

# 반복적 IRS를 이용한 구조 시스템 식별

## Structural System Identification by Iterative IRS

백 승 민\*

Baek, Sungmin

김 현 기\*\*

Kim, Hyungi

김 기 옥\*\*\*

Kim, Ki-Ook

조 맹 효†

Cho, Maenghyo

(논문접수일 : 2006년 1월 3일 ; 심사종료일 : 2007년 1월 22일)

### 요 지

구조 역섭동 문제에서, 신뢰할 만한 결과를 얻기 위해서는 정의되지 않은 모든 자유도가 미지변수로 간주되기 때문에 많은 전산자원이 필요하다. 본 연구에서는 축소시스템 기법과의 연동을 통해 정의되지 않은 자유도를 축소시스템에서 정의된 자유도 정보로 대체함으로써 해의 정확성과 계산의 효율성을 확보하는 기법을 제안한다. 일반적으로 구조 시스템을 축소할 경우, 시스템 축소변환 행렬에 오차가 포함되게 된다. 이 오차로 인해 축소기법을 적용하여 역섭동 문제의 정확한 해를 구하는 것은 쉽지 않은 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 자유도 변환행렬을 매 단계마다 개선하는 반복적 축소 시스템 기법을 적용한다. 자유도 기반 축소시스템의 신뢰성은 주자유도 선정 위치와 변환행렬의 반복 계산 횟수에 의해 결정되며, 변환행렬의 반복 계산을 줄이기 위해서는 시스템 구축 초기에 주자유도가 잘 선정되어야 한다. 따라서, 본 연구에서는 축소모델의 정확도를 향상시키고 변환 행렬의 반복 계산을 최소화하기 위해 2단계 축소기법을 적용하여 주자유도 위치를 선정한다. 최종적으로 수치예제를 통해서 반복적 역섭동법의 효율성을 확인한다.

**핵심용어** : 역섭동법, 축소 시스템 기법, 구조 시스템 식별, 반복적 개선된 축소 시스템, 반복적 역섭동법

### Abstract

In the inverse perturbation method, enormous computational resource was required to obtain reliable results, because all unspecified DOFs were considered as unknown variables. Thus, in the present study, a reduced system method is used to condense the unspecified DOFs by using the specified DOFs, and to improve the computational efficiency as well as the solution accuracy. In most of the conventional reduction methods, transformation errors occur in the transformation matrix between the unspecified DOFs and the specified DOFs. Thus it is hard to obtain reliable and accurate solution of inverse perturbation problems by reduction methods due to the error in the transformation matrix. This numerical trouble is resolved in the present study by adopting iterative improved reduced system(IIRS) as well as by updating the transformation matrix at every step. In this reduction method, system accuracy is related to the selection of the primary DOFs and Iteration time. And both are dependent to each other. So, the two level condensation method (TLCS) is selected as Selection method of primary DOFs for increasing accuracy and reducing iteration time. Finally, numerical verification results of the present iterative inverse perturbation method (IIPM) are presented.

**Keywords** : inverse perturbation method, reduced system method, structural system identification, iterative improved reduced system, iterative inverse perturbation method

## 1. 서 론

대형 구조물의 동적 해석은 일반적으로 큰 규모의 전산자원과 계산시간을 필요로 한다. 1960년대 이후로 발전한 유한요소법은 구조물의 해석에 정교한 해답을 제시해오고 있

다. 발전된 전산기술과 효율적인 수치 알고리즘이 유한요소법과 결합하여, 해석의 영역이 날로 대형화되고 있다. 그렇지만 기술의 발전과 더불어 해석 대상 또한 더욱 복잡화, 대형화 되고 있는 추세이다. 고유주파수와 진동모드의 변화를 일으키는 시스템의 구조적 변화를 규명하는 구조 동역학적 역

† 책임저자, 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수  
Tel: 02-880-1693 ; Fax: 02-886-1693  
E-mail: mhcho@snu.ac.kr

\* 서울대학교 기계항공공학부 대학원

\*\* 현대중공업 기술개발본부 구조연구실

\*\*\* 정회원, 인하대학교 기계공학부 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 4월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

해석 문제(inverse problem)의 경우, 이러한 경향은 더욱 심화된다.

최적설계, 구조 시스템 식별, 손상탐지 등은 수학적 유사성을 고려해 역해석 문제라 통칭한다. 구조시스템 식별의 경우 응답함수를 통한 검증(Sampaio 등, 1999), 유한요소 보정을 통한 검증(Friswell 등, 1995) 등 다양한 방법이 있다. 본 연구에서는 섭동법을 통한 역해석 문제(Kim 등, 2004)를 고려한다. 섭동법은 전산자원의 소요가 극심해진다 는 단점을 가지고 있다. 이 문제를 해결하기 위해 축소시스템 기법을 역섭동법에 적용하는 연구들이 이루어져 왔다.

축소시스템 기법(Reduced System Method)은 Guyan (1965)에 의해 제안된 이래 지난 40여 년간 많은 연구자들에 의해 발전되어 왔다. Improved reduced system (IRS) (O'callahan, 1989), Iterative improved reduced system(IIRS)(Friswell 등, 1998), Accelerated improved reduced system(AIRS)(Kim 등, 2001), Succession-level approximate reduction(SAR)(Zhang 등, 1995) 등 여러 가지 형태로 발전을 거듭하였으며, IRS를 부구조화기법(sub-structuring scheme)(Kim 등, 2005; 2006)과 연동하는 방법까지 제안되었다.

