

# SIMP를 이용한 구조물의 재료 위상 최적설계

## Part I :부분적인 구멍의 위상을 가지는 초기 설계영역

### Material Topology Optimization Design of Structures using SIMP Approach

#### Part I :Initial Design Domain with Topology of Partial Holes

이 동 규<sup>†</sup>                      신 수 미\*                      박 성 수\*\*  
Lee, Dong-Kyu                      Shin, Soo-Mi                      Park, Sung-Soo  
(논문접수일 : 2006년 2월 8일 ; 심사종료일 : 2007년 1월 22일)

#### 요 지

본 연구에서는 위상최적화 알고리즘의 수렴성을 개선하기 위해 설계영역에 초기 구멍을 도입하는 방법을 제시하는데, 이것은 경계면에 기초한 최적화 방법의 느린 수렴성을 완화하기 위해, Eschenauer *et al.*에 의해 고안된 버블 방법의 설계 영역 안에 구멍을 도입하는 개념과 연계된다. 버블 방법과 달리, 제안된 방법에서는 최적화 과정동안 구멍의 위치를 정의하는 특성함수를 이용하지 않고, 최적화 초기화 단계에서만 초기 구멍을 도입하는데, 이러한 초기 설계영역 안의 솔리드와 보이드 영역들은 고정되는 것이 아니라 합쳐지거나 쪼개지면서 변화된다. 따라서 위상최적화 알고리즘에서 구멍의 이동에 관련된 복잡한 수치적인 계산 없이 자동적으로 설계변수의 유한변화를 더욱 강화시키기 때문에 목적함수 값의 수렴성을 개선할 수 있다. 본 논문에서는 다양한 치수와 형상의 구멍을 포함하는 초기 설계영역을 가지는 Michell형 보의 위상 최적설계를 밀도분포법으로 불리는 SIMP를 이용하여 수행하였다. 이를 통해 위상최적화의 수렴성을 개선하고 최적위상과 형상에 영향을 미치는 초기 구멍의 효과를 검증하였다.

**핵심용어** : SIMP, 재료 위상최적화, 초기 설계영역, 부분적인 구멍, 수렴성

#### Abstract

This study shows an implementation of partial holes in an initial design domain in order to improve convergences of topology optimization algorithms. The method is associated with a bubble method as introduced by Eschenauer *et al.* to overcome slow convergence of boundary-based shape optimization methods. However, contrary to the bubble method, initial holes are only implemented for initializations of optimization algorithm in this approach, and there is no need to consider a characteristic function which defines hole's deposition during every optimization procedure. In addition, solid and void regions within the initial design domain are not fixed but merged or split during optimization procedures. Since this phenomenon activates finite changes of design parameters without numerically calculating movements and positions of holes, convergences of topology optimization algorithm can be improved. In the present study, material topology optimization designs of Michell-type beam utilizing the initial design domain with initial holes of varied sizes and shapes is carried out by using SIMP like a density distribution method. Numerical examples demonstrate the efficiency and simplicity of the present method.

**Keywords** : SIMP, material topology optimization, initial design domain, partial holes, convergence, density distribution method

#### 1. 서 론

구조물의 최적설계는 1960년대 중반까지 구조 설계 분야의

엔지니어들에게 많은 관심의 대상이었다. 하지만 실제적인 구조물의 설계단계에 최적이론을 적용하는 것은 많은 계산적인 비용이 요구되었기 때문에 간단한 구조물을 대상으로 한 이론

<sup>†</sup> 책임저자, 독일 슈투트가르트대학교 토목공학과 구조역학연구소 박사과정  
Tel: 051-510-3996 ; Fax: 051-514-2230  
E-mail: ssm82@dreamwiz.com

\* 교신저자, 부산대학교 건축공학과 BK21 박사후 연구원 공학박사

\*\* 부산대학교 건축공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2007년 4월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2007년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

적인 연구에만 치중한 면이 많아 실제적인 구조설계의 영역으로 정착되지 못했다. 1960년대 후반 들어 컴퓨터 기술의 급속한 발달과 더불어 최적설계의 실용화가 이루어졌으며, 많은 계산을 요구하는 최적설계이론의 최적화 알고리즘 구현과 구조물의 응답 및 거동과 같은 구조해석을 수행하는 것이 가능하게 되었다. 이러한 구조해석과 알고리즘을 통한 수학적 최적화 방법들은 Schmit에 의해 전체적인 구조 시스템에서 자동적으로 수행가능하게 되었다(Schmit, 1960). 1970년대 이후, 컴퓨터 원용 설계(CAD), 유한 요소법(FEM), 유한 차분법(FDM), 경계 요소법(BEM) 등 분야는 효과적으로 구조 최적화에 접목되어 지금까지 실제 대형 구조물의 설계에 많이 이용되고 있다. 오늘 날까지 특히 많은 연구자들에 의해 수행되고 있는 구조적인 최적설계분야는 크게 세 가지로 나누어지며, 적용하는 설계변수에 따라 형상(shape), 위상(topology), 그리고 치수(size)에 대한 최적화로 분류된다. 경계면 위의 점들의 좌표가 설계변수가 되는 형상 최적화는 최적 위상(부재간의 연결성)의 고려가 배제된다. 부재의 굵기나 높이, 또는 두께를 최적화하는 치수 최적화는 광역적인 구조물의 관점이 아니라, 주어진 제한조건에서 국소적인 부재들의 최적 치수를 산정한다. 위상 최적화는 설계변수로서 설계영역에 분포되는 재료 밀도를 가지기 때문에 전체적인 구조물의 관점에서 최적 형상뿐만 아니라 최적 위상도 산정이 가능하다. 또한 설계영역 내 구멍의 생성, 소멸과 같은 위상의 변화가 시도되기 때문에 구조물의 경량화를 위해서 큰 효과를 얻을 수 있다. 형상 최적화에 의한 구조물의 형상 변화만으로는 이를 추구하는데 한계를 가진다. 이러한 점에서 위상 최적화는 구조 최적화 중에서 가장 상위 레벨을 구현한다고 볼 수 있다.

엔지니어링의 관점에서 설계된 최적구조물이 설계 영역 내에 구멍의 도입이나 그것의 기하학적 형상과 크기 조절을 통해 구조물의 경량화가 재차 시도될 수 있다. 그럼에도 불구하고 구멍의 도입 없이도 설계조건에 만족하는 경량화가 이루어졌다면, 구멍의 도입은 더 이상 경량화를 위해 필요하지 않을지도 모른다. 하지만 그러한 현상은 절대적으로 구멍의 형상이나 크기와 같은 기하학적 특성에 의존하여 판단되어야 하기 때문에 형상최적화의 결과는 초기 설계영역 내의 위상에 절대적으로 의존하는 단점을 가지고 있다(Zienkiewicz 등, 1973; Hsu 등, 2005). 또한 경계면의 수렴이동에 의한 최적화 경향을 가지기 때문에 최적화 수행 동안 초기 위상의 설정에 따라 경계면의 이동도 다를 수 있다. 이러한 경계면의 이동은 국소적인 민감도를 생산하기 때문에 재료가 없는 영역에 재료가 생산되거나, 재료가 있는 영역 안에 구멍이 생길 수 없다. 따라서 최적 형상이 산출되었음에도 설계영역 내 부재들의 연결성이 최적 위상을 형성한다고 단정

지을 수 없다(Burger 등, 2004).

