

시간지연을 가지는 변수 불확실성 특이시스템의 비약성 강인 보장비용 제어

論 文

56-8-24

Robust Non-fragile Guaranteed Cost Control for Uncertain Descriptor Systems with State Delay

金 鍾 海[†]
(Jong-Hae Kim)

Abstract - This paper considers robust and non-fragile guaranteed cost controller design method for descriptor systems with parameter uncertainties and time delay, and static state feedback controller with gain variations. The existence condition of controller, the design method of controller, the upper bound to minimize guaranteed cost function, and the measure of non-fragility in controller are proposed using linear matrix inequality (LMI) technique, which can be solved efficiently by convex optimization. Therefore, the presented robust and non-fragile guaranteed cost controller guarantees the asymptotic stability and non-fragility of the closed loop systems in spite of parameter uncertainties, time delay, and controller fragility.

Key Words : Descriptor Systems, Non-Fragile Control, Guaranteed Cost Control, State Delay, LMI

1. 서 론

시간지연을 가지는 동특성 시스템의 안정성 해석과 제어 문제는 시간지연이 물리적 과정이나 제어시스템의 성능과 안정성에 영향을 끼치므로 최근 연구 대상이 되었다. 또한, 모델 불확실성을 다루는 제어 시스템 설계는 최근 많은 연구자들과 공학도들에게 관심사가 되어 왔다. 뿐만 아니라 변수 불확실성(parameter uncertainties)과 시간지연을 가지는 시스템의 강인 안정성(robust stability)을 보장하기 위한 제어기 설계 알고리즘 개발에 많은 노력을 해 온 실정이다[1-4].

Chang과 Peng[5]의 연구 이래로 보장비용 제어에 대한 많은 연구들[6-11]이 시작되었다. Yu와 Chu[10]는 선형 불확실 시스템의 보장비용 제어기 설계방법을 선형행렬부등식 접근방법으로 제시하였다. 또한, 김[11]은 상태와 제어입력에 시간지연을 가지는 일반적인 시변 시간지연 시스템에 대한 보장비용 상태제어 제어기 설계의 문제를 다루었다. 이외에도 보장비용 제어기 설계에 대한 많은 문제들이 연구되었지만, 대부분의 연구가 비특이 시스템(non-singular systems)에 대한 결과이다. 상태공간 모델은 매우 유용하지만, 상태변수가 모든 물리적 의미를 포함하지는 못한다. 따라서, 특이현상은 선형 동적시스템의 자연스러운 형태이고, 상태변수와 물리적 현상 사이의 제약조건 등의 상태공간 모델이 해석하지 못하는 회로 시스템의 임펄스나 히스테리시스 등의 해석을 가능하게 한다[12, 13]. 특이시스템의 특징들로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동 이론(singular perturbation theory), 제약조건이 있는 기계적 시스템 등에 최근 많은 관심을 가져 왔다. 또한, 상태공간 모델을 기초로 하는 제어이론에서 기본적인 개념과 이

론들이 특이시스템을 일반화시켜 왔다. 뿐만 아니라 플랜트 변수에 대하여 강인성(robustness)을 가지도록 설계하거나 성능지수를 최적화하도록 설계한 폐환시스템(feedback systems)은 매우 정확한 제어기의 구현이 요구된다[14]. 일반적인 제어기 설계방법은 제어기가 정확하게 구현된다는 가정하에 이루어진다. 그러나, 제어기의 설계문제는 안전한 제어기 이득 여유도를 가지도록 구현한다는 조건과 더불어 A/D 또는 D/A 컨버터, 마무리 오차(rounding-off error), 제한 워드 길이(finite word length) 등의 문제와 연관이 있다. 따라서, 제작하는 제어기는 제어기의 이득변수에서 발생하는 불확실성에도 잘 견딜 수 있도록 설계하여야 한다. 제어기의 약성(fragility)은 기본적으로 제어기를 구현할 때 시스템의 부정확성으로 인하여 폐환시스템의 성능저하를 유발하므로 최근 중요한 연구문제[14-19]로 고려되었다. 또한, 정확한 제어기 구현이 가능하더라도 제어기의 이득조정(gain tuning)이 필요하므로 제어기의 비약성(non-fragility)에 대한 연구가 필요하다. 따라서, 제어기 설계 목적은 제어기의 이득변동, 시간지연 및 불확실성을 가지는 특이시스템에 대하여 점근적 안정성, 강인성 및 비약성을 보장하는 비약성 강인 보장비용 제어기 설계방법을 제시하는 것이다.

