

PSC 교량의 3차원 시공 중 해석기법을 위한 준적합 쉘 요소 개발

Development of Quasi-Conforming Shell Element for the Three Dimensional Construction Stage Analysis of PSC Bridge

김기두† 변윤주* 김현기** 롬보이*** 송식**** 김영희*****

Kim, Ki-Du Byun, Yun-Joo Kim, Hyun-Ky Lomboy Gilson R. Suthasupradit Songsak Kim, Young-Hoe

(논문접수일 : 2007년 2월 26일 ; 심사종료일 : 2007년 5월 14일)

요 지

PSC 박스 교량은 콘크리트, 철근과 텐던으로 구성된 구조물로서 콘크리트의 인장 균열, 철근의 비선형 거동 등 재료의 비선형성 거동 특성 및 콘크리트의 시간 의존적 특성을 가지고 있는 복합 구조물이다. PSC 박스 교량의 시공 중 거동 특성을 고려하기 위하여 뼈대 요소(프레임 요소)를 이용한 시공단계의 설계가 수행되고 있다. 그러나 PSC 박스 교량 중 곡선 램프교 등의 경우는 교량의 외측 및 내측의 변위 및 응력 값이 현저히 다르다. 따라서 PSC 박스 교량의 텐던량 및 시공 중 긴장력이 외측 및 내측에서 다르게 산정되어야 함에도 불구하고 현실적으로는 계산이 불가능하여 같은 양의 텐던과 부적절한 긴장력을 사용하고 있어 시공 중 항상 안전사고에 노출되고 있다. 이러한 단점을 해결하기 위하여 3차원 해석이 필수적으로 요구 되고 있으며 본 연구에서는 PSC 박스 교량의 해석 기법에 필요한 준 적합 쉘 요소를 제안하고자 한다.

핵심용어 : PSC 교량, 쉘 요소, 시공단계해석

Abstract

The PSC box bridge constructed of concrete, reinforcing bar and tendon is a complex structure that exhibits tension cracks, nonlinear behaviour of steel and time dependent behaviour of concrete. The frame element is commonly used for construction stage analysis PSC bridges. However, the frame element does not show sufficient information when in the curved PSC box bridges. For the case of curved PSC bridges, the deformations in the inner and outer web are different. In this case, different jacking forces are required in the inner and outer webs. However, it is impossible to calculate different jacking forces if we use the frame element for construction stage analysis. In order to overcome this problem, the use of the shell element is essential for a three-dimensional construction stage analysis of PSC bridges. In the following, the formulation of a Quasi-conforming shell element and its application of PSC box girder bridge analysis are presented.

Keywords : PSC bridge, shell element, construction stage analysis

1. 서 론

PSC 박스 교량은 콘크리트, 철근과 텐던으로 구성된 구조물로서 콘크리트의 인장 균열, 철근의 비선형 거동 등 재료의 비선형성 거동 특성 및 콘크리트의 시간 의존적 특성을

가지고 있는 복합 구조물이다. 또한 텐던의 긴장력은 시공단계에서 탄성 수축, 마찰, 앵커슬립에 의한 즉각 손실과 크리프, 수축 및 릴랙세이션 등에 의한 시간의존 손실을 가지므로 시공도중의 설계검토가 필수적으로 요구되고 있다.

그러나 PSC 박스 교량 중 곡선 램프교 등의 경우는 교량

† 책임저자, 정회원 · 건국대학교 사회환경시스템공학과 교수
Tel: 02-2049-6074 ; Fax: 02-452-8619
E-mail: kimkd@konkuk.ac.kr

* 정회원 · (주)동호 특수사업본부장 부사장

** 정회원 · (주)동호 전산개발실 과장

*** AIT 박사 (Lomboy, Gilson R.)

**** 건국대학교 사회환경시스템공학과 박사과정

***** 건국대학교 사회환경시스템공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 8월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 10월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

의 외측과 내측에서의 변위 및 응력 값이 현저히 다르다. 따라서 PSC 박스 곡선교량의 텐던량 및 시공 중 긴장력이 외측 및 내측에서 다르게 산정되어야 함에도 불구하고 현실적으로는 계산이 불가능하여 같은 양의 텐던과 부적절한 긴장력을 사용하고 있어 시공 중 항상 안전사고에 노출되고 있다. 또한 프레임 요소를 이용하면 부반력 계산이 용이하지 못하기 때문에 시공 후 유지관리 단계에서 교좌장치와 상부 구조와의 이격이 발생하는 등 부실시공이 발생하는 경우가 있다.

이러한 단점을 해결하기 위해서는 교량의 수평과 수직 프리스트레싱 텐던을 동시에 고려할 수 있는 쉘 요소에 의한 3차원 해석이 필수적으로 수행되어야 하지만 3차원 해석 요소 기술 개발은 매우 어려운 과정이 수반되는 과제이며, 또한 요구되는 텐던의 형상을 자동으로 배치할 수 있는 모델링 기법의 개발이 병행되어야만 한다. 본 연구에서는 3차원 해석에 의한 정밀한 PSC 교량의 시공 중 해석기법 개발을 위하여 PSC 쉘 요소의 정식화를 제시하고 그 결과를 검증하고자 한다.

많은 쉘 요소들이 Ahmad 등(1970)이 제안한 '퇴화 쉘 요소' 이론에 근거하여 개발되어 사용되고 있다. 이러한 쉘 요소들은 두꺼운 판과 쉘 문제에서는 효과적이었으나 판과 쉘의 두께가 얇아짐에 따라 전단 잠김 현상이 발생하게 되면서 정확도가 급격히 저하되는 현상이 있다. 많은 연구자들에 의해 이러한 요소에서 전단 잠김 현상을 극복하기 위한 노력이 수행되었다. Zienkiwicz 등(1971)에 의해 감차 적분법이 전단 잠김 현상을 극복하기 위한 해법으로 제안되었다. 다른 방법으로는 적용한 가정된 자연 변형률 방법이 있다. 가정 변형률 방법은 Dvorkin(Bathe 등, 1986), Huang 등(1986)에 의해 비선형 해석에 사용되었다. Kim 등(2003)은 순수변위 8절점 쉘 요소의 후좌굴에 관한 연구를 수행하였다. 기존의 4절점 쉘 요소의 잠김 현상을 해결한 가정된 변형률 방법은 가우스 점에서 계산된 응력 값이 절점으로 변환되는 과정이 필요하다. 그러나 구조물의 정확한 응력을 구하기 위한 변환과정이 매우 복잡하고 근사적이므로 설계 목적으로 이용되는 교량 구조물에는 효과적이지 않다.

