

# 3절점 및 4절점 요소를 이용한 비등방성 절판 구조물의 해석

## Analysis of Anisotropic Folded Structures using Triangular and Quadrilateral Elements

유용민†                      임성순\*                      장석윤\*\*  
Yoo, Yong-Min              Yhim, Sung-Soon              Chang, Suk-Yoon  
(논문접수일 : 2006년 3월 13일 ; 심사종료일 : 2007년 1월 9일)

### 요 지

본 연구에서는 3절점 요소와 4절점 요소를 가지는 비등방성 절판 구조물의 처짐 해석을 수행한다. 절판 구조물을 해석할 때 4절점 요소뿐만 아니라 3절점 요소의 사용이 필요한 경우가 발생하게 된다. 그러나 3절점 요소를 사용하는 것은 간단하지 않다. 그러므로 본 연구에서 사용한 3절점 요소는 4절점 요소에서 절점을 감소시키는 방법을 사용하여 계산 과정의 편의성과 3절점 요소의 사용으로 인한 복잡성을 피할 수 있다. 이러한 방법을 고차 전단변형이론에 적용하기 위하여 Lagrangian 보간함수만을 사용한다. 또한 해석과정의 편의성 및 정확성을 위하여 면내회전각 자유도를 도입한다. 특히 본 논문에서는 3절점 및 4절점 요소의 사용에 의한 비등방성 복합적층 절판 구조물의 거동 특성을 분석하며 이에 대한 영향을 다양한 매개변수를 통하여 상세히 규명하고자 한다.

**핵심용어** : 3절점 요소, 4절점 요소, 절판 구조물, 고차 전단변형이론, 면내회전각 자유도

### Abstract

This study deals with displacement analysis of anisotropic folded structures with triangular elements and quadrilateral elements. When folded plates are analyzed, triangular elements as well as quadrilateral elements are needed for conveniences of modelling. However, using triangular elements is not a simple problem. A simple formulation is presented which allows a quadrilateral element to degenerate into a triangular element. Therefore it can easily be used for computational simplicity and avoided complexities on mixed use of triangular element and quadrilateral element. In this paper, a high-order shear deformation theory using only Lagrangian interpolation functions and drilling degrees of freedom for folded plates are utilized for more accurate analysis. Especially, various results of anisotropic laminated and folded composite structures with triangular element and quadrilateral element show the structural behavior characteristics of them.

**Keywords** : *triangular elements, quadrilateral elements, folded plates, a higher-order shear deformation theory, a drilling degree of freedom*

### 1. 서 론

절판 구조물은 구조적인 장점들로 인하여 항공기, 선박, 빌딩 및 교량 등의 공학 분야에 널리 사용되고 있다. 이러한 절판 구조물의 정적 해석에 대한 연구를 처음으로 수행한 사람은 Goldberg와 Leve(1957)였다. 일반적으로 절판 구조물의 해

석은 판 및 셸 이론에 근거하고 있다. 대부분의 절판 구조물에 대한 해석은 고전적판이론에 근거하여 해석을 수행하였다. 그러나 이러한 방법은 길이/두께비가 얇은 판에서는 괜찮지만 두꺼운 경우에는 전단변형 효과를 고려하지 못하였기 때문에 오차가 발생한다(유용민 등, 2006). 그러므로 Niyogi, Laha 및 Sinha(1999) 등은 일차 전단변형이론을 적용한 복합적층 절

† 책임저자, 정회원 · 삼성엔지니어링 인프라사업팀 공학박사  
Tel: 02-3458-4229 ; Fax: 02-3458-7105  
E-mail: yooymin@uos.ac.kr

\* 정회원 · 서울시립대학교 토목공학과 교수 공학박사

\*\* 서울시립대학교 토목공학과 명예교수 공학박사

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 4월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

판의 진동해석을 수행하였다. 또한 Eratli와 Akoz(2002)는 모든 변위와 힘을 자유도로 가정하여 절판을 해석하였고 구조물의 해석에서 중요한 요소 중의 하나인 좌표변환으로 발생하는 면내회전각 자유도를 도입하였다. 기존의 고차 전단변형이론을 비교, 보완하여 Lo, Christensen 및 Wu 등(1977)이 판 및 적층판을 해석하였으며, Reddy(1984)는 Lagrangian 및 Hermite 보간함수를 혼합하여 사용하였고 Dhainaut(1997)와 Sadek(1998)은 Lagrangian 보간함수만을 사용하여 해석하였다. 그러나 여기서 언급한 고차 전단변형이론은 평판과 적층판에만 적용되었다.

구조물의 평면 요소 해석에서 3절점 요소를 적용한 것은 Turner, Clough, Martin 및 Topp 등(1956)이 처음이었다. 그러나 3절점 요소에서 정확한 해석을 위하여 면내회전각 자유도를 도입하여야 한다. Allman(1984)은 면내회전각 자유도를 가지는 3절점 요소를 사용하여 구조물의 해석을 수행하였다. 그러나 이러한 방법은 모든 절점의 회전 자유도가 같은 값을 가지게 되는 단점이 있으며 이를 해결하기 위하여 하나의 절점의 회전 자유도를 영으로 만들어주어야만 했다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 많은 논문이 발표되고 있다. 이런 방법외에 Bathe(1996) 및 Zienkeiwicz와 Taylor(1991)는 flat shell 방법을 사용하였으며 Ibrahimbegovic과 Wilson(1991)은 4절점 요소를 3절점 요소로 감소시키는 방법을 이용하였다. 이 외의 판 해석에서 사용되던 3절점 요소에 대한 내용은 이병채(1992) 등의 논문에서 볼 수 있다.