따라서 어떠한 초기 구멍을 가진 설계영역에 대해서도 만족할 수 있는 고유한 최적 위상을 가지는 구조물의 최적설계 방법의 필요성이 대두되며, 이것은 전통적으로 균질화법(homogenization method)이나 밀도분포법(density distribution method)과 같은 설계영역의 개념을 가지는 위상 최적설계로서 수행되고 있다(Bendsøe 등, 1988; Bendsøe, 1989; Mlejnek, 1992; Yang 등, 1994; 임오강 등, 1998). 균질화법에서는 주기적이고 미소한 복합재료를 가지는 고정된 설계영역에서 최적정 조건을 만족하는 최적의 다공질 구조물을 찾는다. 그러나 산출된 최적구조물이 무수히 많고 미세한 다공성을 가지는 경우, 최적구조물의 제조적인 측면에서 많은 비용이 소모되거나 생산 자체가 불가능할지도 모른다. 최적결과물의 현실화를 필요로 하는 공학적인 관점에서 밀도법은 최근에 많이 다루어지고 있다. 밀도법은 설계영역 내에 주기성과 근사성의 수학적이고 물리적인 개념에 의한 미소한 복합재료 모델을 가정하지 않고, 최적화 동안 감차요소 위에 균일하게 분배되는 재료특성은 탄성계수와 요소 밀도간의 단순한 비선형 관계성에 의해 정의되기 때문에 계산의 수치적인 효율성과 산출되는 최적구조물의 제조성이 우수하다. 그러나 이러한 관계성은 실제적으로 물리적인 의미가 부족한 단점을 가지고 있다.

일반적으로 위상최적화를 통하여 최적형상 뿐만 아니라, 동시에 최적위상을 생산할 수 있다. 설계영역 내에 구멍의 도입은 설계변수의 인위적인 위상변화를 유도하여 전체적인 구조물의 위상변화를 발생시켜, 최적화의 수렴을 빠르게 한다. 이것은 위상학적 또는 광역적 민감도(topological(global) derivative)의 개념과 연관된다(Sokolowski 등, 1999; Cea 등, 2000; Garreu 등, 2001; Novotny 등, 2003). 형상최적화와 같은 경계면(boundary-based) 최적화는 국소적인 형상 경계면의 민감도(shape(local) derivative)를 수행하기 때문에 수렴성이 매우 느리다. 이러한 느린 수렴성을 완화하는 방법인 버블 방법(bubble method)은 형상최적화와 관련되어 인위적인 구멍의 위치와 개수가 사전에 정의된 특성함수에 의해 변화되면서 빠른 최적 수렴성을 유도한다(Eschenauer 등, 1994).

형상최적화에 사용된 버블 방법과 같은 개념을 가지고, 본 연구에서는 위상최적화 문제에 대하여 다양한 형상과 치수의 인위적인 구멍을 가지는 초기 설계영역의 위상을 적용했을 때 밀도분포법을 수행하여 위상최적 구조물을 산출하였다. 이러한 구멍의 도입은 위상최적화의 본성인 전체 위상의 변화를 유발하는 설계변수들의 유한적인 변화정도, 즉 위상학적 민감도를 강화하여 보다 우수한 위상 최적화 알고리즘 수

렴성을 구현한다.

최적화의 초기조건에만 구멍을 가지는 위상을 정의하기 때문에, 최적화과정 동안 구멍의 위상과 형상의 변화는 구멍사이 에 인접한 설계변수 값의 자동적인 변화에 의존하게 된다. 따라서 본질적으로, 최적화과정마다 특성함수를 통해 구멍의 위치와 개수를 변화시키는 형상최적화의 비블 방법과 다르다.

추가적으로 본 연구에서는 초기 위상으로서 도입되는 구멍의 치수와 형상에 따라 다양한 위상 최적화의 수렴성이 산출됨을 분석하여, 최적 구조물이 가질 수 있는 최대 강성, 최적화의 수렴성, 그리고 최적 위상 측면에서 적절한 초기 위상의 기하학적 형상과 치수를 제시하였다.

## 2. 재료 위상최적화 문제

### 2.1 최적화 문제의 정의

위상최적 설계는 일반적으로 감차를 통하여 설계변수로서 재료 표시(indicator)함수가 도입된다. 즉, 재료 표시함수  $\Phi : x \rightarrow \{0, 1\}$ 는 설계영역을 완전한 재료영역(solid region)  $\Omega^s = \{x \in \Omega \mid \Phi(x) = 1\}$ 과 재료가 없는 영역(void region)으로 나눈다. 연속적인 최적화문제를 위하여 재료 표시함수는 재료 밀도로 나타내며, 따라서 설계영역에서 0과 1 사이의 중간 재료영역(intermediate material region)이 허용된다. 또한 재료의 밀도와 영계수 사이의 비선형 관계식을 가정한다. 선형 탄성 구조물을 지배하는 설계영역  $\Omega_x \subseteq R^n$ 에서 적합한 최적화 문제는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \min_{\Phi} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T(u) C(\Phi) \epsilon(u) d\Omega \right\} \\ & \text{subject to:} \\ & \int_{\Omega} \epsilon^T(u) C(\Phi) \epsilon(\delta u) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \bar{b}^T \delta u d\Omega + \int_{\Gamma_i} \bar{t}^T \delta u d\Gamma_i \\ & 0 \leq \Phi \leq 1, \int_{\Omega} d\Omega \leq V_0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $C$ 는 재료 강성텐서,  $\epsilon$ 은 변형률을 가리키며,  $E_0$ ,  $\Phi$ ,  $V_0$ 는 각각 공칭 영계수, 재료밀도, 공칭 부피를 나타낸다. 목적함수는 최소 변형률에너지 또는 최대 강성에너지로 정의되며, 부피제약조건이 사용된다. 장조건(field condition)과 경계조건(boundary condition)으로서 작용하는 물체력  $\bar{b}$ 과 마찰력  $\bar{t}$ 에 의해 생성되는 변위장  $u$ 는 최적화의 제약조건으로서 다루어지는 힘의 평형조건식의 변

분형태에 의해 결정된다. 이러한 평형조건식을 계산하기 위해서 일반적으로 설계영역이 유한요소들로서 감차되어, 재료 밀도가 요소들 안에서 일정하게 분포되는 것이 가정된다.

### 2.2 밀도분포법의 개념

균질화법에서는 설계영역 내에 다공성을 가지는 미소구조 복합재료 모델의 점근적인 근사성과 주기성을 가정하기 때문에, 계산의 복잡성과 무수히 많은 다공성을 가지는 최적구조물이 생산되어 제조성의 저하를 가지고 올 수 있다.