기존에 사용되고 있는 가정 변형률 4절점 쉘 요소는 일반적인 4절점 쉘 요소의 전단 잠김을 개선하였으나 면내거동을 포함하는 문제를 해석할 때 수렴 속도뿐만 아니라 정확도에 문제가 있었다. 그리고 이러한 요소는 강성행렬 구성이 3차원이어서 면내거동 및 휨 거동을 분리할 수가 없어서 면내거동을 항상 시키는 데에는 한계가 있었다. 이러한 한계점을 개선한 전단 잠김 및 면내 잠김 현상을 극복하기 위하여 대체 변형률 4절점 준적합(Quasi-Conforming) 쉘 요소(Kim

등, 2003; 2006)가 개발되어 대변형 탄소성 해석을 수행할 수 있게 하였다.

본 연구에 제안된 준적합 쉘 요소는 합 응력 쉘 요소의 정식화를 사용하여서 면내거동, 휨 거동 및 전단거동의 분리가 가능하다. 얇은 판 및 쉘 구조에서 발생하는 잠김 현상, 휨 거동 및 면내거동을 준적합 기법을 이용하여 해결하였다. 준적합 쉘 요소의 강성 행렬은 String Net Function의 고차 형상함수를 사용하여 요소의 경계를 따라 적분하였으며, 그 결과 가정된 변형률을 사용하는 쉘 요소보다 뛰어난 휨 거동을 나타내고 있다. 가우스 적분법을 사용하는 대체 변형률 쉘 요소는 절점에서 응력을 계산하기 위한 추가적인 보간 방법이 필요하나 준적합 쉘 요소는 해석적인 방법을 사용하여 모든 응력이 자동적으로 절점에서 계산이 되므로 연산 속도도 개선되었다. 따라서, 이러한 준적합 요소를 이용하여 PSC 교량 구조물의 시공 단계 설계에 활용하고자 한다.

현재까지는 PSC 교량의 시공단계 해석이 프레임요소를 이용하여 연구되어 왔으며, 이러한 거동 특성을 고려하기 위하여 현재 PSC 박스 교량은 뼈대 요소(프레임 요소)를 이용한 시공단계의 설계를 수행하고 있다(이계호 등, 1994; 이재석 등, 1992; 윤영수 등, 1998;곽효경 등, 1999; 이재석 등, 2007). 이 요소에 의한 설계는 교량 전체 구조를 단순한 뼈대 요소로 가정하여 해석하는 계산이다. 그러나 본 연구에서 PSC 직선교 및 곡선교의 시공단계에서 발생할 수 있는 문제점을 해결하고 더욱 정확하고 정밀한 구조해석을 위하여 PSC 교량의 텐던의 배치를 고려한 준적합 쉘 요소의 정식화를 제안하고자 한다. 그리고 준 적합 쉘 요소의 콘크리트 재료 모델에서 ACI 코드 및 CEB/FIB 코드에 의한 크리프 및 건조수축의 비선형 특성을 고려한 수치 예제 및 쉘 요소를 이용한 3경간 연속 교량의 시공 중 해석 과정 예제를 제안하고자 한다.

2. 준적합 PSC 쉘 요소의 개발

본 연구에 사용되는 쉘 요소는 준적합 이론을 이용하여 정식화한 4 절점의 비선형 요소이다. 유한 변위와 회전을 조절하기 위하여, 순수변형이론(Co-rotational displacement theory)이 도입하였다. 극 분해 이론(Polar Decomposition Theory)이 순수변형 이론의 정식을 유도하기 위해 사용된다. 여기서 거동은 강제 회전에 의한 강제 변위의 분해나 또는 강제 변위에 의한 강제 회전의 분해로서 설명된다. 그러므로, 변형은 총 절점 변위로부터 강제 회전을 제거함으로써 결정된다. 이때 남겨지는 변위를 순수 변위라고 한다. 기하학적 비선형 정식은, 기하학적 강성의 면내 응력과 휨 그리고 횡 전단 응력

을 포함하게 될 그린(Green) 변형률텐서의 정의를 사용함으로써 유도된다. 강성 행렬은 가우스 적분을 사용하지 않고 해석적인 적분을 사용했다.

2.1 기하학적 형상

국부 수직 좌표계(r, s, t)가 4절점 쉘 요소의 공간적인 상태를 설명하는 데 사용된다. 이때 원점은 요소의 기하학적 중심에 있게 된다. 벡터 V_r, V_s, V_t 를 기본으로 하는 국부 좌표는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V_t = l_1 \times l_2, \quad V_s = \frac{[(V_t \times l_1) + l_2]}{\|(V_t \times l_1) + l_2\|}, \quad V_r = V_s \times V_t \quad (1)$$

l_1 과 l_2 는 그림 1에 나타난 쉘 중앙표면의 반대쪽 중앙점을 지나는 단위 벡터이다.