이러한 축소시스템 기법 내에서 부자유도 정보를 주자유도로 표현하는 변환행렬을 역해석 문제에 적용하는 연구들이 시도되어 왔다. 동적 강성렬을 이용한 방법(Kim 등, 2006)과 AIRS를 이용한 방법(Choi 등, 2003) 이 여기에 속하는 것으로 축소법을 통해 역해석 문제의 전산 효율성을 높였다. 하지만 이런 선행 연구들은 선택한 시스템 축소기법이 가지는 변환행렬의 오차로 인하여 해의 수렴성과 정확성 문제 때문에 역해석 문제에 적용하기에는 한계가 있었다.

일반적으로 축소 시스템 기법은 축소하는 과정에서 일정 정도의 자유도 변환 오차를 가지게 된다. 각 축소시스템 기법에 따라 이 오차의 정도가 달라지게 되고 효율성과 정확성은 서로 trade-off로 작용하기에 해석이 허용하는 오차의 정도에 따라 적절한 축소기법의 선택이 필요하다.

지금까지 알려진 바에 의하면 변환행렬의 오차를 줄일 수 있는 가장 좋은 방법은 IIRS(iterative improved reduction scheme) 기법이다. 하지만 이 방법은 정확도를 높이는 장점을 가지고 있으나 반복계산 과정이 필요하므로 이에 따른 전산자원의 추가적 소요를 필요로 한다. 따라서 본 연구에서는 시스템의 축소 과정 중 수학적인 소거를 통해 수식을 간결화하여 반복계산의 효율성을 높인 Xia의 방법을 적용하고자 한다.(Xia 등, 2004)

또 시스템 검증에서는 자유도 선정의 문제가 있다. 섭동계의 모든 자유도가 정의되지 않고, 정해진 소수의 자유도 정

보만으로 시스템을 추적한다. 이는 진동측정실험에서 센서의 위치 선정과 연관된 문제로, 어떠한 주자유도를 선정하느냐에 따라서 해의 수렴성과 정확성에 차이가 나게 된다.

이렇게 해에 직접적으로 영향을 미치는 주자유도 선정기법에 대한 연구도 많이 이루어졌으며 그 예로는 순차적 소거법(Henshell 등, 1975; Shah 등, 1982), 요소 에너지 추정 에 의한 자유도 선정방법(Kim 등, 2000), 선형독립특성과 조건수(condition number)를 이용한 방법(Kim 등, 2006; Choi 등, 2003; Choi, 2001), 2단계 축소기법(Cho 등, 2004; Kim 등, 2004)등의 연구들이 있다. 본 연구에서는 이들 방법들 중에서 정확성과 효율성을 보장하면서 부구조화 기법과 연동한 2단계 축소기법(Kim 등, 2005; 2006)을 적용한다. 이 기법의 효용성은 참고문헌(Baek 등, 2006)에서 확인할 수 있다.

본 논문에서는 반복적 축소시스템 기법을 적용하여 비선형 모델 기반의 구조 시스템 식별에 대하여 초점을 맞춘다.

## 2. 역섭동법

### 2.1 일반적 정식화

자유진동계의 동적 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi} \quad (1)$$

일반화된 동특성 문제(general eigenvalue problem)에서 기저 모델에 섭동이 포함된 경우를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}'\boldsymbol{\varphi}' = \lambda'\mathbf{M}'\boldsymbol{\varphi}' \quad (2)$$

식 (2)를 섭동량을 이용하여 표현하면 다음과 같은 비선형성을 포함하는 식 (3)으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})(\boldsymbol{\varphi} + \Delta\boldsymbol{\varphi}) \\ = (\lambda + \Delta\lambda)(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})(\boldsymbol{\varphi} + \Delta\boldsymbol{\varphi}) \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)을 선형화하여 계산하는 방법들[9]도 있으나, 본 연구에서는 해의 정확성을 위해 비선형식을 직접 적용한다. 또, 식 (2)를 동적 평형방정식의 잔류오차 형태로 표현하면 식 (4)와 같고, 이는 최적화 문제의 목적함수와 같은 형태이기도 하다. 기본적으로 잔류오차는 '0'이 되어야 한다.

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{K}'\boldsymbol{\varphi}' - \lambda'\mathbf{M}'\boldsymbol{\varphi}' \quad (4)$$

식 (4)의 힘 평형 방정식은 섭동계의 동적 평형 방정식을

만족하기 위한 필요 충분조건이 된다. 이러한 잔류 오차식은 주어진 정보의 제한성에 의해 식 (5)와 같이 정보가 주어진 영역과 미지의 영역으로 나누어 생각해 볼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\equiv ((\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) - \lambda'(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}))\boldsymbol{\varphi}' \\ &= (\mathbf{K} - \lambda'\mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}' + (\Delta\mathbf{K} - \lambda'\Delta\mathbf{M})\boldsymbol{\varphi}' \end{aligned} \quad (5)$$

*known*                      *Unknown*

섭동계의 비선형 역문제는 식 (5)의 잔류 오차에서 구조변화  $\Delta\mathbf{K}$ ,  $\Delta\mathbf{M}$  를 찾는 것을 목적으로 한다.

### 2.2 잔류 오차식의 수학적 변환

앞서 서론에서 밝힌 바와 같이, 일반적으로 역해석 문제에서는 모든 자유도가 정의되지 않는다. 정의된 자유도를 주자유도  $\boldsymbol{\varphi}_p$  라 하고, 정의되지 못한 자유도를 부자유도  $\boldsymbol{\varphi}_s$  라 한다. 그러면 잔류 오차식의 모든 항들을 식 (6)과 같이 분할할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\Delta\boldsymbol{\varphi} &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{K}_s \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varphi}_p \\ \Delta\boldsymbol{\varphi}_s \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{K}_p\Delta\boldsymbol{\varphi}_p + \mathbf{K}_s\Delta\boldsymbol{\varphi}_s \end{aligned} \quad (6)$$

전체 자유도의 개수를  $n_t$  이라 하고, 주자유도 개수를  $n_p$ , 부자유도 개수를  $n_s$  라 할 때,  $\mathbf{K}_p$  의 차원은  $(n_p \times n_t)$  이고,  $\mathbf{K}_s$  는  $(n_s \times n_t)$  이다.