위상 최적화를 위한 연속체 구조물은 설계영역 내에서 연속적인 스칼라 함수로서 최적 설계변수를 정의한다. 연속체의 감차를 통하여 각 요소들의 고유한 값으로서 요소 밀도를 정의한다. 이것은 설계영역에서 벌칙으로 표현된다. 소위 말하는 SIMP라고 불리는 밀도분포법에 의하면 설계영역에서 하나의 고유한 영계수가 균일하게 분포되는 것이 아니라 요소들의 영계수 집단으로 균일하게 표현된다. 요소들의 영계수는 설계변수인 요소밀도에 의존하여 요소 강성에 영향을 미친다. 이러한 점은 구조해석의 최적화 단계에서 유한요소 해석과 같은 요소단위의 해석을 위해 적합하다.

설계영역의 요소 감차를 통한 요소 영계수  $E_i$ 와 밀도  $\Phi_i$ 와의 관계성은 다음과 같다.

$$E_i(\Phi_i) = E_0 \left( \frac{\Phi_i}{\Phi_0} \right)^k; \quad 0 \leq \Phi_i, \Phi_0 \leq 1, \quad i = \text{요소번호} \quad (2)$$

여기서,  $E_0$ 와  $\Phi_0$ 은 공칭 영계수와 공칭 요소밀도이며,  $k \geq 1$ 은 벌칙 매개변수로서 일반적으로 1이상의 값을 가진다. 벌칙 매개변수  $k$ 가 1에서 5만큼 변화할 때 밀도분포법에서 영계수와 밀도 사이의 관계선도는 Fig.1과 같이 나타낼 수 있다.

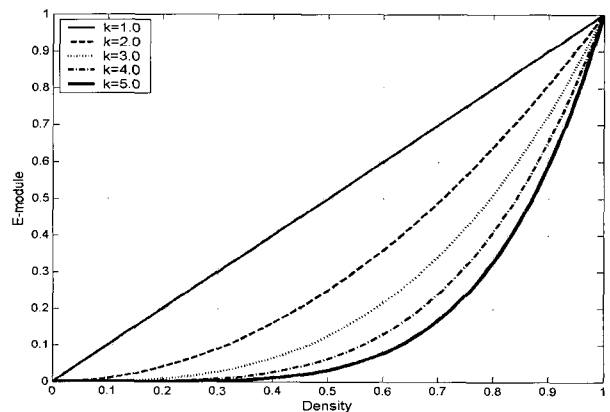


Fig.1 Relationships between Young's modulus and density for density distribution method

등방성 재료를 가지는 평면응력 상태를 가정하면 요소의 재료텐서  $C_i$ 는 식 (2)를 이용하여 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$C_i = \frac{E_i(\Phi_i)}{(1-\nu_0^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서  $\nu_0$ 는 공칭 프와송 비를 나타낸다.

### 3. 변분법을 이용하는 민감도 해석

일반적으로 민감도 해석을 위해서 정해와 큰 오차를 가지는 수치적인 방법(numerical method)보다 해석적인 방법(analytical method)을 주로 사용한다. 수치적인 방법은 해석적인 방법에 의한 민감도 결과의 검증에 위한 것이다. Fig.2에서 민감도 해석의 방법들을 분류하여 도시하였다.

해석적 방법은 감차법(discrete method)이나 변분법(variational method)을 통해 수행될 수 있다. 감차법의 경우 이미 감차된 역학적 문제의 미분이 수행되나, 변분법에서는 처음에 연속적인 문제가 미분된 후에 감차된다. 이러한 방법들은 동일한 민감도해석의 결과를 생산한다. 확정된 최적 설계조건들과 설계변수를 가지는 경우, 변분법이 수치적인 효율성 면에서 감차법보다 더 우수하다. 감차법과 변분법은 모두 직접법(direct method)과 수반법(adjoint method)으로의 해석이 가능하다. 직접법의 경우 설계변수에 대한 변위장의 민감도  $\nabla_s u$ 가 직접 계산되나, 수반법에서는 라그랑지 계수를 이용하여 수치적인 비용이 큰 변위장의 민감도 계산이 필요없다.

본 연구에서는 최적 설계조건과 재료밀도의 설계변수가 확정된 위상최적문제를 다루기 때문에 변분법을 사용하여 민감도 해석을 수행하였다.

연속적인 변위장은 최적 설계변수  $s$ 에 의존하기 때문에 식 (1)에 정의된 목적함수  $f$ 의 민감도는 편미분의 식으로 아래

와 같이 구성된다(Haug 등, 1986).

$$\nabla_s f = \nabla_s^{ex} f + \overline{\nabla_u f}^T \nabla_s u \quad (4)$$

여기서,  $\nabla_s^{ex} f$ 는 명시적인(explicit) 민감도 항 그리고  $\overline{\nabla_u f}^T \nabla_s u$ 는 암시적인(implicit) 민감도 항을 나타내며, 앞의 2.1장에서 정의한 최적화 문제를 가지는 목적함수의 총 편미분은 식 (4)를 이용하여 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \nabla_s f = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \varepsilon^T \nabla_s C(\Phi) \varepsilon d\Omega_x \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \varepsilon^T C(\Phi) \nabla \varepsilon \nabla u d\Omega_x \end{aligned} \quad (5)$$

연속적인 변위장의 민감도  $\nabla_s u$ 항을 나타내기 위해 식 (1)에서의 힘의 평형조건식을 미분하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_x} \delta u^T L^T C L \nabla_s u d\Omega_x \\ & = \int_{\Omega_x} \delta u^T \nabla_s \bar{b} d\Omega_x + \int_{\Gamma_t} \delta u^T \nabla_s \bar{t} d\Gamma_t \\ & - \int_{\Omega_x} \delta u^T \nabla_s L^T C L u d\Omega_x \\ & - \int_{\Omega_x} \delta u^T L^T \nabla_s C L u d\Omega_x \\ & - \int_{\Omega_x} \delta u^T L^T C \nabla_s L u d\Omega_x \end{aligned} \quad (6)$$

$\nabla_s u$ 는 위의 식 (6)에서 직접적으로 계산 될 수 있지만, -이를 직접법(direct method)이라고 한다. 수치적인 계산 노력이 많이 필요하기 때문에 여기서는 변위장의 민감도 계산이 필요 없는 라그랑지 계수  $\gamma$ 의 수반법(adjoint method)을 사용한다. 따라서 새로운 목적함수  $\tilde{f}$ 를 다음과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & f - \gamma \left( \int_{\Omega_x} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega_x - \int_{\Omega_x} \delta u^T \bar{b} d\Omega_x \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma_t \right) \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 새로운 목적함수는 힘의 평형조건식을 가진다. 식 (7)의 미분에서 라그랑지 계수의 미분항은 힘의 평형조건식의 zero항 때문에 소거되며, 목적함수  $\tilde{f}$ 의 미분은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & \nabla_x^{ex} f \\ & + \overline{\nabla f}^T \nabla_s u - \gamma \int_{\Omega_x} \delta u^T L^T C L \nabla_s u d\Omega_x \quad (a)=0 \end{aligned}$$