요소의 국부좌표에서 전체 좌표계로 변환하기 위하여, 절점 i 에서 증분하는 변위 변수인 $\Delta \bar{u}_i = (\Delta \bar{u}_i \ \Delta \bar{v}_i \ \Delta \bar{w}_i \ \Delta \varphi_{ri} \ \Delta \varphi_{si} \ \Delta \varphi_{ti})^T$, $\Delta \varphi_i = (\Delta \bar{U}_i \ \Delta \bar{V}_i \ \Delta \bar{W}_i \ \Delta \theta_{xi} \ \Delta \theta_{yi} \ \Delta \theta_{zi})^T$ 의 변환은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \varphi \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} T^T & 0 \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{U} \\ \Delta \theta \end{Bmatrix}_i = T_{gi}^T \begin{Bmatrix} \Delta \bar{U} \\ \Delta \theta \end{Bmatrix}_i \quad (2)$$

변환 매트릭스 T 는 다음과 같다.

$$T = [V_r \ V_s \ V_t] \quad (3)$$

2.2 순수변형 변위

초기 국부 좌표계 ${}^0r, {}^0s, {}^0t$ 에서 현재 국부좌표계 ${}^t_r, {}^t_s, {}^t_t$ 로의 변환은, 국부좌표계에서 강체 회전에 대한 직교 회전 때

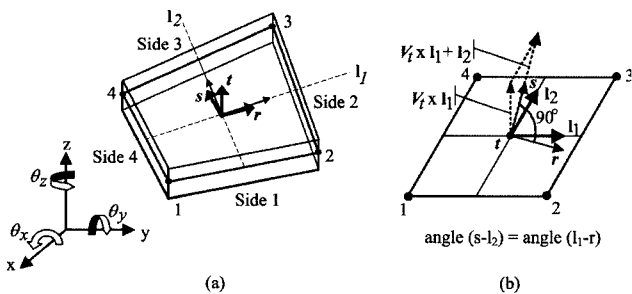


그림 1 (a) 4절점 쉘 요소의 중앙면의 기하형상과 국부 좌표 (b) 국부 좌표를 기본으로 하는 요소의 평면도

트릭스 $R(\hat{\varphi})$ 에 의해 구해진다. $R(\hat{\varphi})$ 는 순환되지 않는 위치 벡터를 가진 어떤 점을 순환되는 새로운 위치 벡터로의 변환 매트릭스로 여겨질 수 있다.

$$T = R(\hat{\varphi}) \cdot {}^0T \quad (4)$$

순수 변형과 관련된 순수변형 절점 변위 (\hat{u})는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{u} = (X_i - X_c) - R(\hat{\varphi})({}^0X_i - {}^0X_c) \quad (5)$$

극분해이론에 따르면, 총 회전은 횡전단 변형 $\hat{\varphi}$ 에 의해 강체 회전 $\hat{\varphi}$ 로 분해된다. 즉

$$R(\varphi) = R(\hat{\varphi})R(\hat{\varphi}) \quad (6)$$

국부 성분 $\hat{\varphi}$ 는 단면의 평균 전단 변형으로 정의될 수 있다. 즉 $\hat{\varphi} = \{0 \ \hat{\varphi}_s \ \hat{\varphi}_t\} = \{0 \ \hat{\varepsilon}_{rt} - \hat{\varepsilon}_{rs}\}$ 이다. 회전 벡터량 ($\hat{\varphi}_i < 0.02$)에 충분히 작을 때, 순환하는 절점 회전 $\hat{\varphi}_i$ 는 총 절점 회전으로부터 강체회전 ($\hat{\varphi}$)를 제거함으로써 얻어질 수 있다. 이를 대략적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{\varphi}_i = \varphi_i - \hat{\varphi} \quad (7)$$

순수 변형 이론과 관련된 운동학적인 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u} &= \Delta \hat{u} + t(\Delta \hat{\varphi}_s + 1/2 \Delta \hat{\varphi}_r \Delta \hat{\varphi}_t) \\ \Delta \hat{v} &= \Delta \hat{v} - t(\Delta \hat{\varphi}_r - 1/2 \Delta \hat{\varphi}_r \Delta \hat{\varphi}_t) \\ \Delta \hat{w} &= \Delta \hat{w}(r, s) \end{aligned} \quad (8)$$

2.3 변형률 변위 관계

식 (8)에 주어진 순수변형 동적 관계식을 그린(Green)변형률 텐서 식에 대입하면, 중립면에서의 면내 증분 변형률 $\Delta \hat{\varepsilon}_m = \{\Delta \hat{\varepsilon} \ \Delta \hat{\varepsilon}_s \ \Delta \hat{\varepsilon}_{rs}\}^T$, 면내 휨 변형률 $\Delta \hat{\varepsilon}_b = \{\Delta \chi_r \ \Delta \chi_s \ \Delta \chi_{rs}\}^T$ 그리고 횡 전단 변형률 $\Delta \hat{\varepsilon}_q = \{\Delta \hat{\varepsilon}_{rs} \ \Delta \hat{\varepsilon}_{st}\}^T$ 를 얻을 수 있다. 증분 면내, 휨 그리고 횡 전단 변형률은 다음과 같이 선형과 비선형으로 나눌 수 있다. 즉 $\Delta \hat{\varepsilon}_m = \Delta \hat{\varepsilon}_m + \Delta \hat{\varepsilon}_m^m$, $\Delta \hat{\varepsilon}_b = \Delta \hat{\varepsilon}_b + \Delta \hat{\varepsilon}_b^b$, $\Delta \hat{\varepsilon}_q = \Delta \hat{\varepsilon}_q + \Delta \hat{\varepsilon}_q^q$ 이다.

2.4 구성 방정식

쉘 요소는 두께에 대한 응력의 적분으로 하여 얻어지는 면력 N , 모멘트 M , 횡 전단력 Q 에 의하여 거동을 한다.

강체 매트릭스는 다음의 형식을 갖는다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \\ \Delta Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_m & 0 & 0 \\ 0 & D_b & 0 \\ 0 & 0 & D_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{e}_m \\ \Delta \hat{e}_b \\ \Delta \hat{e}_s \end{Bmatrix} \quad (9)$$

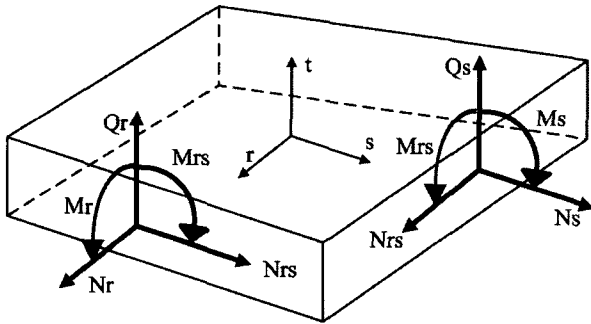


그림 2 쉘 요소의 응력

D_m , D_b 그리고 D_q 는 각각 휨, 신장 그리고 횡 전단 강체 매트릭스이다.

$$D_m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad D_q = \frac{5Eh}{12(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 M , N 그리고 Q 는 각각 모멘트, 면내 합 응력 그리고 횡 전단 합응력 벡터를 나타내고 h 는 요소의 두께이다.

