서 busy period의 기대값은 확률밀도함수를 사용하여 유도하기가 매우 어렵고 복잡하다. 따라서 이러한 문제의 해결을 위해 본 연구의 목적을 조정 가능한 $M/G/1$ 대기모형에 $Min(N, T, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period의 기대값을 단순 그리고 이변수 운용방침에 성공리에 적용되었던 새로운 개념의 가상확률밀도함수를 활용하여 유도하고자한다. 유도된 결과의 검증은 유도된 결과로 부터 이미 알려져 있는 이변수 운용방침에 따른 busy period의 기대값을 입력변수에 특정한 값을 대입해 도출함으로서 그 과정을 대신한다.

3. 연구대상 모형의 정의

본 연구의 대상은 안정상태(steady-state)에 있는 $M/G/1$ 대기모형이며 다음과 같은 관련된 사항을 가정한다.

(i) 고객들은 포아손 과정(Poisson process)에 따라 시스템에 도착하며, 연속된 두 고객의 도착 평균 시간 간격은 $1/\lambda$이다. 즉 t 단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 $N(t)$라고 하면, $n=0, 1, 2, \cdots$에 대해 다음이 성립한다.

$$P[N(t)=n]=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \qquad (1)$$

또한 식 (1)을 사용하여 다음을 정의한다.

$$H_n(T)=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \quad\cdots\cdots (2)$$

(ii) i번째 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수를 S_i라고 정의하며 S_i는 평균이 $1/\mu$ 인 상호 독립이며 동일한 분포라고 가정한다. S_i의 공통 확률밀도함수를 $f_S(\cdot)$로 표시한다. 또한 다음을 정의한다.

$$G^{(n)}(D)=\int_0^D [f_S(t)]^{*(n)}dt \quad\cdots\cdots (3)$$

여기에서 $[f_S(t)]^{*(n)}$은 $f_S(\cdot)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 뜻한다.

(iii) 기타 사항은 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 가정에 따른다.

(iv) B_O : 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수로 정의한다. B_O의 기대값을 $E[B_O]$로 나타내면 다음과 같이 주어진다(Kleinrock[8] or Conolly[3]).

$$E[B_O]=\frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} \quad\cdots\cdots (4)$$

Gakis, Rhee, and Sivazlian[4]의 결과에 따르면, 만약 단순 N 운용방침, T 운용방침 그리고 D 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period를 나타내는 확률변수를 각각 B_N, B_T 그리고 B_D라 하고, 또 이들의 기대값을 $E[B_N]$, $E[B_T]$ 그리고 $E[B_D]$ 정의하면 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_N]=NE[B_O] \quad\cdots\cdots (5)$$

$$E[B_T]=\frac{\lambda T\ E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}} \quad\cdots\cdots (6)$$

$$E[B_D]=E[B_O]\sum_{j=0}^{\infty}G^{(n)}(D) \quad\cdots\cdots (7)$$

또한 이변수 운용방침들 중에서 $Min(N,T)$, $Min(T,D)$ 그리고 $Min(N,D)$ 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period를 나타내는 확률변수를 각각 $B_{Min(N,T)}$, $B_{Min(T,D)}$ 그리고 $B_{Min(N,D)}$라 하고, 또한 이들의 기대값을 $E[B_{Min(N,T)}]$, $E[B_{Min(T,D)}]$ 그리고 $E[B_{Min(N,D)}]$로 정의하면 다음과 같이 주어진다(Rhee[9]).

$$E[B_{Min(N,T)}]=\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T) \quad\cdots\cdots (8)$$

$$E[B_{Min(N,D)}]=E[B_O]\sum_{n=0}^{N-1}G^{(n)}(D) \quad\cdots\cdots (9)$$

$$E[B_{Min(T,D)}]=\frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{j=1}^{\infty}H_j(T)\ G^{(j-1)}(D) \quad\cdots\cdots (10)$$

여기에서 $E[B_O]$는 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대값을 나타내며 식 (4)에 표현되어 있고 $H_n(T)$와 $G^{(n)}(D)$는 식 (2)과 식 (3)에 각각 정의되어 있다. D 단순 운용방침과 다양한 이변수 운용방침이 적용되는 조정 가능한 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대값 또한 Gakis, Rhee, and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9]의 결과로 확인할 수 있다.