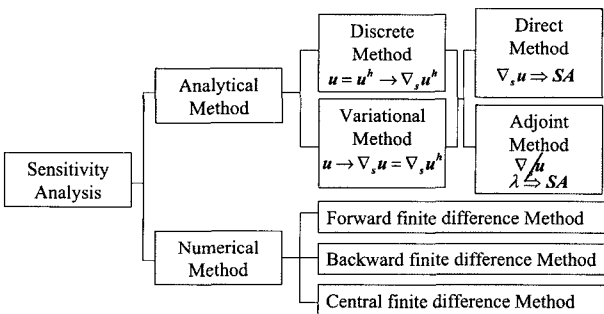


Fig.2 Methods of sensitivity analysis

$$\begin{aligned}
 & -\gamma \int_{\Omega_x} \delta u^T \nabla_s L^T C L u \, d\Omega_x \\
 & -\gamma \int_{\Omega_x} \delta u^T L^T \nabla_s C L u \, d\Omega_x \\
 & -\gamma \int_{\Omega_x} \delta u^T L^T C \nabla_s L u \, d\Omega_x \\
 & + \gamma \int_{\Omega_x} \delta u^T \nabla_s \bar{b} \, d\Omega_x + \gamma \int_{\Gamma_i} \delta u^T \nabla_s \bar{t} \, d\Gamma_i \quad (8)
 \end{aligned}$$

여기서, 라그랑지 계수는 임의로 선택할 수 있는 변수이므로 수치적으로 비용이 큰 연속적인 변위장의 민감도를 제거할 수 있는 특정한 라그랑지 계수 값을 사용할 수 있다. 따라서 특성방정식 (a)=0을 만족하는 라그랑지 계수를 구한다.

감차과정에서 물체력  $\bar{b}$ , 외력  $\bar{t}$ , 미분 텐서  $L$ , 자코비 매트릭스는 설계변수  $s$ 에 의존하지 않는다는 가정 하에, 설계변수에 대한 목적함수의 최종적인 민감도 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla_s \tilde{f} = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{요소개수} \tilde{u}_e^T \int_{\Omega_e} B_e^T \nabla_s C_e(\Phi) B_e \, d\Omega_e \tilde{u}_e \quad (9)$$

여기서,  $\tilde{u}_e$ 는 절점 변위벡터,  $B_e$ 는 요소 연산 매트릭스,  $C_e$ 는 요소의 재료텐서를 가리킨다.

#### 4. 구멍의 초기화와 위상최적화 알고리즘

연속체 구조물의 설계영역 내의 구멍은 재료가 없는 것과 존재하는 영역의 경계로서 연속적인 면으로 표현된다. 그러나 설계영역의 유한요소 감차과정에서, 사각형과 같은 형상을 가진 유한요소 자체가 경계면(interface)을 형성하기 때문에 구멍의 경계에서 불연속면이 생성되어 연속적인 공칭 구멍의 형상과 비교했을 때 수치적인 오차를 유발한다. 하지만 많은 유한요소를 적용했을 때 수치적인 비용이 증가하지만 공칭 치수와의 오차는 줄어든다.

여기서는 4절점 정사각형 유한요소가 감차요소로 사용되며, 다양한 반경을 가지는 원, 마름모, 정사각형의 기하적인 형상의 공칭 구멍을 다룬다. 이것은 Fig.3, 4, 5와 같이 각각 정의된다. 여기서,  $L$ 과  $H$ 는 구조물의 길이와 높이이다.  $r_0$ 는 정의된 공칭 구멍치수를 가리키며,  $r_c$ 는 설계영역 내 임의의 요소위치  $(x, y)$ 에서 공칭중심  $(x_c, y_c)$ 까지 거리이다. 일반적으로  $r_c$ 가 공칭 구멍치수  $r_0$  보다 작을 때 그 부분에서 재료가 없는 영역이 정의된다. 원, 마름모, 정사각형의 구멍을 정의하는 식은 각각 다음과 같다.

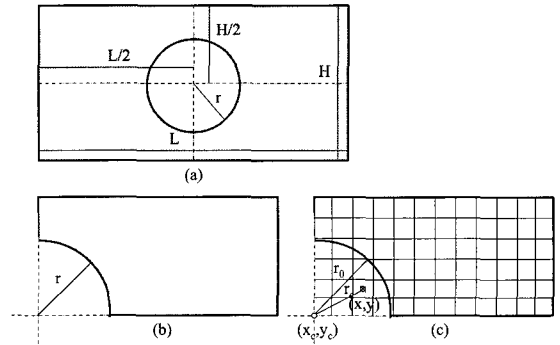


Fig.3 Design domain with an initial circular hole: (a) definition of design domain, (b) continuous 1/4 design domain, (c) discrete 1/4 design domain

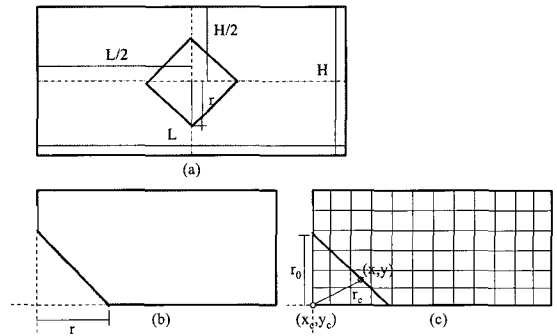


Fig.4 Design domain with an initial diamond hole: (a) definition of design domain, (b) continuous 1/4 design domain, (c) discrete 1/4 design domain

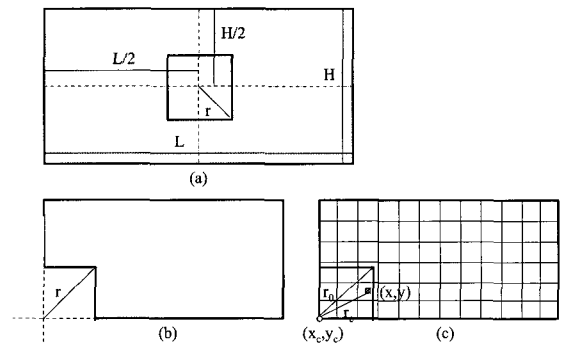


Fig.5 Design domain with an initial square hole: (a) definition of design domain, (b) continuous 1/4 design domain, (c) discrete 1/4 design domain

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 < r_0^2 \quad (10)$$

$$|x - x_c| + |y - y_c| < |r_0| \quad (11)$$

$$\begin{cases} x_c - \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 < x < x_c + \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 \\ y_c - \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 < y < y_c + \frac{\sqrt{2}}{2} r_0 \end{cases} \quad (12)$$

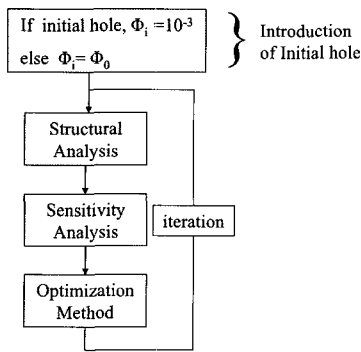


Fig.6 Algorithm of topology optimization method by initial design domain with partial holes

초기 설계영역 안에 재료가 없는 구멍 영역을 가지는 위상 최적화의 알고리즘은 Fig. 6으로 도시되며, 수치적으로 다음의 계산 순서에 따른다.