2.5 요소 선형 강성 매트릭스

비선형을 고려하기 위해, 요소 접선 강성은 선형 강성 매트릭스와 기하 강성 매트릭스로 구성되어야 한다. 현재의 요소에 대해 이 두 매트릭스를 결정함에 있어 준적합 기법, 즉 QCT가 사용된다. 준적합 요소의 시작은 요소 변형률 장을 정해지지 않은 변형률 변수의 항에 보간하는 것이다. 변형률 Δe 는 대략 다음과 같다.

$$\Delta \hat{e} \approx P \Delta \alpha \approx B \begin{Bmatrix} \Delta \hat{u} \\ \Delta \hat{\varphi} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

P 는 변형률 보간법으로 다항식으로 선택된다. $\Delta \alpha$ 는 미지의 변형률 변수이고, B 는 변형률-변위 매트릭스이다.

$$\Delta \alpha = A^{-1} G \begin{Bmatrix} \Delta \hat{u} \\ \Delta \hat{\varphi} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서

$$A = \int_{\Omega} (P^T P) d\Omega \quad (13)$$

그리고

$$G \begin{Bmatrix} \Delta \hat{u} \\ \Delta \hat{\varphi} \end{Bmatrix} = \int_{\Omega} (P^T \Delta \hat{e}) d\Omega \quad (14)$$

요소 변위의 항에 변형률을 정의하기 위해서, 식 (12)의 α 를 식 (11)에 대입하면

$$\Delta \hat{e} = B \begin{Bmatrix} \Delta \hat{u} \\ \Delta \hat{\varphi} \end{Bmatrix} = P A^{-1} G \begin{Bmatrix} \Delta \hat{u} \\ \Delta \hat{\varphi} \end{Bmatrix} \quad \text{또는}$$

$$B T_g^T \begin{Bmatrix} \Delta \hat{U} \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} = P A^{-1} G T_g^T \begin{Bmatrix} \Delta \bar{U} \\ \Delta \theta \end{Bmatrix} \quad (15)$$

2.6 선형 변형률에 인한 강성 매트릭스

강성 매트릭스는 다음의 표현으로 얻어진다.

$$\int_{\Omega} (\delta \Delta \hat{e}_m^T D_m \Delta \hat{e}_m + \delta \Delta \hat{e}_b^T D_b \Delta \hat{e}_b + \delta \Delta \hat{e}_q^T D_q \Delta \hat{e}_q) dr ds \quad (16)$$

선형 휨, 면내 그리고 횡방향 전단 변형률은 다음과 같이 가정된다.

$$\Delta \hat{e}_b = P_b \Delta \alpha_b = \begin{bmatrix} 1 & r & s & rs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r & s & rs \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_{14} \\ \vdots \\ \Delta \alpha_{11} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\Delta \hat{e}_m = P_m \Delta \alpha_m = \begin{bmatrix} 1 & s \\ & 1 & r \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_{14} \\ \vdots \\ \Delta \alpha_{18} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\Delta \hat{e}_q = P_q \Delta \alpha_q = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \alpha_{12} \\ \Delta \alpha_{13} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$\Delta \alpha_b$, $\Delta \alpha_m$ 그리고 $\Delta \alpha_q$ 는 식 (12)에서 정의된다. 매트릭스 A_b , A_m 그리고 A_q 는 r 과 s 의 다항식으로 구성되고, 적

분이 가능하다. G_b 와 G_q 는 경계 적분을 사용하여 정의할 수 있다. G_b 와 G_q 를 결정하는 데 사용하는 수직변위 Δw 와 요소 변에 수직인 회전각 $\Delta \varphi_n$ 에 의존하는 스트링 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \widehat{\varphi}_n(\xi) = & -\frac{3}{2L} \lambda(1-\delta^2) \Delta \widehat{w}_i + \frac{1}{4} [2-2\xi-3\lambda(1-\delta^2)] \Delta \widehat{\varphi}_{ni} \\ & + \frac{3}{2L} \lambda(1-\delta^2) \Delta \widehat{w}_j + \frac{1}{4} [2+2\xi-3\lambda(1-\delta^2)] \Delta \widehat{\varphi}_{nj} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta \widehat{w}(\xi) = & \frac{1}{2} \left[1-\xi + \frac{\lambda}{2} (\xi^3 - \xi) \right] \Delta \widehat{w}_i + \frac{1}{4} [1-\xi^2 + \lambda(\xi^3 - \xi)] \\ & \frac{L}{2} \Delta \widehat{\varphi}_{ni} + \frac{1}{2} \left[1+\xi - \frac{\lambda}{2} (\xi^3 - \xi) \right] \Delta \widehat{w}_j \\ & + \frac{1}{4} [-1+\xi^2 + \lambda(\xi^3 - \xi)] \frac{L}{2} \Delta \widehat{\varphi}_{nj} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$0 \leq L \leq S, \quad -1 \leq \xi \leq 1 \text{ 일 때} \quad \xi = \frac{1}{S}(2L-S) \quad (22)$$

$$\lambda = \frac{1}{1+12 \frac{D_{b11}}{D_{q11} L^2}} \quad (23)$$

요소 변 접선에 대한 회전의 표현은 다음과 같다.

$$\Delta \widehat{\varphi}_i(\xi) = \frac{1}{2} (1-\xi) \Delta \widehat{\varphi}_{ii} + \frac{1}{2} (1+\xi) \Delta \widehat{\varphi}_{ij} \quad (24)$$

D_{b11} , D_{q11} 그리고 L 은 각각 횡 강체의 첫째 구성성분, 횡 전단 강체의 첫째 구성성분, 그리고 변의 길이이다. S 는 절점 i 에서 0, 절점 j 에서 L 인 변 좌표이다.