본 논문에서는 3절점 요소 및 4절점 요소를 가지는 절판 구조물을 고차 전단변형이론을 적용하여 해석한다. 고차 전단변형이론을 이용하여 절판을 해석한 장석운(2003; 2004) 등은 Reddy의 방법과 유사한 방법을 사용하였다. 그러나 절판 구조물의 일반적인 해석을 위해서는 3절점 요소 및 4절점 요소를 사용하여야 한다. 그러므로 본 논문에서는 두 가지 요소에 고차 전단변형이론을 손쉽게 적용할 수 있도록 Lagrangian 보간함수만으로 구성된 방법을 사용하고자 한다. 이 방법에 대해서는 장석운(2006) 등이 적용하고 있다.

여기에서는 Lagrangian 보간함수만을 사용하는 고차 전단변형이론을 이용하여 3절점 요소 및 4절점 요소로 구성된 비등방성 절판 구조물의 거동 특성을 분석하고자 한다. 이러한 연구를 통하여 일반적인 절판 구조물의 해석이 가능하게 하며 앞으로의 합리적인 설계에 도움이 될 것으로 판단된다.

## 2. 이 론

본 논문에서 사용한 고차 전단변형이론은 Reddy(1984)에 의한 두 보간함수를 혼합하여 사용한 방법이 아닌 Dhai-

naut(1997)와 Sadek(1998)의 Lagrangian 보간함수만을 이용한 방법을 사용한다. 이 방법을 적용한 이유는 4절점 요소는 상관없지만 3절점 요소에서 Hermite 보간함수를 적용하기가 어렵기 때문에 Lagrangian 보간함수만을 사용한 방법으로 고차 전단변형이론을 적용한다.

### 2.1 변형률-변위 관계식

$x$ 와  $y$ 방향에 대한 면내변위를 두께에 대한 3차식으로 가정하고 면외변위를 상수로 가정하면 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다. 여기서,  $u_o, v_o, w_o, \phi_x, \phi_y$ 는 일차 전단변형이론에서 사용되는 변위와 같은 의미를 가진다. 또한  $\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y$ 는 고차항에 의해서 나타나는 함수이다.

$$\begin{aligned} u &= u_o + z\phi_x + z^2\xi_x + z^3\zeta_x \\ v &= v_o + z\phi_y + z^2\xi_y + z^3\zeta_y \\ w &= w_o \end{aligned} \tag{1}$$

식 (1)을 변형률-변위 관계식에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \epsilon_x^1 \\ \epsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \epsilon_x^2 \\ \epsilon_y^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \epsilon_x^3 \\ \epsilon_y^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^o \\ \gamma_{xz}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^2 \\ \gamma_{xz}^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

여기서

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^o &= u_{o,x}, \quad \epsilon_{yy}^o = v_{o,y}, \quad \gamma_{xy}^o = u_{o,y} + v_{o,x} \\ \epsilon_{xx}^1 &= \phi_{x,x}, \quad \epsilon_{yy}^1 = \phi_{y,y}, \quad \gamma_{xy}^1 = \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \\ \epsilon_{xx}^2 &= \xi_{x,x}, \quad \epsilon_{yy}^2 = \xi_{y,y}, \quad \gamma_{xy}^2 = \xi_{x,y} + \xi_{y,x} \\ \epsilon_{xx}^3 &= \zeta_{x,x}, \quad \epsilon_{yy}^3 = \zeta_{y,y}, \quad \gamma_{xy}^3 = \zeta_{x,y} + \zeta_{y,x} \\ \gamma_{yz}^o &= \phi_y + w_{o,y}, \quad \gamma_{xz}^o = \phi_x + w_{o,x} \\ \gamma_{yz}^1 &= 2\xi_y, \quad \gamma_{xz}^1 = 2\xi_x, \quad \gamma_{yz}^2 = 3\zeta_y, \quad \gamma_{xz}^2 = 3\zeta_x \end{aligned}$$

### 2.2 단면력-변형률 관계식

고차 전단변형이론에서 사용되는 단면력과 변형률 관계는 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} \{N\} \\ \{M\} \\ \{O\} \\ \{P\} \end{cases} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [D] & [E] \\ [B] & [D] & [E] & [F] \\ [D] & [E] & [F] & [G] \\ [E] & [F] & [G] & [H] \end{bmatrix} \begin{cases} \{\epsilon^0\} \\ \{\epsilon^1\} \\ \{\epsilon^2\} \\ \{\epsilon^3\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{Q\} \\ \{R\} \\ \{S\} \end{cases} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [D] \\ [B] & [D] & [E] \\ [D] & [E] & [F] \end{bmatrix} \begin{cases} \{\gamma^0\} \\ \{\gamma^1\} \\ \{\gamma^2\} \end{cases} \quad (3)$$