4. $Min(N,T,D)$ 운용방침의 busy period의 기대값 유도

조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 적용되는 $Min(N,T,D)$ 운용방침의 분석을 위해, 이전의 busy period가 끝난 뒤 첫 $mT\,(m=0,1,2,\cdots)$ 단위시간이 경과할 때까지 고객이 한명도 시스템에 도착하지 않았으며, 다음의 T 단위시간 내에 최소한 한명의 고객이 도착했다고 가정하자. 이전의 busy period가 끝나고 mT 단위시간이 경과한 후, (i) $(m+1)T$ 단위시간이 경과되기 전에 시스템 내부에 기다리는 고객수가 이미 N명이 되고, 이들에게 소요되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간보다 적을 경우, (ii) $(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 전에 기다리는 고객의 수가 N명 보다 적으며, 이들에게 소요되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간보다 적을 경우, (iii) $(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 전에 기다리는 고객의 수가 N명보다 적지만 이들에게 소요되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간보다 클 경우, 새로운 busy period가 시작된다. 다시 말해, 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과되기 전에, 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 D 단위시간 보다 적고 N 번째 고객이 시스템에 도착하는 순간 새로운 busy period는 N 운용방침에 따라 시작된다. 또한, 이전의 busy period가 끝난 후 $(m+1)T$ 단위시간을 경과할 때까지 도착한 고객의 수가 N 명보다 적고 이들에게 필요한 서비스 시간의 합이 D 보다 적을 때에는 T 운용방침에 따라 $(m+1)T$ 단위시간이 경과되는 순간 새로운 busy period가 시작된다. 마지막으로, D 운용방침에 따라 새로운 busy period가 시작되는 시점은 이전의 busy period가 끝난 후 $(m+1)T$ 단위시간을 경과하기 전까지 도착한 고객의 수가 N명보다 적고 이들에게 필요한 서비스 시간의 합이 D 단위시간 보다 처음으로 크게 되는 순간이다. 이러한 여러 상황을 수식으로 표현하기 위해 아래의 확률을 정의한다.

(i) $P[TDN]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과된 뒤에 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 다음 N번째 고객이 도착할 확률,
(ii) $P[DTN]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과되기 전에 도착한 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 뒤 N번째 고객이 $(m+1)T$ 단위시간이 경과된 후 도착할 확률,
(iii) $P[NDT]$: 이전의 busy period가 끝난 후, N번째 고객이 도착한 다음, 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 뒤 $(m+1)T$ 단위시간이 경과될 확률,
(iv) $P[DNT]$: 이전의 busy period가 끝난 후, 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커진 뒤, N번째 고객이 시스템에 도착하고, 그 후 $(m+1)T$ 단위시간이 경과될 확률,
(v) $P[NTD]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과하기 전에 N번째 고객이 도착하고, $(m+1)T$ 단위시간이 경과된 후 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커질 확률,
(vi) $P[TND]$: 이전의 busy period가 끝난 후, $(m+1)T$ 단위시간이 경과한 후, N번째 고객이 도착하고, 그 후 모든 도착 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 처음으로 D 단위시간 보다 커질 확률.

그러면, $N \geq 1$인 경우 아래의 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}P[TDN] &= \sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=n+1}^{N+1}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \\ &\quad -\sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=N}^{N+1}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \\ &\quad +[H_N(T)-H_{N+1}(T)][G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)] \quad \cdots\cdots (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P[DTN] &= \sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=1}^{n}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \\ &\quad -[H_N(T)-H_{N+1}(T)][G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)], \quad \cdots\cdots (12)\end{aligned}$$

$$P[NDT] = \sum_{n=N}^{\infty}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]\sum_{j=N}^{n}[G^{(j-1)}(D)-G^{(j)}(D)] \quad (13)$$