면내 변형률에서 G_m 을 결정하는 스트링 함수는

$$\begin{aligned} \Delta \widehat{u} = & \frac{1}{2} (1-\xi) \Delta \widehat{u}_i + \frac{1}{2} (1+\xi) \Delta \widehat{u}_j, \\ \Delta \widehat{v} = & \frac{1}{2} (1-\xi) \Delta \widehat{v}_i + \frac{1}{2} (1+\xi) \Delta \widehat{v}_j \end{aligned} \quad (25)$$

드릴링(drilling) 강성을 고려하기 위해, 중앙면에 수직의 회전으로 인한 변형률 에너지를 추가된다.

$$\pi_t = k_t D_{m33} h \int_{\Omega} \left[\Delta \widehat{\varphi}_t - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta \widehat{v}}{\partial r} - \frac{\partial \Delta \widehat{u}}{\partial s} \right) \right]^2 dr ds \quad (26)$$

QCT에 적용 시, $\Delta \widehat{\varepsilon}_d = \Delta \varphi_t - (1/2) (\partial \Delta \widehat{v} / \partial r - \partial \Delta \widehat{u} / \partial s)$ 와 일정한 변형률장이 가정되면, $P_d = 1$ 이다. D_{m33} 은 면내 강성을 행렬 D_m 으로부터 얻어지고, 수치 계산을 위한 페널티 계수 k_t 는 10을 사용한다.

최종적으로 변위와 선형 변형률의 관계가 성립함으로써 선형 변형률에 의한 탄소성 요소 강성 행렬 K_L 은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} K_L = & T_g \int_A \left(B_m^T D_m B_m + B_b^T D_b B_b + B_q^T D_q B_q \right) dr ds T_g \\ = & T_g \left\{ G_m^T A_m^{-T} \left[\int_{\Omega} P_m^T D_m P_m dr ds \right] A_m^{-1} G_m + \right. \\ & \left. \left\{ G_b^T A_b^{-T} \left[\int_{\Omega} P_b^T D_b P_b dr ds \right] A_b^{-1} G_b + \right. \right. \\ & \left. \left. G_q^T A_q^{-T} \left[\int_{\Omega} P_q^T D_q P_q dr ds \right] A_q^{-1} G_q \right. \right. \\ & \left. \left. T_g + k_t D_{m33} h T_g \left\{ G_d^T A_d \left[\int_{\Omega} P_d P_d dr ds \right] A_d^{-1} G_d \right\} T_g^T \right. \right. \end{aligned} \quad (27)$$

2.7 기하강성행렬

기하강성행렬은 다음 식으로부터 얻어진다.

$$\int_{\Omega} (N \delta \Delta \varepsilon_m + M \delta \Delta \varepsilon_b + Q \delta \Delta \varepsilon_q) dr ds \quad (28)$$

식 (28)은 행렬 형태로 쓰여질 수 있으며, QCT가 적용될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (N^T \delta \Delta \varepsilon_m + M^T \delta \Delta \varepsilon_b + Q^T \delta \Delta \varepsilon_q) dr ds \\ & = \int_{\Omega} \delta \Delta \eta^T F_g \Delta \eta dr ds \end{aligned} \quad (29)$$

변형률 벡터 $\Delta \eta$ 와 절점력 행렬 F_g 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \eta = & \left[\frac{\partial \Delta \widehat{u}}{\partial r} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{u}}{\partial s} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{v}}{\partial r} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{v}}{\partial s} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{w}}{\partial r} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{w}}{\partial s} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{\varphi}_r}{\partial r} \right. \\ & \left. \frac{\partial \Delta \widehat{\varphi}_r}{\partial s} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{\varphi}_s}{\partial r} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{\varphi}_s}{\partial s} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{\varphi}_t}{\partial r} \quad \frac{\partial \Delta \widehat{\varphi}_t}{\partial s} \quad \Delta \widehat{\varphi}_r \Delta \widehat{\varphi}_s \Delta \widehat{\varphi}_t \right]^T \end{aligned} \quad (30)$$

일정한 변형률장은 비선형 변형률장 성분에 대해서 가정된다.

$$\Delta \eta = P_g \Delta \alpha_g = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha_{g1} \\ \vdots \\ \Delta \alpha_{g15} \end{bmatrix} \quad (31)$$

최종적으로 고려되는 PSC 셸 요소는 기저 벡터로 확립된 국부 좌표계 사이의 관계를 표시한 셸 요소에 긴장재를 설치하여 그림 5에 나타내었다.

3. 수치 예제

다음 예제에서는 XFINAS(2006)의 보 요소와 셸 요소를 이용하였고, 각 경우에서의 정확도 및 차이점을 조사하였으며 그 결과를 나타내었다. 본 연구의 검증 예제로서 여러 하중 조건하에서 크리프 및 릴랙세이션 상태에서의 셸 요소를 검증하였다. 여기서 비교에 사용된 코드는 ACI 코드 및 CEB/FIB이다. 본 연구의 교량의 수치예제로서 Ketchum(1986)에 의한 3경간 연속교(그림 6)를 모델링하였다. 이 예제에서는 시공중 해석단계에 긴장재의 순간 손실(탄성변형, 정착장치 활동, PS 강재와 쉬스의 마찰)과 시간 단계 손실(크리프, 건조수축, PS 강재의 릴랙세이션)이 고려되었다. 그리고 사용된 요소는 보 요소와 셸 요소이며, 각 경우에서의 차이점을 살펴보았다. 그림 7에는 PSC 교량의 텐던의 특성을 나타내었다.

시간 의존해석을 위한 재료특성은 다음과 같다. 콘크리트는 극한 강도 $f_c'(28) = 5000psi$, 극한 크리프 계수 $C(\infty) = 2.35$, 극한 건조수축 변형률 $\epsilon(\infty) = 0.0008$ 그리고 단위하중 $W = 155pcf$ 를 갖는다. 크리프와 건조수축 그리고 재령의 시간 의존적인 전개는 이 값들에 대한 ACI 209R-92에서 권장하는 값들을 사용하게 된다. 순 철근 보강재의 탄성계수 $E = 29,000,000psi$ 이다. 프리스트레싱 철근은 탄성계수 $E = 28,000,000psi$ 이고, 극한 강도 $f_s' = 270,000psi$, 릴랙세이션 계수 $R = 10$, 곡률 마찰 계수 $\mu = 0.25/radian$, 파상계수 $k = 0.0004/foot$ 그리고 $1/4inch$ 의 정착단 슬립을 갖는다.