식에서 {N}은 면내력, {M}은 모멘트, {Q}는 전단력벡터이며 {O}, {P}, {R}, {S}는 고차항에 의해서 발생하는 단면력으로 다음과 같은 성분으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \{N\}^T &= \{N_1, N_2, N_6\}, \{Q\}^T = \{Q_1, Q_2\} \\ \{M\}^T &= \{M_1, M_2, M_6\}, \{R\}^T = \{R_1, R_2\} \\ \{O\}^T &= \{O_1, O_2, O_6\}, \{S\}^T = \{S_1, S_2\} \\ \{P\}^T &= \{P_1, P_2, P_6\} \end{aligned}$$

또한 식 (3)의  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}$ 는 단면력과 변형률의 관계를 나타내기 위하여 사용하는 강성값을 의미한다.  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$ 는 적층판에서 강성과 두께의 관계이며  $E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}$ 는 두께에 대한 고차항 효과를 나타내며 식 (4)로 구할 수 있다. 여기서  $\bar{Q}_{ij}^k$ 는 k번째 적층면의 좌표변환된 탄성 강도를 의미한다.

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^k(z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, z^7) dz \quad (i, j=1, 2, 6) \\ (\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}, \bar{D}_{ij}, \bar{E}_{ij}, \bar{F}_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^k(z, z^2, z^3, z^4, z^5) dz \quad (i, j=4, 5) \end{aligned} \quad (4)$$

### 3. 유한요소법

본 논문에서는 3절점 요소 및 4절점 요소를 가지는 다양한 비등방성 절판 구조물을 해석하기 위해서 유한요소법을 사용한다. 사용한 유한요소는 3절점 요소와 4절점 요소에 쉽게 적용하기 위하여 모든 변위에 대하여 Lagrangian 보간함수만을 사용하였고 해석의 정확성을 위하여 두께에 대하여 3차항까지 사용하며 절판요소의 좌표변환을 수행하기 위해 면내회전각 자유도를 추가하여 절점당 10개의 자유도 ( $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y$ )를 가진다.

절판 구조물은 평판이 연결된 형태로 볼 수 있으므로 평판의 강성행렬을 구한 후 절판의 면내회전각 자유도를 추가하여 한 요소당 사각형이나 삼각형 모양의 강성행렬을 구성할 수 있다.

### 3.1 평판

평판에서 3절점 요소와 4절점 요소와의 차이는 절점수의 차이만 있으므로 강성행렬의 구성은 같게 된다. 절점변위 ( $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y$ )를 Lagrangian 보간함수로 근사화하여 지배방정식에 대입하면 평판의 강성행렬을 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.

$$[K]_p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R]^T [S] [R] d\xi d\eta \quad (5)$$

여기서 평판의 전체행렬에서 [R]은 변형률-변위행렬이며 식 (1)과 (2)로 구할 수 있으며 [S]는 식 (3)과 (4)에서 표시한 단면력과 변형률 관계식이다. [R]은  $[\epsilon] = [R][\delta]$ 이며 식 (8)과 같이 표현할 수 있다. 여기서  $N_i$ 는 보간함수를 의미하며 4절점 요소일 경우에는 식 (6)을 사용하며 3절점 요소일 경우에는 식 (7)을 사용한다.

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4(1-r)(1-s), N_2 = 1/4(1+r)(1-s) \\ N_3 &= 1/4(1+r)(1+s), N_4 = 1/4(1-r)(1+s) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4(1-r)(1-s), N_2 = 1/4(1+r)(1-s) \\ N_3 &= 1/2(1+r) \end{aligned} \quad (7)$$

$$[R][\delta] = \sum_{i=1}^4 \text{ or } \sum_{i=1}^3 \quad (8)$$

$N_{1,x}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$u$								
0	$N_{1,y}$	0	0	0	0	0	0	0	0		$v$							
$N_{1,y}$	$N_{1,x}$	0	0	0	0	0	0	0	0			$w$						
0	0	0	$N_{1,x}$	0	0	0	0	0	0				$\phi_x$					
0	0	0	0	$N_{1,y}$	0	0	0	0	0					$\phi_y$				
0	0	0	0	0	$N_{1,x}$	0	0	0	0						$\xi_x$			
0	0	0	0	0	0	$N_{1,y}$	0	0	0							$\xi_y$		
0	0	0	0	0	0	0	$N_{1,x}$	0	0								$\zeta_x$	
0	0	0	0	0	0	0	0	$N_{1,y}$	$N_{1,x}$									$\zeta_y$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$3N_1$									
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$3N_1$	0								

식 (5)에서 [S]는 단면력과 변형률 관계식이며 행렬의 크기는 18×18로 나타나며 식 (9)와 같다.

$$[S] = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ B_{ij} & D_{ij} & E_{ij} & F_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ D_{ij} & E_{ij} & F_{ij} & G_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ E_{ij} & F_{ij} & G_{ij} & H_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{ij} & \bar{B}_{ij} & \bar{D}_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{B}_{ij} & \bar{D}_{ij} & \bar{E}_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D}_{ij} & \bar{E}_{ij} & \bar{F}_{ij} \end{bmatrix} \quad (9)$$