$$P[DNT] = H_N(T)[G^{(0)}(D)-G^{(N-1)}(D)], \quad \cdots\cdots (14)$$

$$P[NTD] = \sum_{n=N}^{\infty}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]G^{(n)}(D), \quad \cdots\cdots (15)$$

$$P[TND] = [H_1(T)-H_N(T)]G^{(N-1)}(D), \quad \cdots\cdots (16)$$

$Min(N,T,D)$ 운용방침이 적용될 때, 새로운 busy period가 N 운용방침, T 운용방침 그리고 D 운용방침에 의해 시작될 확률을 각각 $P[N]$, $P[T]$ 그리고 $P[D]$으로 나타낸다고 가정하면, 위 식 (11) 부터 (16)까지 주어진 확률을 사용하면 $P[N]$, $P[T]$ 그리고 $P[D]$는 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}P[N] &= P[NDT]+P[NTD] \\ &= H_N(T)G^{(n-1)}(D), \quad N \geq 1 \quad \cdots\cdots (17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P[T] &= P[TND]+P[TDN] \\ &= \sum_{n=1}^{N}[H_n(T)-H_{n+1}(T)]G^{(n)}(D) \\ &\quad -[H_N(T)-H_{n+1}(T)]G^{(N)}(D), \quad N \geq 1 \quad \cdots\cdots (18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P[D] &= P[DNT]+P[DTN] \\ &= \sum_{n=1}^{N}H_n(T)[G^{(n-1)}(D)-G^{(n)}(D)], \\ &\quad -H_N(T)[G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)], N \geq 1 \quad \cdots\cdots (19)\end{aligned}$$

위의 식 (17), 식 (18) 그리고 식 (19)를 사용하면 아래의 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$P[N]+P[T]+P[D] = P[N(T) \geq 1] = 1-e^{-\lambda T}$$

$Min(N,T,D)$ 운용방침이 적용되는 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수를 $B_{Min(N,T,D)}$, 그리고 $B_{Min(N,T,D)}$의 가상확률밀도함수를 $ff_B(t)$라 정의하면, $ff_B(t)$는 $Min(N,T,D)$ 운용방침의 정의와 위의 식 (17), 식 (18) 그리고 식 (19)에서 주어진 $P[N]$, $P[T]$ 그리고 $P[D]$를 함께 사용하면 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}ff_B(t) &= \sum_{m=0}^{\infty}e^{-m\lambda T}\Big\{f_{B_o}^{*(N)}(t)H_N(T)G^{(N-1)}(D) \\ &\quad +\sum_{n=1}^{N}f_{B_o}^{*(n)}(t)\left[H_n(T)-H_{n+1}(T)\right]G^{(n)}(D) \\ &\quad -f_{B_o}^{*(N)}(t)\left[H_N(T)-H_{N+1}(D)\right]G^{(N)}(D) \\ &\quad +\sum_{n=1}^{N}f_{B_o}^{*(n)}(t)H_n(T)\left[G^{(n-1)}(D)-G^{(n)}(D)\right] \\ &\quad -f_{B_o}^{*(N)}(t)H_N(T)\left[G^{(N-1)}(D)-G^{(N)}(D)\right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-\lambda T}}\Big\{f_{B_o}^{*(N)}(t)H_{N+1}(T)G^{(n)}(D) \\ &\quad +\sum_{n=1}^{N}f_{B_o}^{*(n)}(t)\left[H_n(T)G^{(n-1)}(D)-H_{n+1}(T)G^{(n)}(D)\right] \quad (20)\end{aligned}$$

여기에서 함수 $f_{B_o}(t)$는 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period, 즉 확률변수 B_o 확률밀도함수를 나타내며 $f_{B_o}^{*(n)}(t)$는 $f_{B_o}(t)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 나타낸다. 위 식 (20)에 포함된 확률밀도함수 $ff_B(t)$와 $f_{B_o}(t)$을 각각 $\overline{ff_B}(s)$와 $\overline{f_{B_o}}(s)$라고 하자. 즉

$$\overline{ff_B}(s) = \int_0^\infty e^{-st} ff_B(t)\,dt$$

$$\overline{f_{B_o}}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_{B_o}(t)dt$$