따라서, 본 논문에서는 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 특이시스템 및 승산섭동을 가지는 상태제어제어기에 대하여 비약성 강인 보장비용 제어기 설계방법을 제시한다. 제어기 이득이 변동한다는 조건하에, 강인 안정성과 비약성을 만족하는 제어기의 존재조건 및 제어기 설계방법을 최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 제시한다. 또한, 비약성의 척도(the measurement of non-fragility)와 보장비용 함수를 최소화하는 상한치(upper bound)를 제시함으로써 제어기의 변동에 대한 성능을 예측하게 한다. 제한한 제어기는 변수 불확실성과 시간지연 및 제어기의 약성이 존재하더라도 폐루프 시스템의 점근적 안정성 뿐만 아니라 비약성을 만족한다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. $(\cdot)^T$, $(\cdot)^{-1}$, $\deg(\cdot)$, $\det(\cdot)$, $\text{tr}(\cdot)$ 및 $\text{rank}(\cdot)$ 는 (\cdot) 에

[†] 교신저자, 正 會 員 : 鮮 文 大 學 校 電 子 工 學 部 助 教 授 · 工 博

E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr

接受日字 : 2007年 4月 27日

最終完了 : 2007年 7月 2日

대한 전치(transpose), 역(inverse), 차수(degree), 행렬식(determinant), 대각합(trace) 및 계수(rank)를 나타낸다. $Diag\{ \}$ 는 블록 대각 행렬을 의미한다. 그리고, I , I_d 및 R^r 은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, $r \times r$ 차원을 가지는 단위행렬 및 $r \times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다. *는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이다.

2. 문제설정

시변 변수 불확실성(time-varying parameter uncertainty)을 가지는 특이시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [A_d + \Delta A_d(t)]x(t-d(t)) + [B + \Delta B(t)]u(t) \\ x(t) &= \phi(t), t \in [-\bar{d}, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

을 다룬다. 여기서, $x(t) \in R^n$ 는 상태변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력변수, E 는 $rank(E) = r \leq n$ 을 만족하는 특이행렬, $d(t)$ 는 $0 \leq d(t) < \bar{d}$ 와 $\dot{d}(t) \leq \bar{d} < 1$ 를 만족하는 시변 시간지연, $\phi(t)$ 는 초기 함수(initial function)이고 모든 시스템 행렬은 적절한 차원(dimensions)을 가진다. 변수 불확실성은 노름(norm)의 유계(bound)를 가지며 정합조건(matching condition)을 만족하는

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= D_1 F_1(t) H_1 \\ \Delta B(t) &= D_2 F_2(t) H_2 \\ \Delta A_d(t) &= D_d F_d(t) H_d \end{aligned} \quad (2)$$

의 형태이고, $D_1, D_d, D_2, H_1, H_d, H_2$ 는 알고 있는 상수행렬(known constant matrices)이고, $F_i(t) (i=1,2,d)$ 는

$$F_i(t)^T F_i(t) \leq I \quad (3)$$

을 만족하는 모르는 행렬이다. 비록 설계할 상태제환 제어기의 형태가

$$u(t) = Kx(t) \quad (4)$$

와 같을지라도 구현하는 제어기의 형태를 곱셈형 섭동(multiplicative uncertainty)의 약성을 가지는

$$u(t) = [I + \alpha\Phi(t)]Kx(t) \quad (5)$$

의 형태라고 가정한다. 여기서, K 는 제어기 이득(controller gain), α 는 양의 실수이고, $\alpha\Phi(t)K$ 는 제어기 이득의 변동을 나타낸다. 그리고, $\Phi(t)$ 는 유계를 가지는

$$\Phi(t)^T \Phi(t) \leq I \quad (6)$$

과 같이 정의한다. 또한, α 는 제어기 이득의 변동에 대한 비약성 척도를 나타낸다. 시간지연을 가지는 불확실성 특이시스템 (1)과 제어기 (5)로 구성되는 페루프 시스템은

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= [A + B(I + \alpha\Phi(t))K + \Delta A(t) + \Delta B(t)(I + \alpha\Phi(t))K]x(t) \\ &+ [A_d + \Delta A_d(t)]x(t-d(t)) \end{aligned} \quad (7)$$

과 같이 주어진다. 또한, 보장비용 성능지수는

$$J = \int_0^\infty [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (8)$$

이다. 여기서 Q 와 R 은 양의 정부호(positive-definite) 행렬이다. 따라서, 제어를 설계하는 목적은 특이시스템의 변수불확실성과 시간지연 및 제어기의 이득 변동에도 불구하고 페루프 특이시스템이 보장비용 성능지수를 최소화하고 제어기의 약성에도 점근적 안정성을 만족하는 것이다.

정의 1: 페루프 특이시스템 (7)이 점근적으로 안정하고 보장비용 성능지수 (8)의 $J \leq J^*$ 를 만족하는 상한치가 존재하는 제어 $u^*(t)$ 와 양의 실수 J^* 가 존재하면, J^* 는 보장비용의 상한치이고 $u^*(t)$ 는 시변 시간지연을 가지는 불확실성 특이시스템에 대한 비약성 강인 보장비용 제어이다.

정의 2[20]. 주어진 행렬 $E \in R^{n \times n}$, $A^* \in C^{n \times n}$ 에 대하여, $|\alpha E + A^*| \neq 0$ 또는 다항식 $|sE - A^*| \neq 0$ 를 만족하는 상수 $\alpha \in C$ 가 존재하면 (E, A^*) 는 정규적이다.

보조정리 1[20]. $(E, A + A_d e^{-s\bar{d}})$ 가 정규적일 필요충분조건은

$$\tilde{E} \equiv Q^* E P^* \quad (9)$$

$$\tilde{A} \equiv Q^* A^* P^* = \text{diag}(A_1^*, I_{n_2}) = \text{diag}(I_{n_1}, N) \quad (10)$$

을 만족하는 비특이 행렬 Q^* 와 P^* 가 존재하는 것이다. 여기서, $A^* = A + A_d e^{-j\omega\bar{d}}$, $n_1 + n_2 = n$, $A_1^* \in C^{n_1 \times n_1}$, $N \in R^{n_2 \times n_2}$ 는 거듭제곱이 영(nilpotent)인 행렬이다.