### 3.2 절판

앞에서 언급했듯이 절판 구조물이 일반 평판과 다른 원인은 면내회전각 자유도에 있다. 이 자유도가 없는 상태에서 강성행렬을 구성하게 되면 강성행렬의 대각선에 0이 되는 문제가 발생하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 본 연구에서는 다음과 같은 방법으로 면내회전각 자유도를 구하였다. 여기서  $E_1, E_2$ 는 탄성계수이며 A와 h는 요소의 면적과 두께를 의미한다.

$$[\phi_z] = 0.02(E_1 + E_2)hA \sum_4 \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\phi_z] = 0.02(E_1 + E_2)hA \sum_3 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

평판에서 구한 9개의 변위에 식 (10)의 면내회전각 자유도를 추가하면 한 절점 당 10개의 변위가 생긴다. 또한 이렇게 구한 강성행렬을 절판 구조물에 대한 좌표변환을 수행하여야한다. 그림 1은 전체 좌표 및 국부 좌표를 나타낸 것이다. 여기서  $x', y', z'$ 는 전체 좌표이며  $x, y, z$ 는 각 판의 국부 좌표이다.

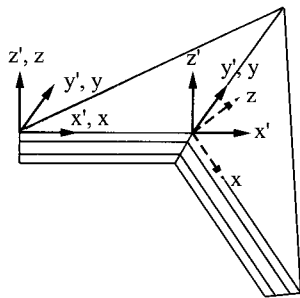


그림 1 절판 구조물의 전체 좌표 및 국부 좌표

식 (11)은 좌표변환 행렬을 나타낸 것이다. 여기서 사용한  $C_{x,y}$ 는  $\cos(x, y)$  로서 방향 코사인을 의미한다.

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ \phi'_x \\ \phi'_y \\ \phi'_z \\ \xi'_x \\ \xi'_y \\ \xi'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{x',x} & C_{y',x} & C_{z',x} & 0 & 0 \\ C_{x',y} & C_{y',y} & C_{z',y} & 0 & 0 \\ C_{x',z} & C_{y',z} & C_{z',z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{y',y} & -C_{x',y} \\ 0 & 0 & 0 & -C_{y',x} & C_{x',x} \\ 0 & 0 & 0 & C_{y',z} & -C_{x',z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (11)은  $\{u'\} = [T] \{u\}$  의 형태로 간단히 요약할 수 있다. 절판 요소의 강성행렬은 다음과 같다.

$$[K] = [\bar{T}]^T [\bar{K}]_s [\bar{T}] \quad (12)$$

여기서 [K]는 사용되는 요소에 의해서 40×40인 4절점 요소 및 30×30인 3절점 요소에 대한 강성행렬로 구성된다. 또한  $[\bar{K}]_s$ 는 다음과 같다.

$$[\bar{K}]_s = \begin{pmatrix} [K]_b & [0] \\ [0] & [K]_a \end{pmatrix}$$

$[K]_b$ 는 식 (5)에서 구한 국부 강성행렬이며,  $[K]_a$ 는 식 (10)에서 구한 면내회전각 자유도에 대한 강성행렬이다.

### 4. 해석 예 및 결과분석

절판 구조물은 다른 구조물과 달리 기하학적 형상변화에 민감한 반응을 보이는 형식이다. 또한 4절점 요소만으로 구성된 절판과 달리 3절점 요소 및 4절점 요소가 같이 사용된 경우에는 다른 거동이 나타날 것으로 판단된다. 그러므로 본 연구에서는 이러한 차이를 알아보기 위하여 기하학적 형상변화 중에서 길이 변화, 경사 각도 및 절판 각도에 대한 다양한 해석모델을 설정하여 해석한다.

### 4.1 해석 모델

비등방성 절판 구조물의 거동 특성을 판단하기 위하여 길이 변화, 경사 및 절판 각도에 대한 다양한 해석을 수행한다. 그림 2는 본 연구의 수치해석 모델이다.

여기서 a, b는 X축 및 Y축 길이를 의미하며  $\theta$ 는 절판 각도이며  $\chi$ 는 구조물의 경사 각도이다. 절판 구조물은 a, b

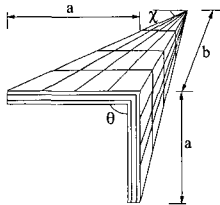


그림 2 절판 구조물의 기하학적 형상

의 길이변화 및 절판 각도  $\theta$ 와 경사 각도  $\chi$ 에 의해서 다양한 형상을 보이게 된다. 해석 모델링은 그림처럼 4절점 요소와 3절점 요소를 혼합하여 사용한다.

표 1 재료 물성

	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12}$
MI	$25E_2$	-	$0.5E_2$	$0.2E_2$	$0.5E_2$	0.25
MII	30000	30000	11538	11538	11538	0.3
MIII	30000	3000	1000	1000	600	0.3

표 1은 본 논문에서 사용한 해석 예제의 재료 물성이다. 기존 연구와의 비교를 위하여 무차원화된 물성 MI를 사용하며 MII와 MIII는 강재와 Boron/Epoxy의 물성이며, 상대 처짐 비교를 위하여 다음과 같은 무차원식으로 처짐을 표시한다. 여기서 h는 절판의 두께이며 q는 작용 하중을 의미한다.

$$\bar{w} = w \frac{E_2 h^3}{b^4 q} \times 10^2 \quad (13)$$

### 4.2 프로그램 검증

절판 구조물에 고차 전단변형이론을 적용한 경우가 적으며 특히 3절점 요소 및 4절점 요소의 사용에 대한 논문이 없으므로 본 연구에서는 프로그램의 검증을 위하여 상용프로그램을 사용하여 비교하고자 한다. 본 논문에서는 상용프로그램인 LUSAS를 사용하며 해석값의 차이는 본 논문에선 고차 전단변형이론을 사용하지만 LUSAS는 일차 전단변형이론을

이용하므로 발생하는 차이이다.