먼저 보 요소를 사용하였을 때는 전체 교량이 대칭이므로 교량의 반만 모델링한다. 43개의 절점과 42개의 요소 그리고 30개의 프리스트레싱 긴장재를 설정하였다. 효율적인 긴장재의 거동을 위해 교대 근처에 추가적인 절점을 더 설정하였다. 보 요소의 경계조건은, 교대에서 롤러 지점을 만들어 수직 변위를 구속하였고 중앙 경간의 절점은 대칭점이 되고 수직 변위는 구속하지 않았다. 각 캔틸레버 세그먼트는 하나의 보 요소로 모델링한다. 이 시공은 27년(10,000일)의 시간 의존적 해석을 위해 20단계의 해석을 수행한다.

셸 요소도 보 요소와 마찬가지로 전체 교량의 대칭성을 이용해, 교량의 1/4을 모델링하였다. 이 모델은 218개의 절점과 169개의 요소 그리고 70개의 프리스트레싱 긴장재를 갖는다. 보 요소와 마찬가지로 교대 근처에 추가적인 절점을 더 설정한다. 교각은 4개의 절점으로 나누어지고, 교각 하부의 경계조건은 고정이 된다. 각 거더 세그먼트는 총 4개의

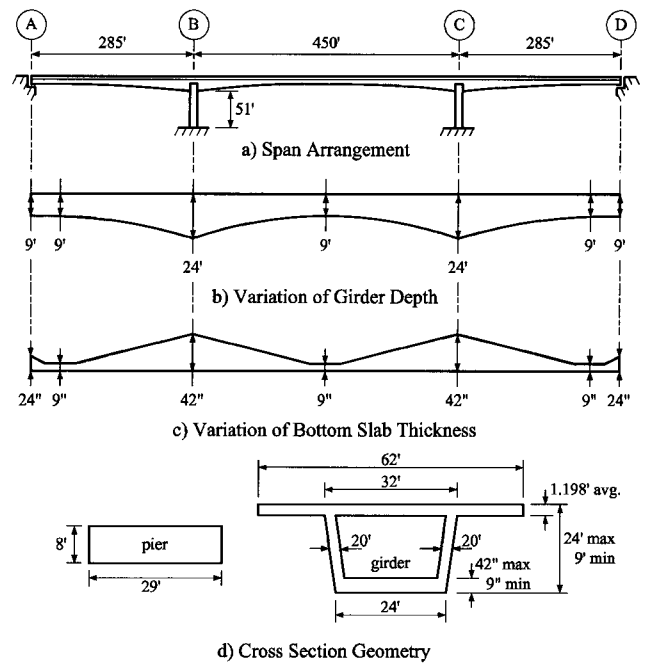


그림 6 3경간 연속 캔틸레버 교량의 기하학적 형상

셸 요소로 모델링되는데, 그 각각은 상부 슬래브에 두 개, 복부와 하부 슬래브에 각각 하나씩의 요소로 이루어진다. 하부 슬래브는 길이에 따라서 변하는 두께를 갖는데, 해석 시 일