참조 1[20]. 아래의 성질들은 모두 동일하다.

- (i) 특이시스템 (1)이 임펄스프리하다.
- (ii) $rank(E) = \deg |sE - A^*|$
- (iii) 보조정리 1에서 행렬 N 은 영행렬(null matrix)이다.
- (iv) $(sE - A^*)^{-1}$ 이 진유리함수(proper function)이다.

3. 비약성 강인 보장비용 제어기 설계

본 절에서는 선형행렬부등식 접근방법으로 강인 비약성 보장비용 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법에 대한 알고리즘을 제시한다. 시간지연과 변수 불확실성을 가지는 특이시스템과 제어기의 약성을 가지는 페루프 시스템에 대하여 보장비용 성능지수의 최소화를 보장하고 점근적 안정성을 만족하기 위한 강인 비약성 보장비용 제어기 설계방법을 제안한다.

정리 1: 시간지연을 가지는 불확실성 페루프 특이시스템 (7)에 대하여, 행렬부등식

$$E^T P = P^T E \geq 0 \tag{11}$$

$$A^T P + P^T A + Q + Z + K^T R K + K^T B^T P + P^T B K + \alpha \epsilon_1 K^T R R^T K + \alpha \left(\frac{1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1}{\epsilon_2} + \frac{\beta}{\epsilon_5} \right) K^T K + P^T (\alpha \epsilon_2 B B^T + \epsilon_3 D_1 D_1^T + \epsilon_4 D_2 D_2^T + \alpha \epsilon_5 D_2 D_2^T + \epsilon_6 D_d D_d^T) P + \frac{1}{\epsilon_3} H_1 H_1^T + \frac{\beta}{\epsilon_4} I + P^T A_d \left(\bar{Z} - \frac{1}{\epsilon_6} H_d^T H_d \right)^{-1} A_d^T P < 0 \tag{12}$$

를 만족하는 역행렬이 존재하는 P 와 제어기 이득 K 및 양의 정부호 행렬 Z 가 존재하면, 제어기 (4)는 시간지연, 변수 불확실성과 제어기의 이득 변동에도 불구하고 점근적 안정성과 페루프 특이시스템의 보장비용 성능지수를 최소화할 것을 보장한다. 여기서, α 와 $\epsilon_i (i=1,2,3,4,5)$ 는 양의 실수이고 몇 가지 변수들은

$$R < I, \quad \alpha < 1, \quad \beta = \|H_2^T H_2\|, \quad \bar{Z} = (1 - \bar{d})Z = \eta Z, \quad \bar{T} = \bar{Z}^{-1} \tag{13}$$

으로 정의한다. 또한, 보장비용의 상한치는

$$J \leq \phi(0)^T E^T P \phi(0) + \int_{-d(0)}^0 \phi(\tau)^T Z \phi(\tau) d\tau \tag{14}$$

가 된다.

증명: 시간지연을 가지는 불확실성 페루프 특이시스템 (7)의 점근적 안정성을 위하여, (11)을 만족하는 적절한 리아푸노프 (Lyapunov) 함수

$$V(x(t)) = x(t)^T E^T P x(t) + \int_{t-d(t)}^t x(\tau)^T Z x(\tau) d\tau \tag{15}$$

를 잡고, 식 (15)의 시간에 대한 미분을 구하면

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \dot{x}(t)^T E^T P x(t) + x(t)^T P^T E \dot{x}(t) + x(t)^T Z x(t) - (1 - \dot{d}(t)) x(t-d(t))^T Z x(t-d(t)) \tag{16}$$

과 같고, 식 (16)이 음의 정부호(negative-definite)가 되기 위해서는

$$\frac{d}{dt} V_a(x(t)) = \dot{x}(t)^T E^T P x(t) + x(t)^T P^T E \dot{x}(t) + x(t)^T Z x(t) - (1 - \bar{d}) x(t-d(t))^T Z x(t-d(t)) < 0 \tag{17}$$

을 만족하여야 한다. 보장비용 함수 (8)과 리아푸노프 함수 (16)과 (17)로부터 행렬부등식 (12)는

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq \frac{d}{dt} V_a(x(t)) < x(t)^T [Q + K^T (I + \alpha \Phi(t))^T R (I + \alpha \Phi(t)) K] x(t) \tag{18}$$