표 2 LUSAS와의 검증 (a/b=1.0, a/h=10, MI)

Fiber Angle	LUSAS	Quadrilateral	Triangular
0	0.1624	0.1762	0.1708
0/90	0.0319	0.0353	0.0332
0/90/0	0.0528	0.0559	0.0549

표 2는 곡절 각도가 90이며 사변 고정인 절판을 4절점 요소와 3절점 요소만으로 구성했을 때의 결과이며, 절점에서 중앙점의 처짐이 유사하게 나타나는 것을 볼 수 있다.

표 3 혼합 사용에 의한 검증(a/b=1.0, a/h=10,  $\theta=90$ , MI)

Fiber Angle	LUSAS	Present
0	0.0177	0.0177
0/90	0.0552	0.0553
0/90/0	0.0237	0.0239

표 3에서는 표 2에서와 달리 3절점 요소 및 4절점 요소를 같이 사용한 경우에 대한 결과이다. 본 검증으로 통하여 해석 결과의 타당성을 얻을 수 있으며 결과의 차이는 해석 이론에 의한 것으로 판명된다.

### 4.3 수치 해석

본 논문에서 사용한 경계조건은 두 가지 경우이다. 그림 1에서 경사부분이 고정이며, X축 부분은 자유(한편 고정)인 경우와 양변이 고정(양변 고정)인 경우이다. 하중조건은 각 판에 직각으로 등분포 하중이 작용하는 것으로 가정하여 해석한다.

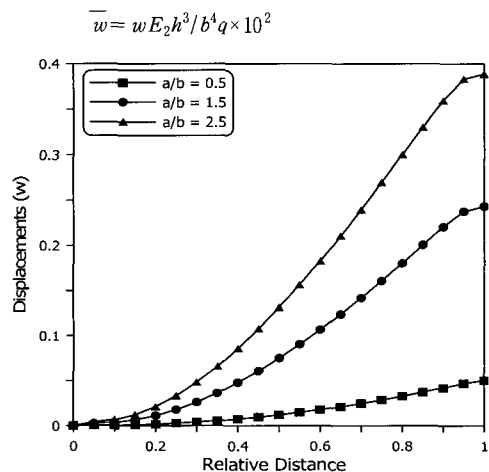


그림 3-1 길이 변화에 의한 절점의 처짐 (MII,  $\theta=90$ ,  $\chi=20$ , b/h=10.0)

표 4 경사 및 절판 각도에 의한 거동 (MIII)

$\chi$		$\theta$							
		30	45	60	90	120	135	150	180
0	$w$	0.0025	0.0106	0.0251	0.0889	0.2834	0.5464	1.2051	9.0504
	$N_x$	1175.0	1639.4	1985.0	2259.3	1978.4	1672.1	1301.8	89.187
	$M_x$	-280.99	-395.27	-484.0	-570.72	-532.18	-470.07	-377.86	148.04
	$Q_x$	-2.9623	-5.482	-8.879	-201.09	-47.187	-80.019	-155.48	-105.40
10	$w$	-0.0266	0.0191	-0.0056	0.0547	0.2412	0.4956	1.1365	8.8731
	$N_x$	1173.9	1630.4	1968.4	2228.8	1928.5	1600.9	1183.5	-438.82
	$M_x$	-277.48	-389.25	-475.77	-558.84	-516.33	-450.58	-351.85	159.18
	$Q_x$	3.5418	0.9068	-2.6383	-14.107	-40.765	-72.508	-144.96	-75.785
20	$w$	-0.049	-0.0427	-0.0311	0.0215	0.1884	0.4189	1.0039	8.1713
	$N_x$	1134.4	1567.9	1886.9	2123.0	1810.5	1472.5	1025.3	-882.6
	$M_x$	-263.62	-369.06	-450.26	-526.13	-479.95	-412.48	-311.2	154.09
	$Q_x$	9.279	6.7329	3.3269	-7.4266	-31.416	-59.354	-122.37	23.874

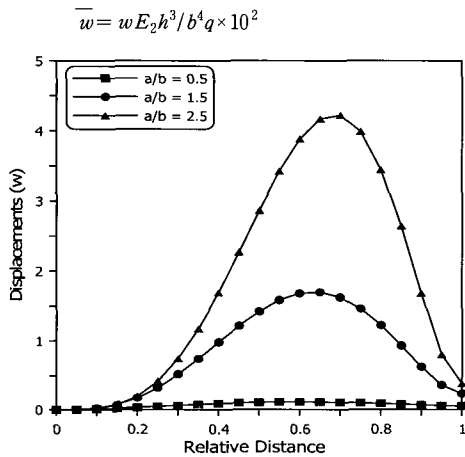


그림 3-2 길이 변화에 의한 외부 원주의 처짐 (MII,  $\theta=90$ ,  $\chi=20$ ,  $b/h=10.0$ )