여기에서 무차원화 된 자유도의 집합은 각 모드의 모드형상이 되고, 이를 응답매개변수(response parameters) 또는 특성매개변수(characteristic parameters)라 한다. 이러한 자유도의 집합은 자연적으로 구조매개변수와는 다른 특성을 가지고, 최적설계에서의 설계변수가 가지는 특성과 비슷하다.

고유치의 변화 또한 무차원화 하여 무차원 변수  $\alpha_\lambda = \Delta\lambda/\lambda$  로 표시한다. 구조변화는 설계변수  $\alpha_e$  로 표현되며, 이것을 구조매개변수라 한다. Friswell은 구조 변화량을 Taylor series로 전개하여 식 (7)에서와 같이 1차 항까지 근사화하여 적용하였다. 이것은 근사화된 방정식으로 비선형 해 평면에서의 법선 방향을 의미하게 된다(Friswell 등, 1995). 보 문제에서와 같이, 구조 변화량의 영향이 커지게 되는 경우에는 3차항 이상의 고차항까지 포함하여 구조 변화량을 전개할 수 있다. 1차항까지 포함하는 섭동을 가정하면 구조 변화량은 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta\mathbf{K} = \sum_{e=1}^s \Delta\mathbf{K}_e = \sum_{e=1}^s [S^k(\alpha_e)] \equiv \sum_{e=1}^s \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_e} \Delta\alpha_e$$

$$\Delta\mathbf{M} = \sum_{e=1}^s \Delta\mathbf{M}_e = \sum_{e=1}^s [S^m(\alpha_e)] \equiv \sum_{e=1}^s \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha_e} \Delta\alpha_e \quad (7)$$

본 연구에서는 일차 근사식을 고려하지 않고  $\Delta\mathbf{K} = \sum_{e=1}^s [S^k(\alpha_e)]$ ,  $\Delta\mathbf{M} = \sum_{e=1}^s [S^m(\alpha_e)]$  를 이용하여 잔류 오차식을 구성하였고 최종적인 평형방정식의 잔류 오차식은 식 (8)과 같이 주어진다..

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (\mathbf{K}_p - \lambda\mathbf{M}_p)\Delta\boldsymbol{\varphi}_p + (\mathbf{K}_s - \lambda\mathbf{M}_s)\Delta\boldsymbol{\varphi}_s \\ &\quad - (\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{M}_p\Delta\boldsymbol{\varphi}_p)\Delta\lambda - \mathbf{M}_s\Delta\lambda\Delta\boldsymbol{\varphi}_s \\ &\quad + \sum_{e=1}^s ([S_s^k(\alpha_e)] - \lambda'[S_s^m(\alpha_e)])\Delta\boldsymbol{\varphi}_s \\ &\quad + \sum_{e=1}^s ([S^k(\alpha_e)]\boldsymbol{\varphi} + [S_p^k(\alpha_e)]\Delta\boldsymbol{\varphi}_p) \\ &\quad - \sum_{e=1}^s ([S_s^m(\alpha_e)]\boldsymbol{\varphi} + [S_s^m(\alpha_e)]\Delta\boldsymbol{\varphi}_p)\lambda' \end{aligned} \quad (8)$$

역해석 문제의 해를 구하기 위해 잔류 오차식의 norm을  $\sum_{i=1}^{n_m} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}$  로 정의 하고, 아래 식 (9)에 주어진 최소화 문제를 고려한다.

$$\min \left( \sum_{i=1}^{n_m} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} \right) \quad (9)$$

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_e \\ \Delta\boldsymbol{\varphi}_s \end{Bmatrix} \quad (10)$$

설계변수  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  는 식 (10)과 같이 구조매개변수  $\boldsymbol{\alpha}_e$  와 정의되지 않은 구조매개변수 즉, 부자유도정보  $\Delta\boldsymbol{\varphi}_s$  로 구성되어 있다. 이 때,  $n_m$  은 모드 개수이다. 해는 오차를 최소화하고 수렴성을 보장해야 되기 때문에 수정된 가우스-뉴턴법(modified Gauss-Newton method)을 이용하였다.

## 3. 축소법을 적용한 시스템 식별

### 3.1 Iterative IRS (IIRS)

반복적 IRS기법은 Friswell에 의해서 제안된 기법이다(Friswell 등, 1998). 본 연구에서 사용할 방법은 Xia에 의해 개선된 반복적 IRS이다(Xia 등, 2004).