을 의미한다. 따라서, 보조정리

$$2\alpha x(t)^T K^T R \Phi(t) K x(t) \leq \alpha \epsilon_1 x(t)^T K^T R R^T K x(t) + \frac{\alpha}{\epsilon_1} x(t)^T K^T K x(t)$$

$$\alpha^2 x(t)^T K^T \Phi(t)^T R \Phi(t) K x(t) \leq \alpha x(t)^T K^T K x(t)$$

$$2\alpha x(t)^T P^T B \Phi(t) K x(t) \leq \alpha \epsilon_2 x(t)^T P^T B B^T P x(t) + \frac{\alpha}{\epsilon_2} x(t)^T K^T K x(t)$$

$$2x(t)^T P^T D_1 F_1(t) H_1 x(t) \leq \epsilon_3 x(t)^T P^T D_1 D_1^T P x(t) + \frac{1}{\epsilon_3} x(t)^T H_1^T H_1 x(t)$$

$$2x(t)^T P^T D_2 F_2(t) H_2 x(t) \leq \epsilon_4 x(t)^T P^T D_2 D_2^T P x(t) + \frac{1}{\epsilon_4} x(t)^T H_2^T H_2 x(t) \leq \epsilon_4 x(t)^T P^T D_2 D_2^T P x(t) + \frac{\beta}{\epsilon_4} x(t)^T x(t)$$

$$2\alpha x(t)^T P^T D_2 F_2(t) H_2 \Phi(t) K x(t)$$

$$\leq \alpha \epsilon_5 x(t)^T P^T D_2 D_2^T P x(t) + \frac{\alpha}{\epsilon_5} x(t)^T K^T \Phi(t)^T H_2^T H_2 \Phi(t) K x(t)$$

$$\leq \alpha \epsilon_5 x(t)^T P^T D_2 D_2^T P x(t) + \frac{\alpha \beta}{\epsilon_5} x(t)^T K^T K x(t)$$

$$2x(t)^T P^T D_d F_d(t) H_d x(t-d(t)) \leq \epsilon_6 x(t)^T P^T D_d D_d^T P x(t) + \frac{1}{\epsilon_6} x(t-d(t))^T H_d^T H_d x(t-d(t))$$

와 식 (13)을 이용하면 부등식 (18)로부터

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi & P^T A_d \\ * & -(1-\bar{d})Z + \frac{1}{\epsilon_6} H_d^T H_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

를 얻을 수 있고, 식 (19)에서 충분조건으로 식 (12)를 얻을 수 있다. 또한, 보장비용 성능지수의 계산을 위하여 식 (1)의 초기조건과 시간 0에서 T_f 까지 식 (18)을 적분하면

$$-\int_0^{T_f} [x(t)^T Q x(t) + x(t)^T K^T (I + \alpha \Phi(t))^T R (I + \alpha \Phi(t)) K x(t)] dt > x(T_f)^T E^T P x(T_f) - x(0)^T E^T P x(0) + \int_{T_f-d(T_f)}^{T_f} x(\tau)^T Z x(\tau) d\tau - \int_{-d(0)}^0 x(\tau)^T Z x(\tau) d\tau \tag{20}$$

이 된다. 페루프 시스템 (7)이 점근적으로 안정하면 T_f 가 무한대의 시간으로 감에 따라

$$x(T_f)^T P x(T_f) \rightarrow 0, \quad \int_{T_f-d(T_f)}^{T_f} x(\tau)^T Z x(\tau) d\tau \rightarrow 0 \tag{21}$$

의 항이 0으로 수렴하므로 식 (20)에서부터 보장비용 함수 (14)의 상한치를 얻을 수 있다. ■

정리 1의 식 (12)는 구하고자 하는 변수의 견지에서 비선형성을 포함하는 요소가 존재하므로 구하고자 하는 변수의 측면에서 볼록최적화(convex optimization)가 불가능하고 식 (11)에서는 등호를 포함하고 있어서 해를 구하기가 쉽지 않다. 또한, 보장비용 함수의 최소화를 위하여 구하고자 하는 모든 변수의 측면에서 선형행렬부등식으로 변형하여야 한다. 따라서, 등호조건을 없애고 구하고자 하는 변수의 견지에서 최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 변형하기 위하여 적절한 분해와 전개를 통하여 비약성 강인 보장비용 제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 아래 정리 2에서 제시한다.

정리 2: 시간지연을 가지는 시변 불확실성 특이시스템 (1)에 대하여, 다음의 선형행렬부등식

minimize $(\rho + tr(G))$

$$i) \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & X_1 & X_3^T & X_1 & X_3^T & Y_1^T & \Gamma_4 & \Gamma_5 & \Gamma_8 \\ * & \Gamma_3 & 0 & X_4 & 0 & X_4 & Y_2^T & \Gamma_6 & \Gamma_7 & \Gamma_9 \\ * & * & -S_1 & -S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -S_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -T_1 & -T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -T_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -R^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\gamma\Gamma_{10} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\Gamma_{11} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\Gamma_{12} \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

$$ii) \begin{bmatrix} -\rho I & \phi_{01}^T \\ * & -X_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$iii) \begin{bmatrix} -G & N_1^T & N_2^T \\ * & -T_1 & -T_2 \\ * & * & -T_4 \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

$$iv) \gamma > 1 \quad (25)$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 X_1, T_1, T_4, G , 역행렬이 존재하는 대칭행렬 X_4 , 적절한 차원을 가지는 행렬 X_3, T_2, Y_1, Y_2 및 양의 상수 γ, ρ 가 존재하면, 행렬

$$K = [Y_1 P_1 + Y_2 P_3 \quad Y_2 P_4] \quad (26)$$

으로 표현되는 이득은 제어기 이득의 변화와 시간지연 및 변수 불확실성의 존재에도 불구하고 점근적 안정성, 정규성 (regular), 임펄스프리와 보장비용 함수의 최소화를 보장하는 비약성 강인 보장비용 제어법칙이다. 여기서, 변수들은