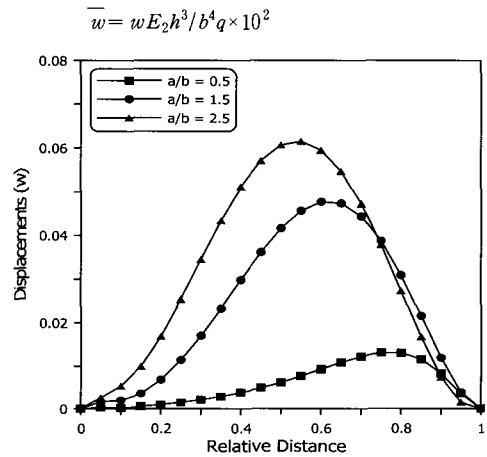


그림 4 길이 변화에 의한 절점의 처짐 (MIII,  $\theta=90$ ,  $\chi=20$ ,  $b/h=5.0$ )

그림 3-1과 그림 3-2는 한번 고정인 경계조건에서 절점과 외부 원주에서 길이 변화에 따른 처짐을 나타낸 것이다. 여기서 경사 각도는 20이며 절판 각도는 90인 경우이다. 절점의 상대처짐을 나타낸 그림 3-1에서는 길이비가 커질수록 절점의 끝단에서 처짐이 커지는 것을 볼 수 있다. 그러나 그림 3-2에서는 중앙 오른쪽에서 길이비가 커질수록 처짐이 크게 나타나 는 것을 알 수 있다.

그림 4는 그림 3과 같이 단일 판에 대한 경우를 해석하였지만 경계조건은 양변 고정이며 길이/두께비가 5로 더 두꺼운 경우이다. 그림 3-1과는 달리 양단이 고정되어 있으며 최대처짐이 다르게 나타난다. 한번 고정과는 달리 길이 변화에 따라서 최대처짐의 장소가 다른 것을 볼 수 있다.

표 4는 경사 각도와 절판 각도에 의한 처짐 및 단면력을

나타낸 것이다. 경계조건은 한번 고정, 길이비는 3.0, 길이/두께비는 10, 0/90으로 적층된 경우이다.

표 4에서 보는 것과 같이 절판 각도가 커질수록 처짐이 증가하는 것과 절판 각도가 클수록 경사 각도가 처짐에 미치는 영향이 큰 것을 알 수 있다. 또한 절판 각도와 경사 각도에 따라 결과에 많은 차이가 나오므로 절판에서 경사 및 절판 각도의 중요성을 볼 수 있다.

그림 5는 한번 고정인 경계조건에서 적층수에 따른 절점에서의 단면력  $N_x$ 을 나타낸 것이다. 상대거리 0에서는 고정 단 효과 때문에 단면력이 갑자기 커지는 것을 볼 수 있으며 상대거리가 커질수록 단면력이 증가하며 적층수에 따라 결과가 다르게 나타남을 알 수 있다.

그림 6은 그림 5와 경계조건을 달리하여 적층수에 따른 절점

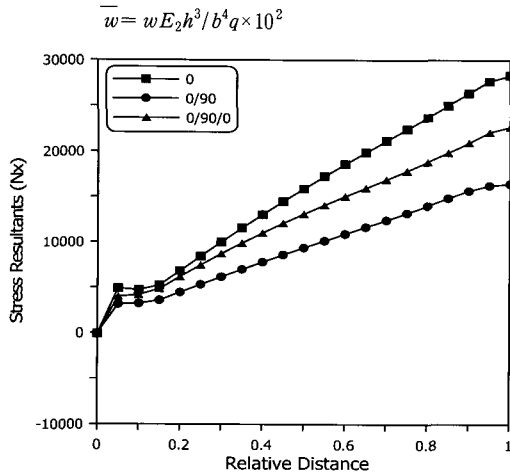


그림 5 적층수에 의한 절점의 단면력(Nx)  
(MIII,  $\theta = 120$ ,  $\chi = 10$ ,  $b/h = 5.0$ )

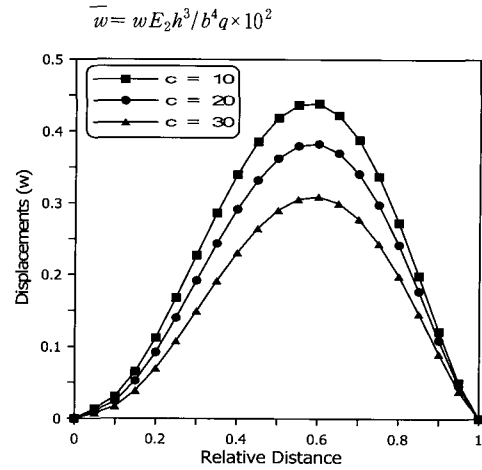


그림 7-1 경사 각도에 의한 절점의 처짐  
(MII,  $\theta = 135$ ,  $b/h = 10.0$ )