(1) 감차된 초기 설계영역을 정의하고 경계와 하중조건을 입력한다. 위상최적화의 설계변수로서, 구멍이 존재하여 재료가 없는 설계영역의 초기 요소밀도의 값은 요소강성 매트릭스의 수치적인 특이성과 불안정성을 고려해  $10^{-3}$ 을 적용한다 (Allaire 등, 2004; Kim 등, 2005). 최적화 과정동안 구멍 영역의 초기 설계변수 값들은  $10^{-3}$ 으로 고정되지 않고 변화한다. 재료가 있는 영역은 부피제약 값에 따라 공칭 요소 밀도 값을 입력한다.

(2) 요소 재료밀도에 의해 유한요소의 영계수는 확정되고, 유한요소해석을 하여 절점 변위를 계산한다.

(3) (2)에서 수행한 구조해석을 통하여 절점변위 값은 설계변수에 대한 목적함수의 민감도해석이 수행된다.

(4) 위상최적 구조물의 체크보드 현상과 같은 수치적인 특이성을 제거하기 위해 필터링 방법에 의한 민감도를 제차 구한다.

(5) 요소 안에서 균일하게 분포하는 재료밀도 값의 변화에 따른 목적함수의 필터링 민감도를 이용하여, OC(optimality criteria)나 MMA(method of moving asymptotes)와 같은 경사도 최적화 방법에 의해 최적 설계변수 값을 갱신한다.

(6) 갱신된 최적 설계변수 값, 즉 요소밀도 값을 가지고 (2)~(5)의 과정이 목적함수 값이 주어진 수렴조건에 의해 수렴할 때까지 순차적으로 반복된다.

(7) 수렴 되었을 때 최적 재료 분포 선도를 그린다.

초기 설계영역에서 구멍의 도입은 재료가 존재하는 부분과 존재하지 않는 부분 사이 경계영역 근처에서 발생하는 설계변수 값의 급격한 이동현상 때문에, 최적화 알고리즘 동안 설계변수 값의 유한변화가 더욱 강화되어, 구조물 위상의 변화를 생산한다.

## 5. 수치 예제

### 5.1 Michell 구조물의 위상최적화

본 연구에서 적용되는 수치 예제는 Fig. 7과 같은 선형 탄성 문제로서 초기 설계영역의 중앙에 구멍을 가지는 Michell 트러스 구조물의 위상최적화가 고려된다. 길이  $L$ 과 높이  $H$ 의 비는 2:1로서 가정하며, 양쪽 단순지지 하에 중앙 하판에 집중하중을 받는 설계 조건을 가진다. 해석적으로 Michell 트러스 구조물은 최대 인장력과 압축력에 대응하는 최적 배열을 형성하기 위해서 각 부재들은 직교성을 가지고 배치되어야 한다. 이것은 오늘날 MBB 보 구조물과 함께 최적화의 해를 검증하기 위해 범용적으로 사용되고 있다.

수치적인 계산을 위해 연속체 구조물의 감차가 요구되며, 설계영역(60cm×30cm) 안에 60×30의 유한 요소가 적용된다. 구멍의 형상은 감차된 형태로서 4장에서 언급한 원, 마름모, 정사각형을 설계영역 내에 한 개 사용하며, 공칭 구멍 치수  $r_0$ (cm)는 5.5, 8.0, 10.5, 13, 15.5를 적용한다. 목적함수는 최소 변형률에너지(N·m)이며, 부피제약조건은 초기 구멍을 제외한 전체 구조물 부피의 40%가 적용된다. 수치적 단순성을 위해 공칭 영계수  $E_0 = 1.0GPa$ , 공칭 프와송 비  $\nu_0 = 0.2$ , 그리고 공칭 하중  $P_0 = -1.0N$ 이 사용된다. 밀도분포법에서 벌칙 계수는 수치적인 안정성 측면에서 일반적으로 3.0을 많이 사용하나 본 연구에서 제시된 초기 구멍을 적용한 경우의 수렴이력과 위상 선도를 보다 분명히 나타내기 위하여  $k = 5.0$ 를 이용하였다. 체크보드현상은 재료 밀도 분포의 0-1 공식으로 인해 발생할 수 있는 지그재그 현상으로서 이로 인해 요소들의 경계에 과도한 응력집중이나 요소 강성 매트릭스의 특이성이 유발될 수 있다(임오강 등, 1999). 이를 제거하기 위해서 필터링 기법을 사용하였다 (Sigmund, 2001).

부피제약조건이 40%일 때 원, 마름모, 정사각형의 구멍을 가지는 구조물에서 목적함수(N·m)의 수렴곡선은 각각 Fig. 8, 9, 10과 같이 나타낼 수 있다. 구멍이 원형인 경우, 구멍 치수가 가장 작은 5.5와 가장 큰 15.5에서 구멍이 없는 기

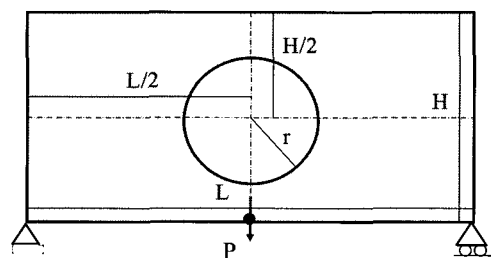


Fig.7 Initial design for a Michell structure

존의 위상 최적 수렴이력과 비교할 때, 수렴성이 더 우수함을 보였다. 마름모와 정사각형의 구멍에서는, 치수가 5.5와 8.0에서 구멍이 없는 기존의 결과보다 수렴성이 더 우수하였다. 그리고 원(치수 15.5와 치수 8.0)인 경우를 제외하면 전체적으로 구멍의 치수가 크면 구멍을 적용하지 않는 기존의 것보다 수렴성이 좋지 않으며, 치수가 작으면 수렴성이 개선됨을 알 수 있었다. 이로부터 초기 구멍의 기하학적 형상과 치수를 적절하게 초기 설계영역 안에 적용했을 때, 초기 설계영역이 모두 질량이나 부피에 의해 정의된 재료로 균일하게 채워진 영역인 일반적인 위상 최적화의 경우보다 수렴성이 더 우수하고 최대 강성이 더 큰 최적구조물을 생산할 수 있음을 알 수 있다.

예를 들어, Fig. 8에서 구멍이 없는 것과 구멍 치수가 15.5인 경우의 수렴이력을 비교하면 이러한 사실을 분명히 알 수 있다. 구멍의 도입이 모든 경우에 대하여 위상 최적결과를 개선하는 것은 결코 아니며, 초기 구멍을 설계영역 내에 적절하게 운용하는 것이 중요하다.

원, 마름모, 정사각형의 구멍을 가지는 Michell 트러스 구조물의 최적 재료 밀도의 분포들은 각각 Fig.11, 12, 13과 같다. 각 그림들의 왼쪽은 구멍을 가지는 초기 설계영역을, 오른쪽은 생산된 최적 구조물을 가리킨다.