식 (1)을 주자유도와 부자유도로 나누어 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{ps} \\ \mathbf{K}_{ps}^T & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p \\ \boldsymbol{\varphi}_s \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{M}_{ps} \\ \mathbf{M}_{ps}^T & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p \\ \boldsymbol{\varphi}_s \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (11)의 아래쪽 관계를 통해서 식 (12a)를 얻고, 이는 식 (12b)로 변형될 수 있다.

$$\mathbf{K}_{ps}^T \boldsymbol{\varphi}_p + \mathbf{K}_{ss} \boldsymbol{\varphi}_s = \lambda \mathbf{M}_{ps}^T \boldsymbol{\varphi}_p + \lambda \mathbf{M}_{ss} \boldsymbol{\varphi}_s \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_s &= -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T \boldsymbol{\varphi}_p + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T \lambda \boldsymbol{\varphi}_p + \mathbf{M}_{ss} \lambda \boldsymbol{\varphi}_s) \\ &= \mathbf{t}_s \boldsymbol{\varphi}_p + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T \lambda \boldsymbol{\varphi}_p + \mathbf{M}_{ss} \lambda \boldsymbol{\varphi}_s) \end{aligned} \quad (12b)$$

식 (12b)를 기초로 주자유도와 부자유도 사이의 관계를 식 (13)과 같이 자유도간 변환행렬로 가정할 수 있다.

$$\boldsymbol{\varphi}_s = \mathbf{t} \boldsymbol{\varphi}_p, \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{T} \boldsymbol{\varphi}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p \quad (13)$$

이 관계식은 식 (14)의 형태로 표현이 된다.

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_s + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}) \lambda \quad (14)$$

자유도 변환 관계식 (14)을 통해서 전체 시스템을 식 (15a)와 같이 축소할 수 있다.

$$\mathbf{K}_R \boldsymbol{\varphi}_p = \lambda \mathbf{M}_R \boldsymbol{\varphi}_p \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_R &= \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{K}_{ps} \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ps}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t} \\ \mathbf{M}_R &= \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t} + \mathbf{t}^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{t}^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t} \end{aligned} \quad (15b)$$

축소 시스템의 고유치 문제를 통해서 고유치 항은 식 (16)과 같이 근사화 할 수 있다.

$$\lambda = \mathbf{M}_R^{-1} \mathbf{K}_R \quad (16)$$

식 (16)을 식 (14)에 대입하여 변환행렬의 형태를 변환할 수 있고, 이 관계식은 반복 연산을 통해서 식 (17)과 같이 개선할 수 있다.

$$\mathbf{t}^{(k)} = \mathbf{t}_s + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k-1)}) (\mathbf{M}_R^{(k-1)})^{-1} \mathbf{K}_R^{(k-1)} \quad (17)$$

식 (17)의 개선된 변환행렬을 통해 최종적인 축소시스템을 구할 수 있게 된다.

$$\mathbf{K}_R^{(k)} = \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{K}_{ps} \mathbf{t}^{(k)} + (\mathbf{t}^{(k)})^T \mathbf{K}_{ps}^T + (\mathbf{t}^{(k)})^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t}^{(k)} \quad (18a)$$

$$\mathbf{M}_R^{(k)} = \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t}^{(k)} + (\mathbf{t}^{(k)})^T \mathbf{M}_{ps}^T + (\mathbf{t}^{(k)})^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k)} \quad (18b)$$

자세한 정식화 과정은 참고문헌(Friswell, 1998)에 나타나 있다. 이러한 반복적 IRS기법에서 Xia는 식 (13)의 가정된 주자유도와 부자유도 사이의 관계식을 정적 관계식과 동적 관계식으로 나누어 식을 전개하였다.

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{t}_s + \mathbf{t}_d \\ &= (-\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{ps}^T) + (\mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}) \lambda) \end{aligned} \quad (19)$$

식 (15b)에 식 (19)을 대입하고, 축소된 강성행렬에서  $\mathbf{K}_{ps}^T + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t}_s = \mathbf{0}$ 의 관계를 이용하여 소거 하면, 축소된 강성행렬과 질량행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{K}_G + \mathbf{t}_d^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t}_d \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_R &= \mathbf{M}_G + \mathbf{t}_d^T (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_s) \\ &\quad + (\mathbf{M}_{ps} + \mathbf{t}_s^T \mathbf{M}_{ss}) \mathbf{t}_d + \mathbf{t}_d^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_d \end{aligned} \quad (20b)$$

여기서  $\mathbf{K}_G, \mathbf{M}_G$ 는 Guyan 축소법에서의 축소된 시스템 (Guyan, 1965)으로 다음 식 (21)과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G &= \mathbf{K}_{pp} + \mathbf{K}_{ps} \mathbf{t}_s \\ \mathbf{M}_G &= \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{t}_s^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t}_s + \mathbf{t}_d^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_s \end{aligned} \quad (21)$$

여기에 식 (22)의 관계를 대입하여 축소 시스템의 평형 방정식 (15a)를 재정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}_d^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{t}_d \boldsymbol{\varphi}_p \\ &= \mathbf{t}_d^T \mathbf{K}_{ss} (\mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}) \lambda) \boldsymbol{\varphi}_p \\ &= \mathbf{t}_d^T (\mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}) \boldsymbol{\varphi}_p \lambda + \mathbf{t}_d^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}_d \boldsymbol{\varphi}_p \lambda \end{aligned} \quad (22)$$

최종적으로 식 (15a)는 식 (23)로 변환이 되며, 이식은 Guyan 축소법의 강성행렬  $\mathbf{K}_G$ 과 동적 질량행렬  $\mathbf{M}_d$ 로 정리 된다.