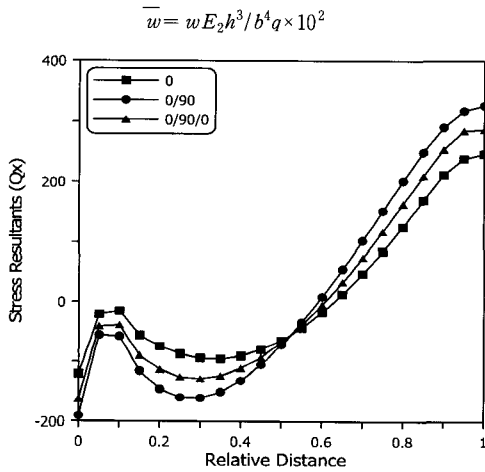


그림 6 적층수에 의한 절점의 단면력(Qx)  
(MIII,  $\theta = 120$ ,  $\chi = 10$ ,  $b/h = 5.0$ )

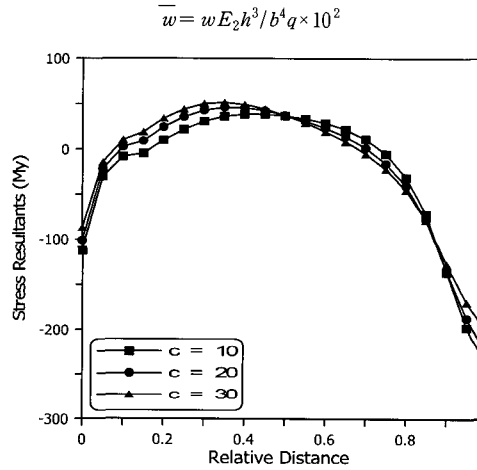


그림 7-2 경사 각도에 의한 절점의 단면력(My)  
(MII,  $\theta = 135$ ,  $b/h = 10.0$ )

에서의 단면력  $Q_x$ 를 나타낸 것이다. 그림 5와 같이 상대거리 0에서는 유사한 모습을 보이나 상대거리가 커지면서 그림 5와는 다르게 적층에 따라 거동이 틀려지는 것을 볼 수 있다.

그림 7은 표 4에서 구한 경사 각도에 의한 거동특성을 분석하기 위하여 처짐 및 단면력  $M_y$ 를 나타낸다. 경계조건은 양변 고정이며 절판 각도는 135이며 길이/두께비는 10이다. 표 4에서 언급한 것처럼 경사 각도가 커질수록 처짐은 작게 나타나지만 단면력  $M_y$ 는 경사 각도에 민감하게 반응하지 않음을 알 수 있다.

#### 4.4 변위 형상

지금까지 3절점 및 4절점을 가지는 복합적층 절판 구조물을 대상으로 길이 변화, 경사 각도, 절판 각도를 중점 변수로

선정하여 이에 대한 거동 특성에 대하여 여러 가지 해석을 수행하였다. 여기서는 지금까지 수행한 결과를 보다 보기 쉽게 하기 위해 변위 형상을 나타내고자 한다. 경계조건은 한 변 고정이며 절판 각도는 90, 경사 각도는 10, 길이/두께비는 5이다. 그림 8은 길이 변화에 대한 변위를 나타낸 것으로 길이 변화가 커질수록 처짐이 더 크게 발생하는 것을 알 수 있다. 또한 경계조건의 영향으로 자유단에서 거동변화가 많이 발생하는 것을 볼 수 있다.

그림 9는 0/90인 크로스플라이의 절판 각도에 대한 거동을 나타낸 것이다. 절판 각도와 길이 변화  $a/b=2.0$ 을 제외한 다른 조건은 그림 8과 같다. 같은 조건에서 절판 각도가 커질수록 변위 형상이 달라지는 것을 볼 수 있다. 그림 8과 같이 기하학적 형상 변화가 절판 구조물에 많은 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

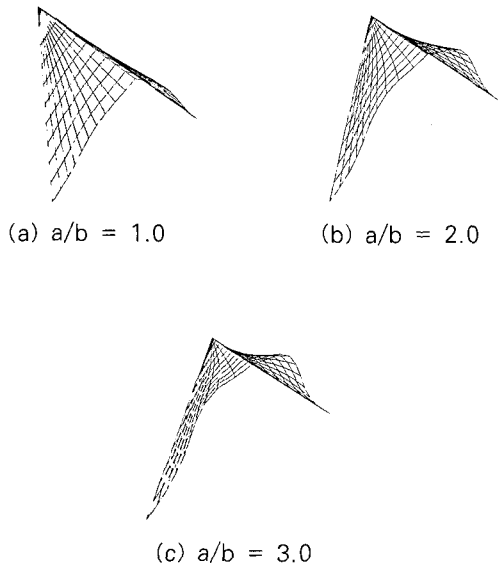


그림 8 길이 변화에 대한 변위 형상  
(MII,  $\theta = 90$ ,  $\chi = 10$ ,  $b/h = 5.0$ )

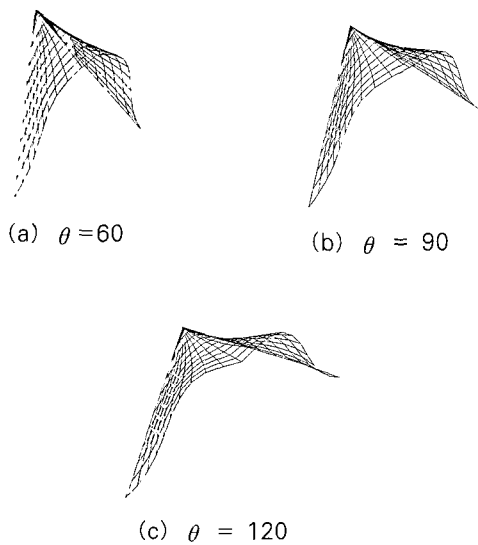


그림 9 0/90에서 절판 각도에 대한 변위 형상  
(MIII,  $\chi = 10$ ,  $b/h = 5.0$ )