구멍으로 표현되는 초기 위상들의 특성에 의존하여 다른 최적 위상과 형상이 산출됨을 알 수 있다. 특히, 15.5의 치수를 가지는 원형의 경우, 구조적인 강성 면에서 가장 우수한 최적 구조물을 생산하며, Fig. 14에 도시된 Michell에 의해 수행된 해석적인 최적 구조물의 특성과 가장 유사하다. Fig. 14는 주어진 하중 및 경계 조건들 하에서 가장 최적화 되어진 이상적인 형태이다. 이로부터 초기 구멍의 도입으로 설계변수의 유한 변화를 강화하여, 해석적인 위상과 유사한 값인 가장 최소 변형을 에너지를 가지는 구조물을 좋은 수렴 이하에 산출했음을 의미한다.

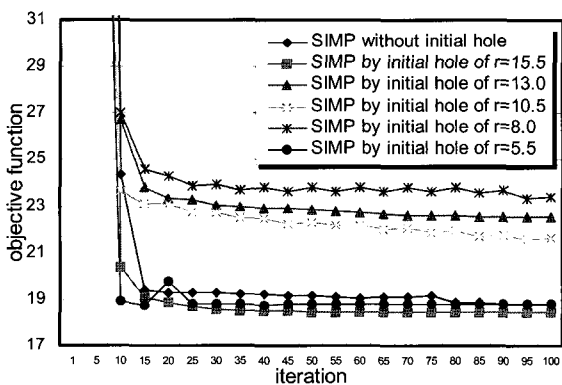


Fig.8 History of convergences of objective function values by the design domain of an initial circular hole: volume=40%

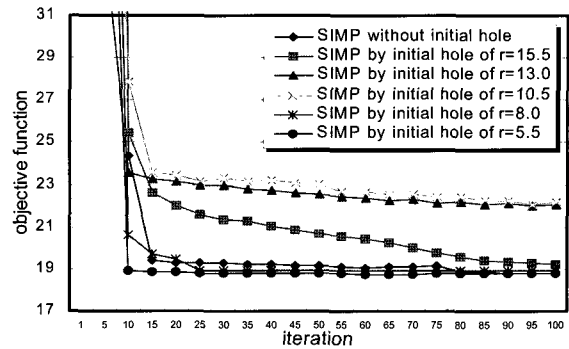


Fig.9 History of convergences of objective function values by the design domain of an initial diamond hole: volume=40%

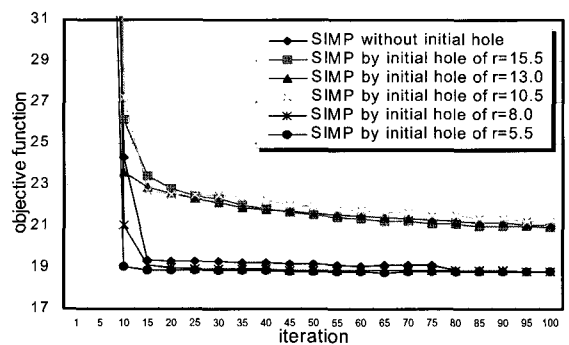


Fig.10 History of convergences of objective function values with the design domain of an initial square hole: volume=40%

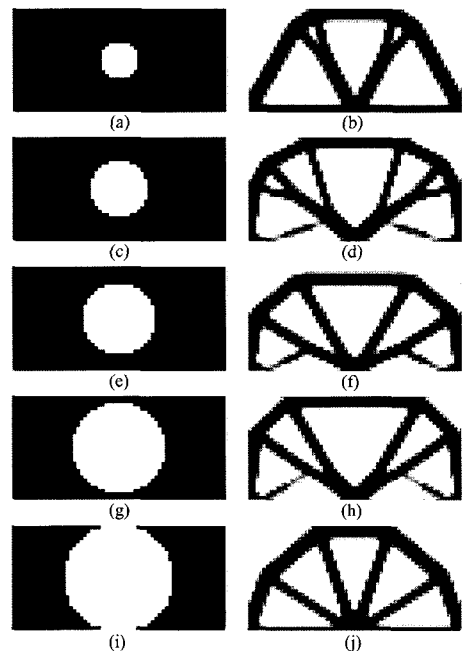


Fig.11 Optimal topologies and shapes by the design domain of initial circular hole: (a),(b) hole size of 5.5, (c),(d) hole size of 8.0, (e),(f) opening size of 10.5, (g),(h) hole size of 13.0, (i),(j) hole size of 15.5

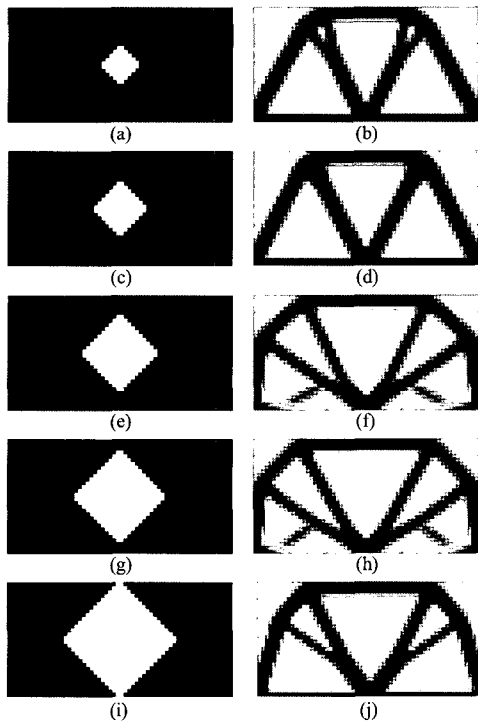


Fig.12 Optimal topologies and shapes by the design domain of an initial diamond hole: (a),(b) hole size of 5.5, (c),(d) hole size of 8.0, (e),(f) hole size of 10.5, (g),(h) hole size of 13.0, (i),(j) hole size of 15.5

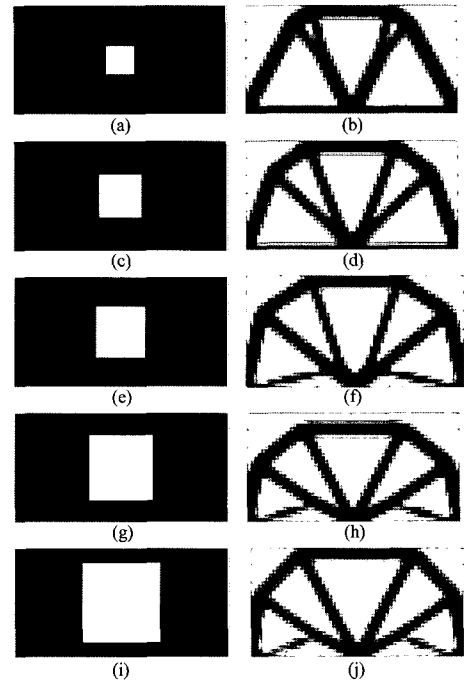


Fig.13 Optimal topologies and shapes by the design domain of an initial square hole: (a),(b) hole size of 5.5, (c),(d) hole size of 8.0, (e),(f) hole size of 10.5, (g),(h) hole size of 13.0, (i),(j) hole size of 15.5

구멍이 없는 설계영역을 적용할 때 최적위상은 Fig. 15와 같다. 이것의 구조물의 강성은 15.5의 원의 크기를 가지는 구멍과 비교하여 거의 같은 우수한 값을 가지지만, Michell의 해석적인 위상과 확연히 다름을 알 수 있다. 치수 5.5와 15.5의 정사각형의 구멍을 가진 위상 최적구조물에서 수평과 수직변위 선도는 Fig. 16과 같다. 크기가 5.5인 정사각형 구멍을 가지는 초기위상에 의한 위상최적 절점변위 선도보다 15.5의 크기를 가질 때 절점변위가 더 큰 값으로 분포된다.