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_R \boldsymbol{\varphi}_p - \lambda \mathbf{M}_R \boldsymbol{\varphi}_p \\ &= \mathbf{K}_G \boldsymbol{\varphi}_p - \lambda (\mathbf{M}_G + (\mathbf{M}_{ps} + \mathbf{t}_s^T \mathbf{M}_{ss}) \mathbf{t}_d) \boldsymbol{\varphi}_p \\ &= \mathbf{K}_G \boldsymbol{\varphi}_p - \lambda (\mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t} + \mathbf{t}_s^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{t}_s^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}) \boldsymbol{\varphi}_p \\ &= \mathbf{K}_G \boldsymbol{\varphi}_p - \lambda \mathbf{M}_d \boldsymbol{\varphi}_p = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (23)$$

여기서

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t} + \mathbf{t}_s^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{t}_s^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t} \quad (24)$$

여기에 식 (16)의 방법과 같이 근사화된 고유치 항을 유도하면 다음 식 (25)와 같다.

$$\lambda = (\mathbf{M}_d)^{-1} \mathbf{K}_G \quad (25)$$

각 반복 단계에서는 식 (26)와 식 (27)을 통해서 축소시스템의 정확도를 개선할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_d^{(k-1)} &= \mathbf{T}_s^T \mathbf{M} \mathbf{T}^{(k-1)} \\ &= \mathbf{M}_{pp} + \mathbf{M}_{ps} \mathbf{t}^{(k-1)} + \mathbf{t}_s^T \mathbf{M}_{ps}^T + \mathbf{t}_s^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathbf{t}^{(k)} = \mathbf{t}_s + \mathbf{K}_{ss}^{-1} (\mathbf{M}_{ps} + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{t}^{(k-1)}) (\mathbf{M}_d^{(k-1)})^{-1} \mathbf{K}_G \quad (27)$$

기존의 Friswell의 방법에서는 매 반복 단계마다 식 (17), (18a), (18b)의 3개의 식을 모두 개선해야 했지만, Xia의 방법에서는 식 (26), (27) 두 개의 식만을 개선함으로써 전산 자원을 절약할 수 있다. 동시에 수학적 소거를 통해 불필요한 연산을 줄였기 때문에 정확도 향상 효과도 동시에 얻을 수 있다(Xia, 2004).

### 3.2 반복적 역접동법

식 (8)의 비선형 시스템 식별을 위한 목적함수는 부자유도 부분의 응답 매개변수를 입력 조건으로 가진다. 하지만 이 변수들은 구조매개변수와 독립적인 관계가 아니라 구조매개변수에 의해 변화가 유도되는 변수이다. 또 시스템의 크기가 커지거나, 포함되는 모드의 개수가 늘어나면 부자유도의 개수는 기하급수적으로 증가할 수 밖에 없다. 이런 부자유도 개수의 증가는 메모리의 증가를 의미하고, 이는 계산시간에 영향을 미친다. 또 출력과 관련된 변수가 입력변수로 작용하면서 해의 정확성에도 영향을 미치게 된다.

이러한 이유로 부자유도 부분의 응답매개변수는 앞서 확인한 축소시스템 기법의 변환행렬을 이용하여 식 (28)와 같이 축소시킬 수 있다.

$$\boldsymbol{\varphi}' = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p' \\ \boldsymbol{\varphi}_s' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p' = \mathbf{T}' \boldsymbol{\varphi}_p' \quad (28)$$

이 관계식을 초기 잔류오차식인 식 (5)에 대입을 하게 되면 식 (29)와 같은 새로운 형태의 잔류 오차식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\mathbf{R}\} &= (\mathbf{K} - \lambda' \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}' + (\Delta \mathbf{K} - \lambda' \Delta \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}' \\ &\equiv \left( \mathbf{K} - \lambda' \mathbf{M} + \sum_{e=1}^{NE} ([S^k(\alpha_e) - \lambda' S^m(\alpha_e)]) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_p' \end{aligned} \quad (29)$$

여기에서는 식 (30)과 같이 오직 구조매개변수만을 입력 변수로 가지게 된다.

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = \{\boldsymbol{\alpha}_e\} \quad (30)$$

여기에서는 2.2절에서 살펴 본 응답에서의 별도의 매개변수화 작업이 필요 없고, 입력조건의 개수를 획기적으로 줄일 수 있다. 또, 입력조건이 서로 독립이기 때문에 불필요한 연산을 줄여 보다 빠른 수렴 결과를 얻을 수 있게 된다.

식 (28), (29)에서 자유도 변환 행렬에 반복적 IRS에서의 변환행렬을 식 (31)과 같이 적용하는 것이 본 연구에서 제안하고자 하는 방법이다.

$$\mathbf{t}' = \mathbf{t}'_{IRS} \quad (31)$$

이때 오직 변환행렬식만이 요구되기 때문에 최종적으로 구축된  $\mathbf{K}_R, \mathbf{M}_R$ 은 구할 필요가 없게 된다. 동적 축소 질량행렬  $\mathbf{M}_d$  또한 변환행렬의 계산과정에서만 사용된다.

## 4. 수치예제

### 4.1 Simply supported square plate model

본 절에서는 4개의 변이 모두 단순 지지된 판 모델에 대한 수치예제를 통해서 개선된 반복적 시스템 축소기법을 적용한 구조 시스템 검증 기법의 활용성을 검토하였다.

예제의 형상은 그림 1과 같으며 정사각형의 형태로 각 변이 단순지지 되어 있고, 외곽의 둘레 선은 경계조건이 부가된 영역을 의미한다. 총 요소 개수는 72개로 Prathap(1988)이 제안한 판 요소를 사용하였다. 이 요소의 절점당 자유도는 처짐 자유도와 두 개의 회전 자유도로 구성되었으며, 총 절점의 개수가 81개이므로 전체 자유도는 243개이다.