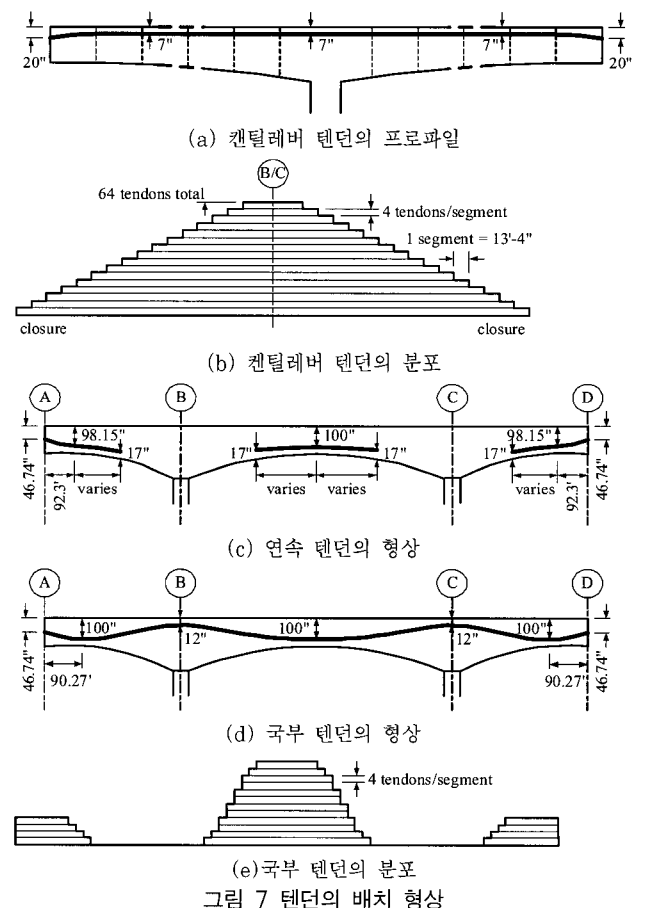


그림 7 텐던의 배치 형상

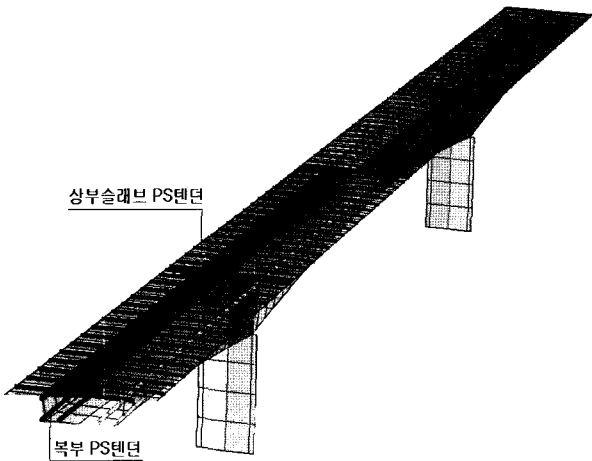


그림 8-1 준적합 셀 요소를 이용한 교량의 프리스트레싱 텐던 배치 모델링

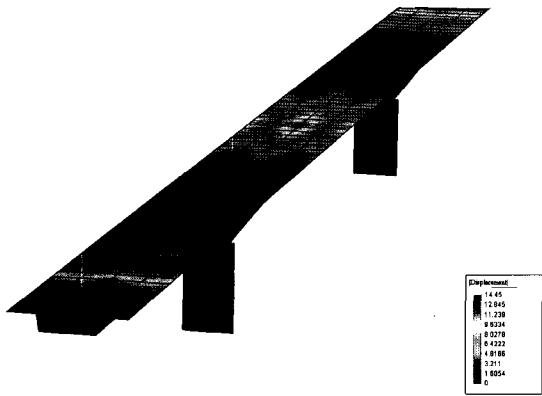


그림 8-2 준적합 셀 요소를 이용한 교량모델의 변형된 형상

정한 두께를 가정하여 둔다. 다음 그림은 해석 모델을 나타내고 있다.

변위 해석을 한 시공단계는 1) 거더 세그먼트가 시공될 때, 2) 캔틸레버 세그먼트가 완공되었을 때, 3) 전체 시공이 완료되었을 때, 4) 27년이 지난 후로 나누어서 해석을 하였다. 보 모델에 대한 시공단계별 수직 변위를 그림 9에 나타내었다. 셀을 이용한 결과는 그림 10~11에 나타내었다. 그림 (10~11)은 거더 단면의 (a) 상부 슬래브의 중심점, (b) 하부 슬래브의 중심점, (c) 상부 슬래브의 가장자리, (d) 복부의 상·하부 평균지점에서의 변위를 나타낸다. 그림 12에 있는 수직 변위는 캠버를 시공하지 않은 상태에서 거더의 변위를 나타낸다. 그러므로 마지막 세그먼트에서 거더단면에 큰 불연속면이 생겼다. 캠버시공을 하면 그러한 문제점을 해결할 수 있다. 이 결과들은 Ketchum(1986)에 의해 밝혀진 것과 유사하지만, 차이점은 전단변형을 포함하고 서로 다른 코드의 계수 사용에 있다. 캔틸레버를 시공하는 동안 변위는 교각에 대해서 거의 대칭이다. 처짐에 대해서 셀과 보 모델의 근소한 차이는, 교량의 가장자리 경간에 시공되는 슛