이것은 15.5의 정사각형 초기위상에 의해 산출된 최적구조물의 강성이 5.5인 경우보다 더 취약함을 의미한다.

Fig. 17은 원의 구멍을 가지는 초기설계영역을 이용했을 때 최적화 과정동안 목적함수 값의 변화추이를 나타낸다. 이 곡선은 Fig. 8에서 도시된 목적함수 수렴곡선 추이에 근거한다. 목적함수의 변화량은 반복횟수가 20을 넘어서면서 구멍이 없거나, 구멍이 5.5 또는 8.0을 적용했을 때 그 변화량이 점점 줄어들면서 수렴된다. 하지만, 구멍이 8.0을 초과하는 경우 목적함수의 변화량이 불규칙적인 변화양상을 보이며, 수렴하지 않는다. 이것은 초기 설계영역의 구멍 크기가 지나치게 큰 경우 최적화 과정동안 설계변수 값의 변화가 지나치게 커져서, 결국 목적함수 값의 변화도 커짐을 의미한다. 이것은 오히려 최적화의 수렴성에 좋지 않은 결과를 초래한다

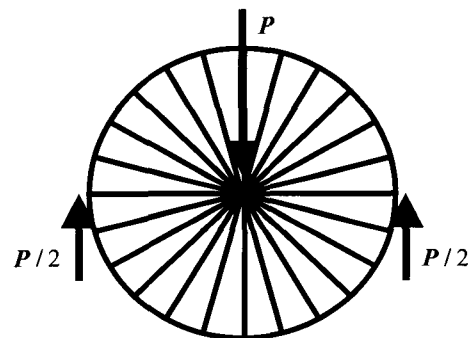


Fig.14 Analytical optimal topology of Michell truss

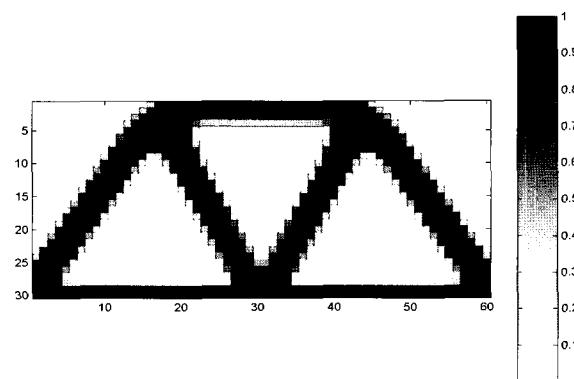


Fig.15 Optimal topology and shape as density distributions by design domain without initial hole



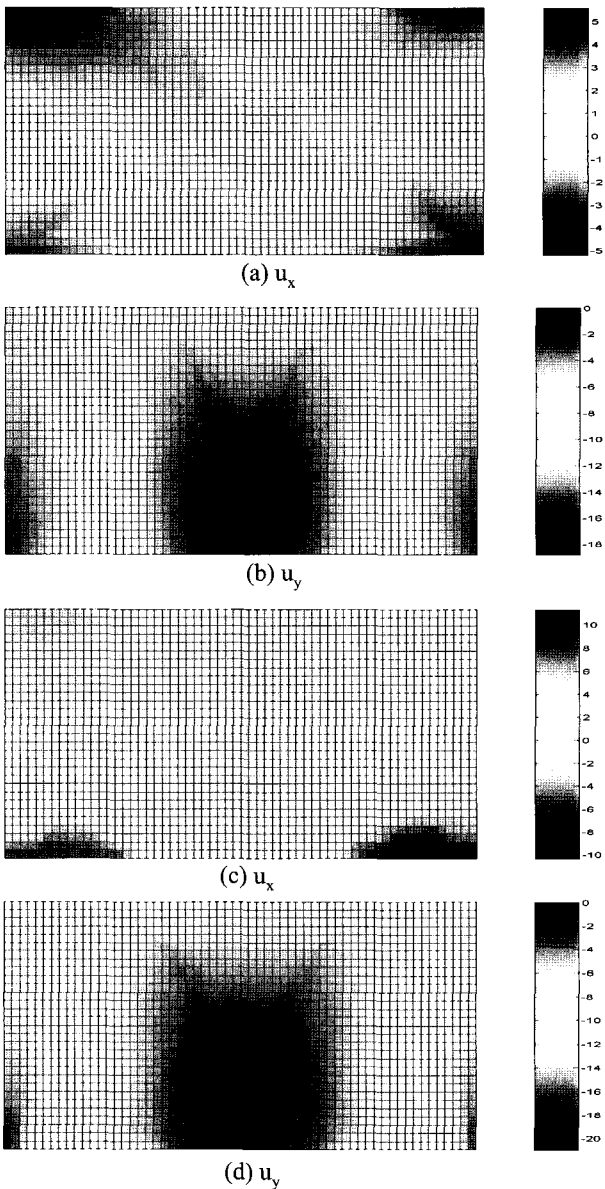


Fig.16 Optimal displacement contours by the design domain of an initial square hole: (a),(b)  $r_0=5.5$ , (c),(d)  $r_0=15.5$ , (a) and (c) are horizontal displacement contours, (b) and (d) are vertical displacement contours

고 볼 수 있다. 따라서 위상최적설계에는 적절한 구멍 크기를 가지는 초기 설계영역의 선택이 중요하다고 볼 수 있다.

### 6. 결 론

본 연구에서는, 위상최적화의 고유한 본성인 설계변수의 유한변화에 의한 위상의 변화특성을 다양한 구멍의 형상과 치수를 가지는 초기 위상의 도입을 이용하여 분석하였다.