그림 1에서 중간의 원으로 표시된 절점은 부구조화 기법과 연동한 2단계 축소기법(Kim 등, 2005)에 의해 선정된 주자유도를 포함하고 있는 절점으로 총 24개 자유도를 선정

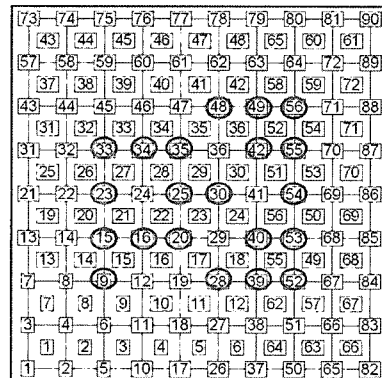


그림1 Configuration of Simply Supported Square Plate ( $E = 210GPa, \nu = 0.33, t = 0.5m, \rho = 7800Kg/m^3$ )

표 1 Result of eigenvalue analysis (Lowest five modes)

#. Modes	Baseline Sys	Perturbed Sys	% Change
1	575123.2	565601.7	1.683
2	2332350	2300968	1.364
3	2411214	2370826	1.704
4	4718822	2678816	0.855
5	7586747	7463118	1.657

하였고, 이들은 주로 각 절점의 처짐 자유도들이다.

섭동은 11번, 17번, 22번 요소의 강성행렬이 각각 30%, 20%, 30% 감소한 것으로 섭동계를 가정하였다.

표 1은 기저모델과 섭동모델의 고유치 분석을 한 결과로 저차의 5개 모드에서 각 1% 내외의 변화를 가짐을 알 수 있다. 이렇게 구성된 섭동계의 응답을 바탕으로 기존의 연구방법과 본 연구에서 제시한 방법을 바탕으로 해석을 수행하였다.

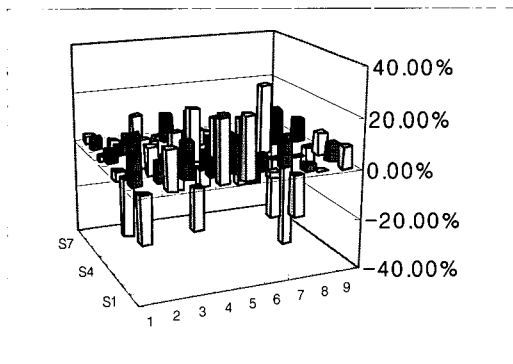
표 2는 각각의 역문제 해결에 필요한 연산조건들을 비교 분석한 것이다. 이때 변환행렬의 개선을 위한 반복은 총 12 회로 하였다. 기존의 방법으로는 총 14개의 모드 정보가 필요하지만 제시된 방법으로는 단지 4개의 모드만으로 시스템 검증할 수 있음을 볼 수 있다. 또한, 계산 소요시간은 1/10으로 줄일 수 있음을 보여준다.

표 2 Performance of the present method for the example problem given in Fig.1

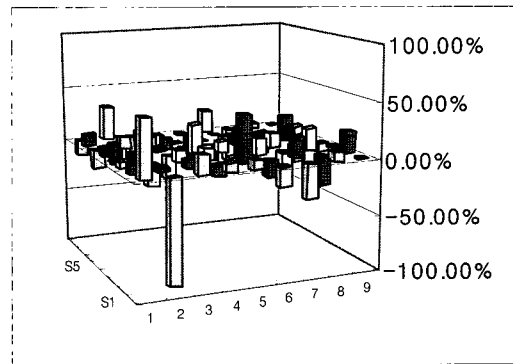
	Inverse Perturbation method	Present method
Number of unknown	2508	72
Required number of modes	14	4
Iteration (Times)	-	12
Computation time(sec)	2294.515	238

그림 2는 최저차 모드에서부터 모드 수를 하나씩 추가하면서 시스템 검증을 한 결과들이다. 그림 2에서 모드가 추가됨에 따라 변화를 추적해가는 과정을 확인할 수 있다. 그림 2(a)~(c)는 구조변화의 경향이 1~3모드를 추가해 가면서 탐색되고 있음을 보여주고, 그림 2(d)는 총 4개의 모드를 통해서 정확한 해를 얻은 사실을 보여준다.

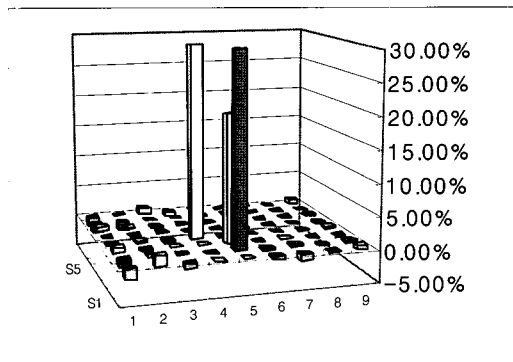
시스템 검증 결과의 정확도를 비교해보면, 그림 3은 기존의 방법(Choi, 2001)을 이용하여 총 14개 모드 정보를 통해 검증한 결과로, 그림 2의 결과와 비교해보면 많은 수의 모드형상을 포함한 것에 비해 정확도는 높지 않음을 알 수 있다. 또한, 메모리의 사용을 확인해보면, 기존의 방법이 최대 210MB의



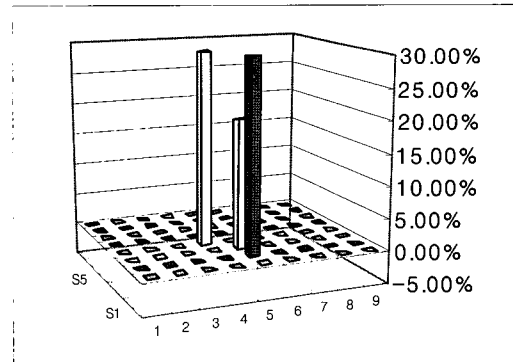
(a) The first mode involved



(b) The lowest two modes involved



(c) The lowest three modes involved



(d) The lowest four modes involved

그림 2 Results of Present method

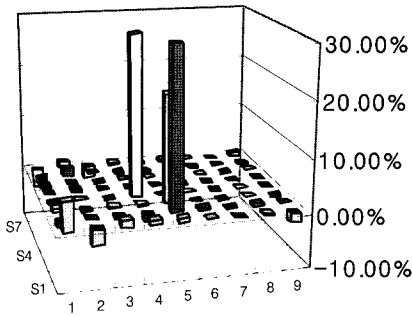


그림 3 Result of Inverse Perturbation method that involved lowest fourteen modes

메모리를 사용함에 비해 제안된 방법은 최대 53MB 밖에 사용하지 않았다.