$$\Gamma_1 = A_1 X_1 + X_1 A_1^T + Y_1^T B_1^T + B_1 Y_1 + \epsilon_3 D_{11} D_{11}^T + \epsilon_4 D_{21} D_{21}^T + \epsilon_6 D_{a1} D_{a1}^T + \eta^{-1} (A_{d1} T_1 A_{d1}^T + A_{d2} T_2^T A_{d1}^T + A_{d1} T_2 A_{d2}^T + A_{d2} T_4 A_{d2}^T)$$

$$\Gamma_2 = X_3^T A_4^T + Y_1^T B_2^T + B_2 Y_2 + \epsilon_3 D_{11} D_{12}^T + \epsilon_4 D_{21} D_{22}^T + \epsilon_6 D_{a1} D_{a2}^T + \eta^{-1} (A_{d1} T_1 A_{d3}^T + A_{d2} T_2^T A_{d3}^T + A_{d1} T_2 A_{d4}^T + A_{d2} T_4 A_{d4}^T)$$

$$\Gamma_3 = A_4 X_4 + X_4 A_4^T + Y_2^T B_2^T + B_2 Y_2 + \epsilon_3 D_{12} D_{12}^T + \epsilon_4 D_{22} D_{22}^T + \epsilon_6 D_{a2} D_{a2}^T + \eta^{-1} (A_{d3} T_1 A_{d3}^T + A_{d4} T_2^T A_{d3}^T + A_{d3} T_2 A_{d4}^T + A_{d4} T_4 A_{d4}^T)$$

$$\Gamma_4 = [R Y_1^T \quad Y_1^T \quad Y_1^T \quad Y_1^T \quad Y_1^T \quad Y_1^T \quad B_1 \quad D_{21}]$$

$$\Gamma_5 = [X_1^T H_{11}^T + X_3^T H_{12}^T \quad \sqrt{\beta} X_1 \quad \sqrt{\beta} X_3^T]$$

$$\Gamma_6 = [R Y_2^T \quad Y_2^T \quad Y_2^T \quad Y_2^T \quad Y_2^T \quad B_2 \quad D_{22}]$$

$$\Gamma_7 = [X_4^T H_{12}^T \quad 0 \quad \sqrt{\beta} X_4]$$

$$\Gamma_8 = \eta^{-1} (A_{d1} T_1 H_{d1}^T + A_{d2} T_2^T H_{d1}^T + A_{d1} T_2 H_{d2}^T + A_{d2} T_4 H_{d2}^T)$$

$$\Gamma_9 = \eta^{-1} (A_{d3} T_1 H_{d1}^T + A_{d4} T_2^T H_{d1}^T + A_{d3} T_2 H_{d2}^T + A_{d4} T_4 H_{d2}^T)$$

$$\Gamma_{10} = \text{Diag} \left\{ \epsilon_1 I, \frac{1}{\epsilon_1} I, I, \frac{1}{\epsilon_2} I, \frac{\beta}{\epsilon_5} I, \frac{1}{\epsilon_2} I, \frac{1}{\epsilon_5} I \right\}$$

$$\Gamma_{11} = \text{Diag} \{ \epsilon_3 I, \epsilon_4 I, \epsilon_4 I \}$$

$$\Gamma_{12} = \epsilon_6 I - \eta^{-1} (H_{d1} T_1 H_{d1}^T + H_{d2} T_2^T H_{d1}^T + H_{d1} T_2 H_{d2}^T + H_{d2} T_4 H_{d2}^T)$$

$$P_1 = X_1^{-1}, P_4 = X_4^{-1}, P_3 = -P_4 X_3 P_1, \gamma = \frac{1}{\alpha}$$

$$Q^{-1} = S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ * & S_4 \end{bmatrix}, Z^{-1} = T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ * & T_4 \end{bmatrix}$$

으로 정의한다.

증명: 식 (12)의 행렬부등식은 슈어 여수정리[21]와 참고문헌 [4]의 전개방법과 $X = P^{-1}, Y = KP^{-1} = KX$ 을 이용하면

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & X^T & X^T & Y^T & \Pi_2 & \Pi_3 \\ * & -S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma \Pi_4 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\Pi_5 \end{bmatrix} < 0 \quad (27)$$

로 변형할 수 있다. 여기서, 변수는

$$\Pi_1 = AX + X^T A^T + Y^T B^T + BY + \epsilon_3 D_1 D_1^T + \epsilon_4 D_2 D_2^T + \epsilon_6 D_d D_d^T + A_d \tilde{T} A_d^T$$

$$\Pi_2 = [Y^T R \quad Y^T \quad Y^T \quad Y^T \quad Y^T \quad B \quad D_2]$$

$$\Pi_3 = [X^T H_1^T \quad \sqrt{\beta} X^T \quad A_d \tilde{T} H_d^T]$$

$$\Pi_4 = \text{Diag} \left\{ \epsilon_1 I, \frac{1}{\epsilon_1} I, I, \frac{1}{\epsilon_2} I, \frac{\beta}{\epsilon_5} I, \frac{1}{\epsilon_2} I, \frac{1}{\epsilon_5} I \right\}$$

$$\Pi_5 = \text{Diag} \{ \epsilon_3 I, \epsilon_4 I, \epsilon_6 I - H_d \tilde{T} H_d^T \}$$