식 (20)의 좌우변에 Laplace 변환을 취하면 아래와 같이 주어진다.

$$\overline{ff_{B_5}}(s) = \frac{1}{1-e^{-\lambda T}}\Big\{[\overline{f_{B_o}}(s)]^N H_{N+1}(T)G^{(N)}(D) + \sum_{n=1}^{N}[\overline{f_{B_o}}(s)]^n [H_n(T)G^{(n-1)}(D) - H_{n+1}(T)G^{(n)}(D)]\Big\} \tag{21}$$

$\frac{d}{ds}\overline{f_{B_o}}(s)|_{s=0} = -E[B_o]$가 성립하기 때문에 $B_{Min(N,T,D)}$의 기대값 $E[B_{Min(N,T,D)}]$는 식 (21)을 사용하여 다음과 같이 유도된다.

$$E[B_{Min(N,T,D)}] = -\frac{d}{ds}\overline{ff_{B_o}}(s)|_{s=0} = \frac{E[B_O]}{1-e^{-\lambda T}}\sum_{n=1}^{N}H_n(T)G^{(n-1)}(D) \tag{22}$$

여기에서 $E[B_O]$는 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대값을 나타내며 식 (4)에 표현되어 있고 $H_n(T)$와 $G^{(n)}(D)$는 식 (2)과 식 (3)에 각각 정의되어 있다. 또한 식 (22)을 사용하면 다음의 관계식이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$\lim_{D\to\infty} E[B_{Min(N,T,D)}] = E[B_{Min(N,T)}]$$
$$\lim_{N\to\infty} E[B_{Min(N,T,D)}] = E[B_{Min(T,D)}]$$
$$\lim_{T\to\infty} E[B_{Min(N,T,D)}] = E[B_{Min(N,D)}]$$

여기에서 $E[B_{Min(N,T)}]$, $E[B_{Min(T,D)}]$ 그리고 $E[B_{Min(N,D)}]$는 $Min(N,T)$, $Min(T,D)$ 그리고 $Min(N,D)$ 운용방침이 적용될 때 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대값을 뜻하며 식 (8), 식 (9), 그리고 식 (10)에 주어져 있으며, 또한 이들을 이용하면 N 운용방침, T 운용방침 그리고 D 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때의 busy period의 기대값, 즉 $E[B_N]$, $E[B_T]$ 그리고 $E[B_D]$을 식 (5), 식 (6), 그리고 식 (7)과 동일하게 유도할 수 있다. 이는 유도된 삼변수 $Min(N,T,D)$ 운용방침이 적용될 때의 busy period의 기대값이 정확하게 유도되었음을 의미한다. 다시 말해, 가상확률밀도함수를 $Min(N,T,D)$ 삼변수 운용방침에 적용하더라도 busy period의 기대값을 정확하게 유도할 수 있음을 확인하였으며, 또한 삼변수 운용방침은 단순 그리고 이변수 운용방침들의 일반적인 형태이기 때문에 보다 광범위한 영역에 적용할 수 있음을 확인하였다.

5. 결 론

본 연구 결과의 활용방안 및 기대효과는 다음 관점에서 살펴볼 수 있다. 첫째, 조정 가능한 대기모형에 다양한 다변수 운용방침, 특히 D 운용방침이 포함되어 있는 경우, 가상확률밀도함수를 활용하면 쉽게 busy period의 기대값이 유도됨을 확인하였다. 둘째, 이와 유사한 방법이 개발되면 다양한 조정가능한 대기모형의 중요한 특성치를 쉽게 유도할 수 있는 가능성을 제시하였으며, 마지막으로 다른 형태의 삼변수운용방침의 분석에도 활용할 수 있음을 확인하였다. 예를 들면

(i) $Max(N,T,D)$ 운용방침 : 시스템에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후, 서비스를 기다리는 고객수가 N명이 되어야 서비스가 재개되는 N 운용방침의 조건, $mT(m=0,1,2,\cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한명의 고객이 있어야 서비스가 재개되는 T 운용방침의 조건, 그리고 기다리는 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 최초로 규정된 값 D 단위시간보다 커야 서비스가 재개되는 D 운용방침의 조건이 처음으로 모두 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 고객이 없을 때까지 서비스 제공을 계속한다. 만약 $D\to 0$이면 $Max(N,T,D)$ 운용방침은 $Max(N,T)$ 운용방침과 동일하게 되며, 또한 $N\to 1$이면 $Max(T,D)$과 동일하게 되고, 그리고 $T\to 0$이면 $Max(N,D)$ 운용방침과 동일하게 된다.