### 4.2 Cantilever plate model

다음으로 한 변이 구속된 외팔 판 형태의 모델에 본 연구에서 제안된 기법을 적용하여 시스템 식별을 수행하였다. 이 예제에서는 Aminpour(1992)가 제안한 판 요소를 적용하였다. 이 요소는 3개의 병진 자유도와 3개의 회전 자유도를 가지고 있다. 총 65개 절점으로 이루어졌으므로 전체 자유도는 390개이다. 이 수치예제는 총 48개의 요소로 이루어져 있다.

그림 4에서 검은색으로 표시된 요소가 손상을 포함한 요소들로, 9번 요소에 25%, 16번 요소에 20%로 가장하였다. 또, 원으로 표시된 절점들이 주자유도를 포함하고 있는 절점으로 주자유도 선정 방법은 첫번째 예제와 동일한 방법을 사용하였다.

표 3은 기저모델과 섭동계의 고유치 해석 결과로 저차 5개 모드의 결과를 표시하였다. 앞선 예제보다 두 시스템 간

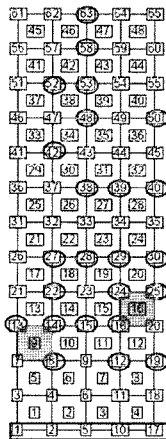


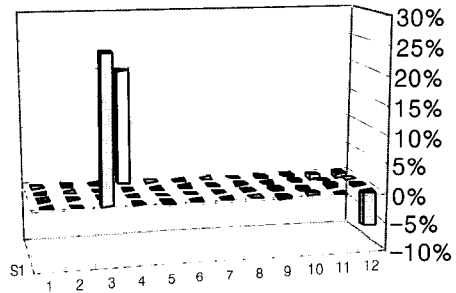
그림 4 Configuration of cantilever plate model ( $E = 210GPa, \nu = 0.33, t = 0.5m, \rho = 7800Kg/m^3$ )

표 3 Result of eigenvalue analysis

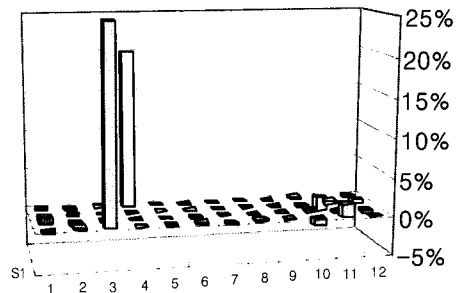
#. Modes	Baseline Sys	Perturbed Sys	% Change
1	347.8772	341.0181	2.011
2	12176.01	11969.81	1.723
3	13493	13456.57	0.271
4	18489.92	17881.76	3.401
5	105274.3	103983.4	1.241

표 4 Performance of the present method for the example problem given in Fig.4

	Inverse Perturbation method	Present method
Number of unknown	2358	48
Required number of modes	7	5
Iteration(Times)	-	24
Computation time (sec)	18106.625	3332.281



(a) Inverse perturbation method



(b) Present method

그림 5 Result of system identification

의 차이가 다소 큰 것을 알 수 있다.

본 예제에서는 자유도 변환 행렬의 반복 연산 횟수는 총 24 회로 앞선 예제보다 증가 하였다. 이는 모델이 가지는 모드형상이 이전 예제보다 복잡하기 때문으로 거동형태에 따라 해석

에 필요한 변환행렬의 오차 정도가 변화함을 알 수 있다.

하지만 변환행렬의 구성을 위해서 반복연산이 늘어났지만 표 4에서 보듯이 기존의 방법에 비해 계산시간은 획기적으로 줄어들었다. 또한, 해석의 정확도에 있어서도 그림 5에서 주어진 것처럼 정확한 결과를 나타냄을 알 수 있다.

이 예제에서도 앞선 예제와 마찬가지로 전산자원에 있어서 효율성을 확인할 수 있다. 기존의 방법이 최대 220MB가 소요된 것에 비해 제안된 기법은 최대 53MB정도의 메모리 밖에 사용하지 않았다. 이는 보다 복잡한 모델에 대해서도 주어진 전산자원으로 역해석을 수행할 수 있음을 의미한다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 비선형 역해석 문제 중 구조시스템 식별기법을 위해 축소기법을 적용하고 반복적인 수치 계산을 통해 자유도간 변환행렬의 오차를 최소화 시킴으로써 전산효율성과 해의 정확성을 획기적으로 향상시킬 수 있는 시스템 식별기법을 제안하였다.

축소 기법의 적용을 통해 기존의 역해석 문제보다 입력 변수의 개수를 줄일 수 있었고, 매개변수화와 같은 수학적 처리과정을 생략할 수 있었다. 또, 개선된 반복적 축소 시스템기법을 통해서 변환 행렬의 오차를 최소화 하였다.