### 5. 결 론

본 연구에서는 공학분야에서 다양하게 사용되는 복합적층 절판 구조물을 대상으로 삼았으며 일반적인 해석을 하기 위하여 3절점 요소 및 4절점 요소를 가지는 경우를 해석하였다. 해석이론으로는 그동안 사용되었던 Lagrangian 및 Hermite 보간함수를 병용한 방법이 아닌 Lagrangian 보간함수만을 사용한 고차 전단변형이론을 사용하였다. 이러한 방법을 사용함으로써 일반적인 절판 구조물에 대한 해석을 수행할 수

있었으며 기하학적 형상 변화, 특히 길이 변화, 경사 각도, 절판 각도 등을 중심 변수로 선정하여 거동 특성에 대한 영향을 분석하였다.

본 연구에서는 3절점 요소 및 4절점 요소를 가지는 절판 구조물에 대하여 길이 변화, 경사 각도 및 절판 각도 등의 해석을 수행하였다. 길이 변화에 대해서는 일반적으로 길이 비가 커질수록 처짐이 크게 나왔으며 경계조건 및 경사 각도에 의해서 조금 다르게 나오는 것을 볼 수 있었다. 경사 각도의 변화에서는 처짐은 경사 각도가 커질수록 처짐은 작게 나타나지만 단면력은 경사 각도에 민감하게 반응하지 않음을 알 수 있었다. 또한 적층수에 대해서는 거동 특성이 다르게 나오므로 적층조건에 따른 해석의 필요성을 볼 수 있었다. 이러한 기하학적 특성변화에 대한 거동 특성을 분석함으로써 복합적층 절판 구조물의 해석에서 특성을 파악할 수 있었으며 절판 구조물의 거동을 이해하는데 도움이 될 것으로 판단된다.

### 참 고 문 헌

- 유용민, 임성순, 장석운(2003) 임의의 곡절각도를 갖는 비등방성 절판의 변위형상 비교, *대한토목학회*, 23(6-A), pp.1311~1319.
- 유용민, 임성순, 장석운(2006) 곡절 길이비에 따른 복합적층 절판 구조물의 거동, *한국전산구조공학회 논문집*, 19(3), pp.223~231.
- 이병채, 이용주, 김동석, 구본용(1992) 삼각형 판 요소의 변위 거동에 대한 비교 연구, *한국전산구조공학회 논문집*, 5(2), pp.105~118.
- 이상열, 유용민, 장석운(2004) 고차전단변형 판이론을 이용한 채널단면을 갖는 복합적층 절판 구조물의 유한요소 진동해석, *한국전산구조공학회 논문집*, 17(1), pp.21~30.
- Allmen, D. J(1984) A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Computers & Structures*, 19(1-2), pp.1~8.
- Dhainaut, Marc(1997) A comparison between serendipity and lagrange plate elements in the finite element method, *Communications in numerical methods in engineering*, 13(5), pp.343~353.
- Eratli, Nihal, Akoz, A. Yalcin(2002) Mixed finite element formulation for folded plates, *Structural Engineering and Mechanics*, 13(2), pp.155~170.
- Goldberg, J. E., Leve, H. L.(1957) Theory of prismatic folded plate structures, *Int. Association for Bridge and Structural Engineering J.*, 17.



- Ibrahimbegovic, A., Wilson, E. L.**(1991) A united formulation for triangular and quadrilateral flat shell elements with six nodal degree of freedom, *Communication in Applied Numerical Methods*, 7, pp.1~9.
- Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M.**(1977) A higher-order theory of plate deformation, Part 1:homogeneous plates, *Journal of Applied Mechanics*, 44, pp.663 ~668.
- Lo, K. H., Christensen, R. M., Wu, E. M.**(1977) A higher-order theory of plate deformation, Part 2:laminated plates, *Journal of Applied Mechanics*, 44, pp.669~676.
- Niyogi, A Guha, Laha, M. K., Sinha, P. K.**(1999) Finite element vibration analysis of laminated composite folded plate structures, *Shock and Vibration*, 6(5/6), pp.273~284.
- Reddy, J. N.**(1984) A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, 51, pp.745~752.
- Putchu, N. S., Reddy, J.·N.**(1986) A refined mixed shear flexible finite element for the nonlinear analysis of laminated plates, *Computers & Structures*, 22(4), pp.529~538.
- Sadek, Edward A.**(1998) Some serendipity finite elements for the analysis of laminated plates, *Computers & Structures*, 69(1), pp.37~51.
- Turne, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., Topp, L. J.**(1956) Stiffness and deflection analysis of complex structures, *Journal of Aero/Space Science*, 23, pp.805~823.
- Bathe, Klaus-Jurgen**(1996) Finite element procedures, Prentice Hall.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. C.**(1991) The finite element method, 2, 4th edition, McGraw-Hill.