(ii) $Med(N,T,D)$ 운용방침 : 시스템에 고객이 없으면 server는 창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행한다. 그 후, 서비스를 기다리는 고객수가 N명이 되어야 서비스가 재개되는 N 운용방침의 조건, $mT(m=0,1,2,\cdots)$ 단위시간이 경과할 때 최소한 한명의 고객이 있어야 서비스가 재개되는 T 운용방침의 조건, 그리고 기다리는 모든 고객에게 소요되는 서비스 시간의 합이 최초로 규정된 값 D 단위시간보다 커야 서비

스가 재개되는 D 운용방침의 조건들 중에서 처음으로 두 가지의 조건이 만족되는 순간 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 시작하여 다시 고객이 없을 때까지 서비스 제공을 계속한다. 만약 $D \to \infty$이면 $Med(N, T, D)$ 운용방침은 $Max(N, T)$ 운용방침과 동일하게 되며, 만약 $D \to 0$이면 $Min(N, T)$과 동일하게 된다. 유사하게, 만약 $N \to \infty$이면 $Max(T, D)$ 운용방침, 만약 $N \to 1$이면 $Min(T, D)$ 운용방침과 각각 동일하게 됨을 알 수 있다. 마지막으로, 만약 $T \to \infty$ 그리고 $T \to 0$이면 $Max(N, D)$ 그리고 $Min(N, D)$ 운용방침과 각각 동일하게 된다.

참고문헌

[1] Balachandran, K. R. and Tijms, H.; "On the D-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 9 : 1073-1076, 1975

[2] Brill, P. H. and Harris, C. M.; "Waiting Timrs for M/G/1 Queues with Service Time or Delay-Dependent Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 39 : 775-787, 1992.

[3] Conolly, B.; *Lecture Notes on Queueing Systems*, Halsted, NY, 1975.

[4] Gakis, K. G., Rhee, H. K., and Sivazlian, B. D., "Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with Simple and Dyadic Policies," *Stochastic Analysis and Applications*, 13(1) : 47-81, 1995.

[5] Heyman, D., "The T-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 23(7) : 775-778, 1977.

[6] Kella, O. and Yechiali, U.; "Priorities in M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 35 : 23-34, 1988.

[7] Kella, O.; "The Threshold Policy in the M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 36 : 111-123, 1989.

[8] Kleinrock, L.; *Queueing Systems*, Vol. 1: Theory, John Wiley & Sons, New York, NY, 1975.

[9] Rhee, H. K.; "Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies: Concepts and Application to the Dyadic Policies," *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, 23(4) : 729-739, 1997.

[10] Rhee, H. K.; "조정가능한 대기모형에 이변수 운용방침(Dyadic Policy)이 적용될 때 busy period의 기대값의 수리적 분석", 한남대학교 논문집, 32 : 141-153, 2002.

[11] Rhee, H. K. and Sivazlian, B. D.; "Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic (0,K,N,M) Policy," *Journal of Applied Probability*, 27 : 425-432, 1990.

[12] Sivazlian, B. D. and Iyer, S. N.; "A Dyadic Age-Replacement Policy for a Periodically Inspected Equipment Items Subject to Random Deterioration," *European Journal of Operational Research*, 6 : 315-320, 1981.

[13] Teghem, J.; "Control of the Service Process in a Queueing System," *European Journal of Operational Research*, 23 : 141-158, 1986.

[14] Y.adin, M. and Naor, P.; "Queueing System with Removable Service Station," *Operational Research Quarterly*, 14 : 393-405, 1963.