이는 전산효율성과 해의 수렴성, 정확성에 영향을 미쳤고 이런 효율성은 단순지지 판과 외팔 판에 대한 수치예제를 통해 확인 할 수 있었다. 동일한 섭동계에 있어서 제안된 기법은 기존의 방법보다 적은 수의 모드 개수를 필요로 하였고, 그때의 계산 시간과 메모리 사용량이 획기적으로 감소하였음을 확인하였다. 또한 적은 개수의 모드형상에도 불구하고 높은 정확성과 효율성을 동시에 가지는 사실 또한 확인하였다.

이로써, 이전까지의 해석이 전산자원의 한계에 의해서 요소 선택과 검증 할 수 있는 시스템의 크기가 제한적이었으나, 반복적 IRS의 도입을 통해 보다 복잡한 형상의 모델에 대한 역해석도 가능하게 되었다.

이러한 성과를 바탕으로 앞으로의 연구방향은 실제 실험을 통한 시스템 검증이 될 것이다. 이를 위해 먼저 본 연구에서 유한요소 모델에 섭동량을 가정하여 구한 섭동계의 정보, 즉, 모드형상과 고유치 정보에 측정 오차가 존재하는 경우에 대한 연구를 시행한 다음, 실험을 통해 실제 시스템을 검증 할 수 있을 것이다.

## 감사의 글

본 연구는 국방과학연구소와 서울대학교 비행체 특화 연구

센터의 연구비 지원에 의한 결과로써, 저자들은 이의 지원에 감사한다.

## 참고문헌

- Aminpour, M.A.**(1992), Direct Formulation of a Hybrid 4-Node Shell Element with Drilling Degrees of Freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, pp.997~1013.
- Baek, S.M., Cho, M.H., Kim, K.O.**(2006), System Identification by Sub-domain reduction method, *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA, 2006~2121.
- Cho, M.H., Kim, H.G.**(2004), Element-Based Node Selection Method for Reduction of Eigenvalue problem, *AIAA Journal*, 42(8), pp.1677~1684.
- Cho, M.H., Kim, H.G.**(2004), Two-Level Scheme for Selection of Degrees of Freedom by Energy Estimation Combined with Sequential Elimination, *International Council of the Aeronautical Sciences 2004 Congress*.
- Choi, Y.J., Lee, U.S.**(2003), An Accelerated Inverse Perturbation Method for Structural Damage Identification, *KSME International Journal*, 17(5), pp. 637~646.
- Choi, Y.J.**(2001), System Reduction and Selection of Degrees of Freedom in Structural Dynamic Inverse Problem, Ph.D. Dissertation, In-ha Univ., In-chon, Korea.
- Friswell, M.I., Garvey, S.D., Penny, J.E.T.**(1998), the convergence of the iterated IRS method, *Journal of Sound and Vibration*, 211(1), pp.123~132.
- Friswell, M.I., Mottershead, J.E.**(1995), Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, *Kluwer Academic Publisher*, Netherlands.
- Guyan, R.J.**(1965), Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA Journal*, 3(2), p.380.
- Henshell, R.D., Ong, J.H.**(1975), Automatic masters from eigenvalues economization, *Journal of Earthquake Equation and Structural Dynamic*, 3, pp.375~383.
- Kim, H.G., Cho, M.H.**(2004), Construction of Reduced System by Two-Level Scheme and Refined Semi-Analytic Sensitivity Analysis Based on the Reduced System, *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA.2004-17317.



- Kim, H.G., Cho, M.H.**(2005), Dynamic Analysis of Reduced System Partitioned by Domain Decomposition, *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, AIAA.2005-2297.
- Kim, H.G., Cho, M.H.**(2006), Improvement of Reduction Method Combined with Sub-domain Scheme in Large scale Problem, *International Journal for numerical methods in engineering*, accepted.
- Kim, K.O., Kang, M.K.**(2001), Convergence Acceleration of iterative Modal Reduction methods, *AIAA Journal*, 39(1), pp.134~140.
- Kim, K.O., Choi, D.H.**(2006), System Identification for Inverse Problems of Linear Dynamic Structures, *Inverse Problem in Science in Engineering*, 14(3), pp.267~285.
- Kim, K.O., Cho, J.Y., Choi, Y.J.**(2004), Direct approach in inverse problems for dynamic system, *AIAA Journal*, 42(8), pp.1698~1704.
- Kim, K.O., Choi, Y.J.**(2000), Energy method for selection of degrees of freedom in condensation, *AIAA Journal*, 38(7), pp.1253~1259.
- O'callahan, J.**(1989), A Procedure for an improved reduced system (IRS) model, *Proceedings of of 7th International Modal Analysis Conference*, pp.17~21.
- Prathap, G., Somashekar, B.R.**(1988), Field- and edge-consistency synthesis of a 4-noded quadrilateral plate bending element, *International Journal for Numerical Method In Engineering*, 26, pp.1693~1708.
- Sampaio, R.P.C., Maia, N.M.M, Silva, J.M.M.**(1999), Damage Detection using the Frequency-Response-Function Curvature Method, *Journal of Sound and Vibration*, 226(5), pp.1029~1042.
- Shah, V.N., Raymund, M.**(1982), Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem, *International Journal for Numerical Method In Engineering*, 18(1), pp.89~98.
- Xia, Y., Lin, R.**(2004), Improvement on the iterated IRS method for structural eigensolution, *Journal of sound and vibration*, 270, pp.713~727.
- Zhang, D.W., Li, S.**(1995), Succession-level approximate reduction (SAR) technique for structural dynamic model, *Analysis conference*(Nashville, TN), Union college press, Schenectady, NY, pp.435~441.