와 같다. 식 (11)에서 등호를 없애고 구하려는 모든 해의 측면에서 최적화가 가능한 선형행렬부등식을 만들기 위하여 일반성을 상실함 없이 (without loss of generality) 되기 위해서는

$$E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ A_{d3} & A_{d4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

$$\phi(0) = \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A(t) = D_1 F_1(t) H_1 = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} F_1(t) [H_{11} \quad H_{12}]$$

$$\Delta A_d(t) = D_d F_d(t) H_d = \begin{bmatrix} D_{d1} \\ D_{d2} \end{bmatrix} F_d(t) [H_{d1} \quad H_{d2}] \quad (28)$$

$$\Delta B(t) = D_2 F_2(t) H_2 = \begin{bmatrix} D_{21} \\ D_{22} \end{bmatrix} F_2(t) H_2$$

과 같은 특이치분해(singular value decomposition)[12, 21]를 사용한다. 또한, 식 (11)의 조건을 만족하기 위하여

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

로 두고, 구하려는 해를

$$Y = [Y_1 \quad Y_2] \quad (30)$$

과 같이 정의한다. 식 (28)과 (29) 및 (30)을 식 (27)에 대입하면 모든 해의 견지에서 최적화가 가능한 선형행렬부등식 (22)를 얻을 수 있다. 식 (14)의 오른쪽의 첫 번째 항은

$$\phi(0)^T E^T P \phi(0) < \rho \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\rho I & \phi_{01}^T \\ * & -X_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

과 같이 식 (23)을 얻을 수 있다. 식 (14)의 오른쪽의 두 번째 항은

$$\int_{-d(0)}^0 \phi(\tau)^T T^{-1} \phi(\tau) d\tau = \text{tr}(NN^T T^{-1}) = \text{tr}(N^T T^{-1} N) < \text{tr}(G) \quad (32)$$

의 관계를 가진다. 따라서, $-G + N^T T^{-1} N < 0$ 은 식 (24)가 된다. 여기서, $\int_{-d(0)}^0 \phi(\tau)^T \phi(\tau) d\tau = NN^T$. 식 (25)는 식 (13)과 $\gamma = 1/\alpha$ 로부터 유도된다. ■

참조 2: $E=I$ 인 경우, 비특이시스템에 대한 비약성 강인 보장비용 제어기 설계 문제가 식 (27)의 선형행렬부등식으로 부터 얻을 수 있다. 따라서, 제안한 비약성 강인 보장비용 제어기 설계 알고리즘은 특이시스템에 대한 문제 뿐만 아니라 상태공간 문제를 다루는 비특이시스템의 강인 비약성문제까지도 해결하는 일반적인 알고리즘이다.

참조 3: 식 (22)~(25)는 구하고자 하는 해 $X_1, T_1, T_4, G, X_4, X_3, T_2, Y_1, Y_2, \gamma, \rho$ 의 측면에서 최적화가 가능한 선형행렬부등식의 형태이다. 따라서, 비약성 강인 보장비용 제어기는 LMI 도구상자(Toolbox)[22]로부터 직접 계산할 수 있다. 또한, 제어기에서의 비약성 척도 α 는 $\alpha = 1/\gamma$ 로부터 얻을 수 있고, 보장비용 함수를 최소화하는 상한치는 $\rho + \text{tr}(G)$ 로부터 직접 계산 가능하다.

참조 4: 제안하는 정리 2의 알고리즘은 보장비용 성능지수인 식 (8)에서 Q 와 R 과 $\epsilon_i, (i=1 \sim 6)$ 과 같은 조절 인자(tuning factor)를 가진다. 조절인자의 적절한 선택은 실제 적용에 있어서 최적화 및 비약성 등에 상당히 효율적으로 적용할 수 있도록 한다. 또한, 최적화를 위해서는 ϵ_i 의 변수까지도 최적화를 하여야 하지만 BMI(bilinear matrix inequality) 문제가 되어 현재까지 연구로는 수식적으로 해석적(analytic)인 해를 구하기 힘들다고 알려져 있고 프로그램적인 해결방법으로 최적화를 하고 있다. 이러한 문제는 향후 연구 분야로 계속 진행되어야 한다.

예제: 제안한 알고리즘의 간단한 수치예제를 통하여 비약성 강인 보장비용 제어기 설계방법에 대하여 설명한다. 시간지연과 변수불확실성을 가지는 특이시스템

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 000 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \left\{ \begin{bmatrix} -210 \\ 1 & 10 \\ 0 & 01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} F_1(t) [0.1 \ 0.1 \ 0.1] \right\} x(t) + \left\{ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} F_2(t) [0.1 \ 0.1 \ 0.1] \right\} x(t-d(t)) + \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} F_2(t) 0.1 \right\} u(t) \quad (33)$$