초기 설계영역 내에 구멍과 같은 인위적인 위상의 도입은, 형상최적화문제에서 발생하는 최적형상의 초기위상 의존성과

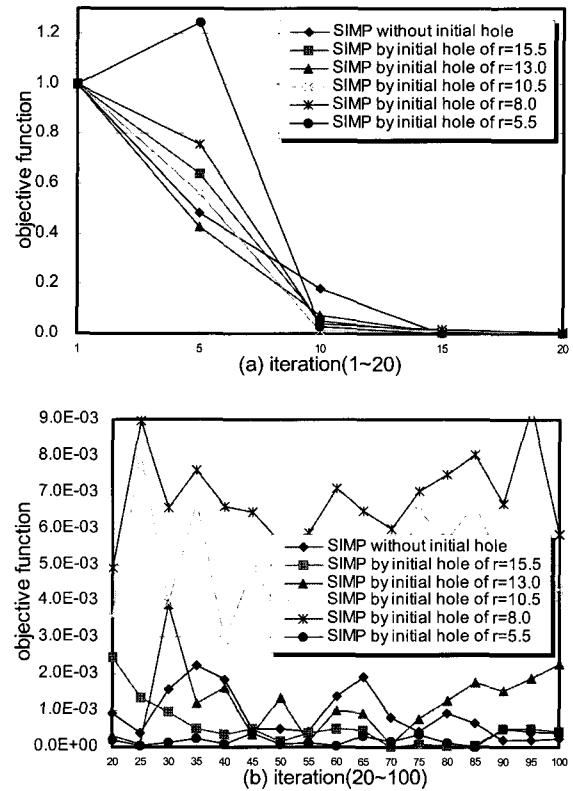


Fig.17 History of changes between old and new objective function values by the design domain of an initial circular hole: volume=40%

경계면 위에서의 민감도 해석에 따른 느린 수렴성 문제를 완화하기 위해 사용된 버블 방법의 개념에 근거하였다. 이것은 위상최적화 분야에서 이전에 시도되지 않았던 것으로, 이들의 위상최적화는 Michell 트러스 구조물의 수치 예제를 이용하여 수행하였다.

본 연구에서는 최적화 수행동안 변화되는 구멍의 적절한 위치를 선택할 때 버블 방법에서 사용한 특성함수를 이용하지 않고 순차적인 최적화 알고리즘을 통해 자동적으로 이동되기 때문에 수치적인 적용이 단순하며 최적화 수행이 편리하다.

본 연구를 통하여 추가적인 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 기존에 사용되던 위상최적화 방법인 설계영역에 구멍을 적용하지 않는 위상 최적 수렴이력과 비교했을 때, 원, 마름모, 정사각형의 구멍에서 공통적으로 치수 5.5를 적용했을 때 더 우수한 수렴성이 산출되었다. 그리고 치수 15.5를 가지는 원의 최적결과는 수치예제에서 적용한 모든 경우에 대해 가장 우수한 수렴성을 나타내었다. 이러한 수렴성은 수렴속도 측면과 수렴하는 최소 변형률 에너지 값 측면에서 판단 할 수 있다.

- (2) 기존에 사용되던 위상 최적화의 위상 결과는 Michell의 해석적인 위상과 전혀 다른 반면, 치수 15.5의 원형 구멍의 초기 설계영역을 적용한 최적 위상은 이상적인 최적 위상을 나타내는 Michell의 해석적인 해와 유사함을 보였다.
- (3) 초기 구멍에 의한 위상을 가지는 초기 설계영역의 정의는, 최적화 수행 시 재료가 있는 곳과 재료가 없는 곳의 경계 영역 근처에서 설계변수의 유한적인 변화를 발생시킨다. 이로부터 광역적인 위상의 변화를 촉진시켜, 결론적으로 최대 강성을 가지는 최적 구조물이 생산될 수 있으며 구멍이 없는 기존의 위상최적화와 비교했을 때 개선된 수렴성이 구현될 수 있다.
- (4) 최적 구조물의 위상과 수렴성의 질은 구멍과 같은 초기 위상의 형상과 치수에 절대적으로 의존한다. 따라서 구멍이 없는 설계영역을 가지는 최적결과와 비교하여, 적절한 형상과 치수의 구멍을 가지는 초기 설계영역을 이용했을 때 수렴성이나 최적구조물의 강성 측면에서 더 우수한 결과가 산출 될 수 있다. 전통적으로 고정 설계영역에 의한 위상최적 설계가 수행된 점을 감안한다면, 이것은 위상최적화에 관한 새로운 구조설계의 한 방법으로 간주될 수 있으며, 최대강성을 가지는 최적구조물의 위상과 형상을 찾는 구조설계의 정보가 될 수 있다.

참 고 문 헌

**임오강, 이진석**(1998) 균질재료와 벌칙인자를 이용한 위상 최적설계, *한국전산구조공학회 가을학술발표대회 논문집*, pp.3~10.

**임오강, 이진석**(1999) 체스판무늬 형성 방지책을 이용한 위상 최적설계, *한국전산구조공학회*, 12(2), pp.141~148.

**Allaire, G., Jouve, F., Toader, A.M.**(2004) Structural Optimization using Sensitivity Analysis and a Level Set Method, *Journal of Computational Physics*, 194(1), pp.363~393.

**Bendsøe, M.P., Kikuchi, N.**(1988) Generating Optimal Topologies in Optimal Design using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, pp.197~224.

**Bendsøe, M.P.**(1989) Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem, *Structural Optimization*, 1, pp.193~202.

**Burger, M., Hackl, B., Ring, W.**(2004) Incorporating Topology Derivative into the Level Set Methods,

*Journal of Computational Physics*, 194, pp.344~362.

**Céa, J.S., Garreu, S., Guillaume, P.**(2000) The Shape and Topological Optimization Connection, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, pp.713~726.

**Eschenauer, H.A., Kobelev, V.V., Schmacher, A.**(1994) Bubble Method for Topology and Shape Optimization of Structures, *Structural Optimization*, 8, pp.42~51.

**Garreu, S., Guillaume, P., Masmoudi, M.**(2001) The Topological Asymptotic for PDE System-The Elasticity Case, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39, pp.1756~1778.

**Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov, V.**(1986) Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, Academic Press, Orlando, New York.

**Hsu, M.H., Hsu, Y.L.**(2005) Interpreting Three-Dimensional Structural Topology Optimization Results, *Computers and Structures*, 83, pp.327~337.

**Kim, N.H., Chang, Y.**(2005) Eulerian Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization with Fixed Grid, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, pp.3291~3314.

**Mlejnek, H.P.**(1992) Some Aspects of the Genesis of Structures, *Structural Optimization*, 5, pp.64~69.

**Novotny, A.A., Feijoo, R.A.**(2003) Topological-Shape Sensitivity Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, pp.803~829.

**Schmit, L.A.**(1960) Structural Design by Systematic Synthesis, Processing of 2nd ASCE. Electronic Computation, ASCE, New York.

**Sigmund, O.**(2001) A 99 line topology optimization code written in Matlab, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21, pp.120~127.

**Sokolowski, J., Zochowski, A.**(1999) On the Topological Derivative in Shape Optimization, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37, pp.1251~1272.

**Yang, R. Chang, C.**(1994) Optimal Topology Design using Linear Programming, *Computers and Structures*, 52, pp.265~275.

**Zienkiewicz, O.C., Campbell, J.S.**(1973) Shape Optimization and Sequential Linear Programming, Optimum Structural Design, edited by Gallagher, R.H. and Zienkiewicz, O.C., Wiley, pp.109~126.