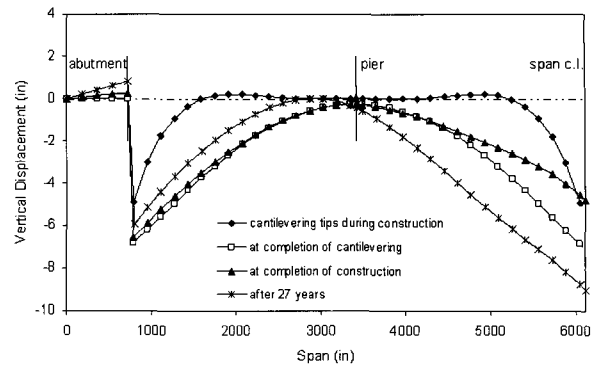


그림 9 보 요소를 이용한 교량의 변위

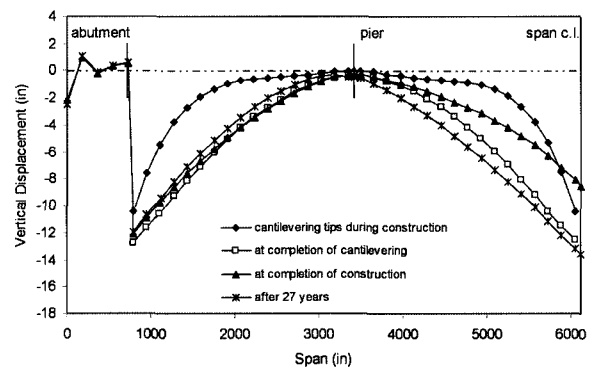


그림 10 셀 요소를 이용한 교량의 변위; 상부 슬래브 중심

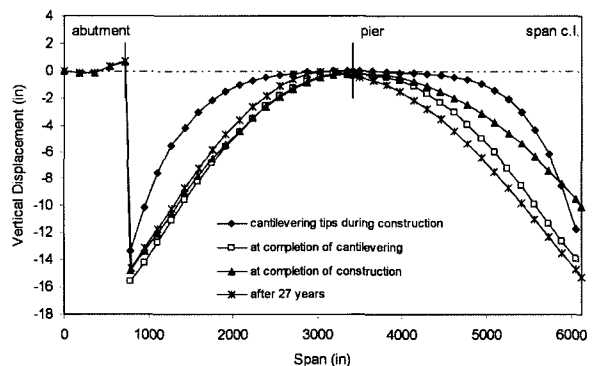


그림 11 셀 요소를 이용한 교량의 변위; 하부 슬래브 중심

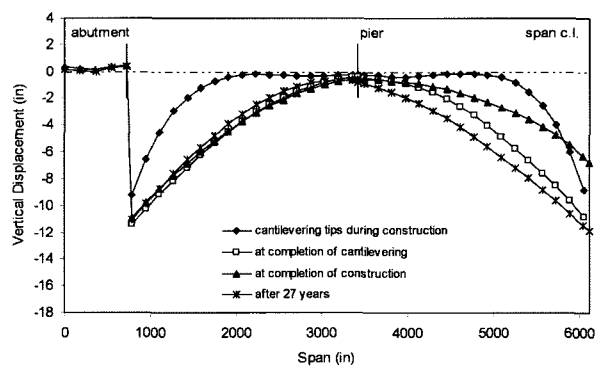


그림 12 셀 요소를 이용한 교량의 변위; 상부 슬래브 가장자리

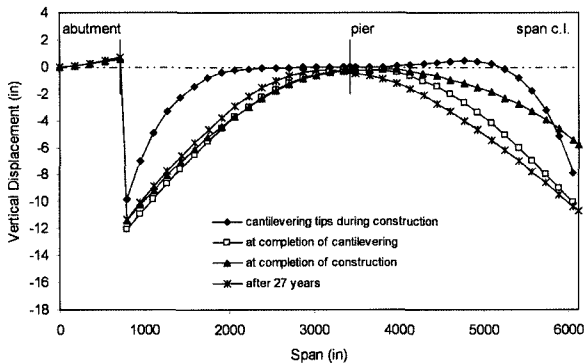


그림 13 셸 요소를 이용한 교량의 변위; 상·하부 복부의 평균 변위

(short) 쉐일레버 긴장재의 정착단 손실에 의한 것이다. 최종적인 세그먼트를 시공한 후엔, 중앙 경간의 변위가 가장자리 경간보다 더 커진다. 셸 모델과 보 모델과는 다른 중요한 특징은 첫째, 보와 셸은 거더 단면에서 지점마다의 변위가 서로 같지 않다. 그러나 보의 경우 변형 후 단면의 변화가 없으나, 셸의 경우는 변형 후 원래의 단면을 유지하지 못한다. 둘째, 셸 모델 결과는 보 모델에 비하여 더 큰 변위를 발생시킨다. 이유는 다음과 같으며 혹은 다음 경우의 결합으로 나타난다. (a) 보가 휨을 나타내는 동안, 셸 변형은 면내와 휨 거동의 조합이다. (b) 셸 모델의 복부(web)는 거의 수직재이고, 평면/면내 모드에서 대부분 휨으로써 변형한다. (c) 복부는 전단 변형에 대해 주로 반응을 보인다. 전단 강성도를 전체 단면적에 대해서 계산을 하는 보와는 달리, 셸에서는 상·하부 슬래브가 매우 중요한 영역이 된다. 세 번째 차이점은 교대 주변 거더 단면의 와핑이다. 이 와핑은 보 모델에서는 나타나지 않는다. 한편, 다음에 나타난

4. 결 론

기존의 프레임 요소에 의한 시공 단계별 해석의 단점을 극복하기 위하여 3차원 해석에 의한 PSC 교량의 시공 중 해석을 위하여 PSC 셸 요소를 개발하였다. 프레임 요소를 이용한 PSC 박스 교량의 시공단계 설계는 교량 전체 구조를 단순한 뼈대 요소로 정하여 해석하므로 텐던량의 산출 시 횡방향 텐던을 고려할 수 없고 또한 곡선교의 경우 외측 및 내측에서 각각 다른 텐던 긴장력을 고려할 수 없는 단점이 있다. 본 연구에서도 알 수 있는 바와 같이 기존의 프레임 요소를 이용했을 때는 오직 중앙에서의 단면 변형만 알 수 있으나 본 셸 요소에 의한 결과는 단면의 위치마다 변형을 알 수가 있어 효과적으로 긴장력을 제어할 수 있다. 제안된 해석모델은 3차원 요소를 사용하여 전체 구조계 해석을 수행하므로 별도의 횡 방향 모델이 필요 없으며 종·횡방향의 복합적 거

동을 동시에 고려하므로 구조물의 시공단계별 정확한 거동을 파악할 수 있다. 향후 이 요소를 이용하여 PSC 교량의 3차원 시공 중 해석을 보다 더 심도 있게 연구하여 그 결과를 제안하고자 한다.

감사의 글

이 연구는 건설교통부 한국건설기술평가원의 건설기술혁신 연구개발사업(06건설혁신D05) 지원에 의하여 이루어졌으며, 저자들은 이에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

- 곽효경, 서영재(1999) 시공단계를 고려한 콘크리트 프레임 구조물의 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 12(2), pp.171~184.
- 윤영수, 이만섭, 최한태(1998) FCM 공법으로 시공중인 PS 콘크리트 박스거더 교량의 크리프 및 건조수축에 관한 실험적 연구, 대한토목학회 정기학술대회 논문집.
- 이재호, 최정호, 신현목(1994) 시공단계를 고려한 프리스트레스트 콘크리트 교량의 해석 및 설계에 관한 연구, 대한토목학회 정기학술대회 논문집.
- 이재석, 강영진(1992) PC 사장교의 시공단계를 고려한 해석, 대한토목학회 정기학술대회 논문집.
- 이재석, 최규천(2007), 순차적으로 시공되는 곡선 PSC 사장교의 비선형 해석, 대한토목학회 정기학술대회 논문집, 27(1A), pp.45~57.
- ACI Committee 209(1992) Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures.
- Ahmad S., Irons B. M., Zienkiewicz O. C.(1970) Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2, pp.419~451.
- Bathe K. J., Dvorkin E. N.(1986) A Formulation of General Shell Elements-The use of Mixed Interpolation of Tensorial Components, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 22, pp.697~722.
- Choudhury, D.(1986) Analysis of Curved Nonprismatic Reinforced and Prestressed Concrete Box Girder Bridges. University of California, Berkeley UCB/SEMM-86/13.
- Comite Euro-International Du Beton(1990) CEB-FIP Model Code 1990, Design Code.
- GID 8.0(2006) Pre-postprocessor Software, International Center for Numerical Methods in Engineering.

Barcelona, Spain, <http://gid.cimne.upc.es/>

Huang H. C., Hinton E.(1986) A New Nine Node Degenerated Shell Element with Enhanced Membrane and Shear Interpolation, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 22, pp.73~92.

Ketchum, M. A.(1986) Redistribution of Stresses in Segmentally Erected Prestressed Concrete Bridges, Report No. UCB/SESM-86-07. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, California.

Kim, K. D. Lomboy G. R., .Voyiadjis G. Z.(2003) A 4-Node Assumed Strain Quasi-Conforming Shell Element with 6 D.O.F., *International Journal for*

Numerical Methods in Engineering, 58(14), pp.2177~2200.

Kim. K. D., Lomboy G.R.(2006) A Co-rotational Quasi-Conforming 4-Node Assumed Strain Shell Element for Large Displacement of Elasto-plastic Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp.6502~6522.

XFINAS 2.0(2006) Konkuk University, Korea, <http://www.xfinas.com/>

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Too J. M.(1971) Reduced Integration techniques in general analysis of plates and shells, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2, pp.419~451.