을 다룬다. 초기상태 $\phi_{01}(t) = [t+0.2 \ 0.1]$, $R=0.1$, $Q=I_3$ 과

$\epsilon_i = 0.1 (i=1 \sim 6)$ 로 잡으면, 정리 2의 최적화 문제가 구하려는 모든 해의 견지에서 선형행렬부등식의 형태이므로 모든 해는 LMI 도구상자로부터

$$X = \begin{bmatrix} 0.5040 & -0.0917 & 0 \\ * & 0.0574 & -0.0000 \\ * & * & -0.2175 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0.7010 & 0.6627 & 0.6241 \\ * & 20.9130 & 0.5920 \\ * & * & 3.1999 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$Y = [-1.3417 \ -0.3618 \ -0.5651]$$

$$\rho = 0.5410, G = 5.1568, \gamma = 7.0997$$

와 같이 얻는다. 따라서, 비약성 척도와 보장비용 함수의 상한치는

$$\alpha = 1/\gamma = 0.1409, J^* = 5.6977 \quad (35)$$

이다. 여기서, α 는 제어기 이득이 14.09%이내에 변화함에도 불구하고 구한 비약성 강인 보장비용 제어기가 시간지연을 가지는 불확실성 특이시스템의 점근적 안정성과 비약성을 만족한다는 것을 의미한다. 따라서, 식 (26)으로부터

$$u^*(t) = [-3.8743 \ -16.7556 \ 2.5984]x(t) \quad (36)$$

과 같다. 컴퓨터 모의실험을 위하여

$$F_i(t) = \text{sint} \ (i=1,2,d), \Phi(t) = \text{cost}, d(t) = 3 + 0.2\text{sint} \quad (37)$$

과 같이 잡고 MATLAB 도구상자인 SIMULINK를 이용하면, 그림 1~3에서처럼 시간이 흘러감에 따라 상태가 영으로 수렴하기 때문에 구한 비약성 강인 보장비용 제어기는 시간지연과 변수 불확실성 및 제어기의 곱셈형 섭동에도 불구하고 점근적 안정성과 비약성을 보장함을 알 수 있다. 또한, 제어 입력의 궤적은 그림 4에 나타난다. 또한, 그림 1~4로부터 컴퓨터 모의실험한 보장비용 성능지수를 계산하여 보면 구한 최적의 상한치보다 작음($J^* > 1.3123$)으로 상한치를 만족함을 알 수 있다. 따라서, 제안한 비약성 강인 보장비용 제어기는 시간지연과 변수 불확실성 및 제어기의 약성에도 불구하고 점근적 안정성을 보장하고 보장비용 함수의 상한치를 최소화하고 제어기의 비약성을 구한 α 의 범위내에서 만족한다.

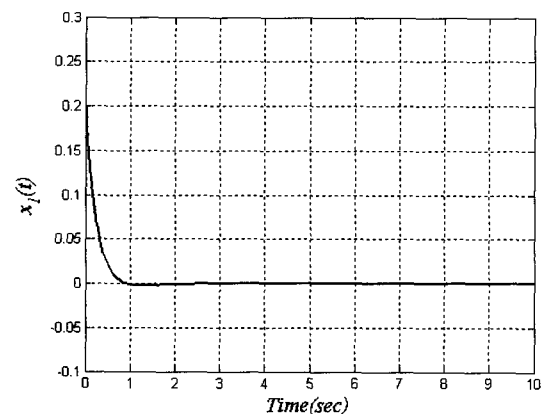


그림 1 $x_1(t)$ 의 궤적

Fig. 1 The trajectory of $x_1(t)$

4. 결 론

본 논문에서는 정합조건을 가지는 변수 불확실성과 시변 시간지연 및 제어기의 이득 변동을 가지는 특이시스템에 대한 비약성 강인 보장비용 제어기 설계알고리즘을 제시한다. 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법을 선형행렬부등식 접근방법으로 표현한다. 제안한 제어기가 존재할 조건은 구하려는 변수의 측면에서 볼록최적화의 형태이므로 한번에 모든 해를 구할 수 있다. 제안한 비약성 강인 보장비용 제어기는 변수불확실성, 시간지연, 제어기 이득의 불확실성 변동에도 불구하고 점근적 안정성과 보장비용 성능지수의 최소화를 보장한다. 또한, 구한 해로부터 비약성 척도의 계수와 보장비용 함수의 상한치를 직접 계산할 수 있다.

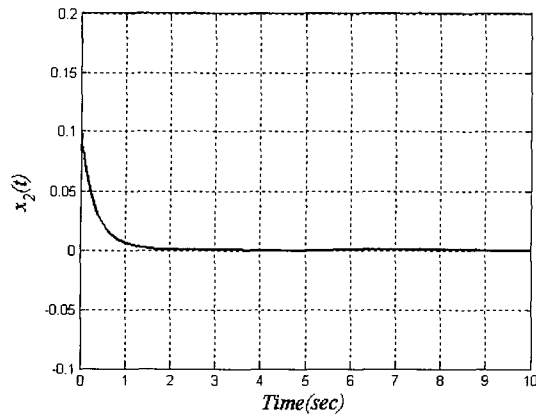


그림 2 $x_2(t)$ 의 궤적

Fig. 2 The trajectory of $x_2(t)$

참 고 문 헌

- [1] M. S. Mahmoud and N. F. Al-Muthairi, "Quadratic stabilization of continuous time systems with state delay and norm-bounded time-varying uncertainties," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, no. 10, pp. 2135-2139, 1994.
- [2] H. H. Choi and M. J. Chung, "Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control," *Automatica*, vol. 31, pp. 917-919, 1995.
- [3] J. H. Lee, S. W. Kim, and W. H. Kwon, "Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, pp. 159-162, 1994.
- [4] J. H. Kim, E. T. Jeung and H. B. Park, "Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input," *Automatica*, vol. 32, pp. 1337-1339, 1996.
- [5] S. S. L. Chang and T. K. C. Peng, "Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 17, pp. 474-483, 1972.
- [6] I. R. Petersen and D. C. McFarlane, "Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, pp. 1971-1977, 1994.
- [7] I. R. Petersen, "Guaranteed cost LQG control of uncertain linear systems," *IEE Proc.-D*, vol. 142, pp.95-102, 1995.
- [8] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza, " H_∞ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems," *Systems and Control Letters*, vol. 20, pp.413-418, 1993.
- [9] Y. S. Lee, O. K. Kwon, and W. H. Kwon, "Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain state delayed systems," *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 3, pp. 524-532, 2005.

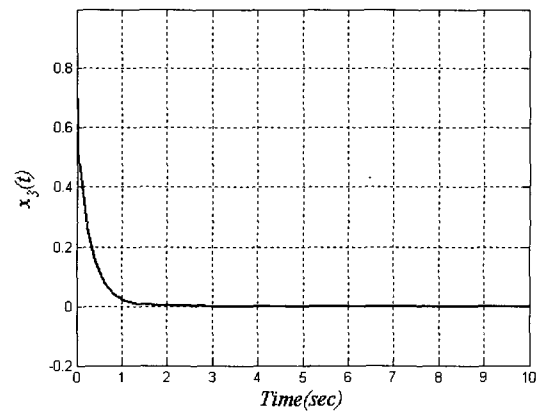


그림 3 $x_3(t)$ 의 궤적

Fig. 3 The trajectory of $x_3(t)$

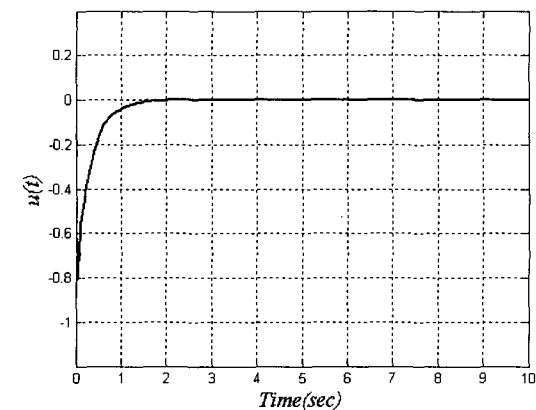


그림 4 $u(t)$ 의 궤적

Fig. 4 The trajectory of $u(t)$

- [10] L. Yu and J. Chu, "An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time delay system," *Automatica*, vol. 35, pp. 1155-1159, 1999.
- [11] J. H. Kim, "Guaranteed cost control of parameter uncertain systems with time delay," *Transaction on Control, Automation, and Systems Engineering*, vol. 2, pp. 19-23, 2000.
- [12] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, " H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.
- [13] K. Takaba, N. Morihara, T. Katayama, "A general Lyapunov theorem for descriptor system," *System and Control Lett.*, vol. 24, pp. 49-51, 1995.
- [14] P. Dorato, C. T. Abdallah, and D. Famularo, "On the design of non-fragile compensators via symbolic quantifier elimination," *World Automation Congress*, pp. 1098-1105, 1997.
- [15] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Robust, fragile, or optimal," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 42, pp. 1098-1105, 1997.
- [16] W. M. Haddad and J. R. Corrado, "Non-fragile controller design via quadratic Lyapunov bounds," *Proc. IEEE Control Decision on Conference*, pp. 2678-2683, 1997.
- [17] D. Famularo, C. T. Abdallah, A. Jadbabaie, P. Dorato, and W. M. Haddad, "Robust non-fragile LQ controllers: The static state feedback case," *Proc. American Control Conference*, pp. 1109-1113, 1998.
- [18] P. Dorato, "Non-fragile controller design: An overview," *Proc. American Control Conference*, pp. 2829-2831, 1998.
- [19] A. Jadbabie, C. T. Abdallah, D. Famularo, and P. Dorato, "Robust non-fragile and optimal controller design via linear matrix inequalities," *Proc. American Control Conference*, pp. 2842-2846, 1998.
- [20] S. S. Hung and T. T. Lee, "Memoryless H_∞ controller for singular systems with delayed state and control," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 336, pp. 911-923, 1999.
- [21] J. H. Kim, "New design method on memoryless H_∞ control for singular systems with delayed state and control using LMI," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 342, pp. 321-327, 2005.
- [22] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Mathworks Inc., 1995.

저 자 소 개



김 종 해 (金 鍾 海)

1993년 경북대학교 전자공학과 졸업.
 1998년 동 대학원 전자공학과 졸업(공학박사). 1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년~2001년 일본 오사카대학 객원연구원. 2002년~현재 선문대학교 전자공학부 조교수.
 Tel : 041-530-2352
 E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr