財務管理硏究 第二十四券 第三號(2007. 9), 29~62

MBS의 위험과 가치평가

유 진*

〈요 약〉

본 연구에서는 개별 모기지들의 파산 위험과 그 상관관계가 외생적으로 주어졌을 때 MBS 차원에서 이를 효율적으로 관리하여 투자자 효용을 높이고 MBS 가치를 제고시키는 방안, 그리고 다양한 모수들이 이 방안의 효율성에 미치는 영향을 고찰하였다. 시장에 위험회피 투자자가 참여하면 그의 효용함수의 구체적 형태와 관계없이 파산의 상관관계가 작은 모기지들로 MBS를 구성할 때 MBS 전체의 가치는 증대된다. 또 모기지풀 구성이 외생적으로 결정된 이후에도 MBS의 가치를 제고할 수 있는데, 투자자 욕구가 다양할 때에는 모기지풀 현금 흐름을 각 지분(tranche)에 동일하게 분배하는 평이한 발행구조의 MBS(pass-through)보다 현금 흐름의 불확실성의 위험을 제거하고(선순위채) 집중시킨(후순위채) MBS(CMO)를 발행할 때 MBS의 효용과 가격이 상승한다. 반면 투자자 욕구가 동질적일 때에는 위험을 동일하게 분배하는 pass-through의 효용이 차등적으로 분배하는 CMO의 효용보다 언제나 더 높다. 한편 트랜치의 위험을 차별화하여 MBS 전체의 효용을 제고시키는 방안은 개별 모기지들의 파산 확률이 높을수록, 개별 모기지론 가치의 상관관계가 밀접할수록 또 파산시의 모기지론 가치 하락이 클수록 그 효율성이 높아진다. 본 연구의 결과는 투자자들의 위험회피 욕구를 보다 효율적으로 충족시키는 모기지풀을 구성하기 위해서는 인구통계학적으로 분산된 특히 지역적으로 분산된 개별 모기지들로 이루어진 모기지풀을 구성하는 방법이 바람직함을 시사한다.

주제어 : 주택저당증권, 모기지론, 파산, 자동이체증권, CMO, 발행구조

논문접수일 : 2007년 02월 03일　　논문게재확정일 : 2007년 06월 09일

* 충남대학교 경상대학 경영학부 교수

** 유익한 심사를 해주신 두 분의 익명 심사자께 감사드립니다. 이 논문은 2005년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었습니다(KRF-2005-041-B00263).

Ⅰ. 서 론

모기지 혹은 모기지론(mortgage, mortgage loan)은 은행 등의 금융기관이 차입자에게 제공한 장기 부동산담보대출을 의미한다. 모기지론은 차입자 입장에서는 주택 구입에 막대한 현금을 보유해야 할 필요가 없고 장기간 상대적으로 낮은 금리로 자금을 조달할 수 있게 해주며, 연・기금, 생명보험회사와 같이 부채의 듀레이션(duration)이 큰 기관에게는 훌륭한 장기 투자 대상이 된다.

그런데 개별 모기지의 표준화되지 않은 발행조건, 조기상환 혹은 중도상환(prepayment) 위험, 파산 혹은 채무불이행(default) 위험 등으로 인해 투자자들이 모기지 매입에 소극적인 경우가 많아 모기지는 유통시장의 유동성에 있어서 큰 제약을 받게 된다.[1] 모기지의 유통이 제약을 받게 되면 발행시장에서의 대출기관의 모기지 대출 또한 위축되므로 전체 모기지 시장을 발전시키기 위해서는 유통시장의 육성이 필수적이며 이 과정에서 가장 중요한 것은 개별 모기지 위험을 적절히 관리하는 것이다. 이와 관련하여 일반적인 해결책은 다양한 모기지론을 모아 모기지풀(pool)을 구성한 후 이를 기초자산으로 하여 투자자 욕구를 적절히 충족시키는 새로운 증권을 발행하여 시장에 공급하는 방안이다. 이렇게 변형된 2차적 증권이 MBS(Mortgage-Backed Securities)로, 가장 대표적인 두 가지는 모기지풀에서 발생하는 현금 흐름과 위험을 균등하게 배분하는 자동이체증권(mortgage pass-through security, pass-through)과 보다 복잡한 구조의 CMO(collateralized mortgage obligations)를 들 수 있다.[2] 전자는 단순히 모기지풀에서 발생하는 현금 흐름을 동일하게 (1/n)씩 분배하는 증권인 반면 CMO에는 tranche(트랜치)라고 불리는 여러 계층의 증권에 현금 흐름의 불확실성이 차별적으로 분산되어 있다.[3] CMO의 종류는 다양한데 본연구에서는 조기상환 위험을 차등하게 분산시킨 Senior-Subordinate(선순위 - 후순위) 트랜치 구조를 다루기로 한다.[4]

모기지 혹은 MBS와 관련된 국외의 학술 연구는 경제학, 부동산학, 재무론 영역에 걸쳐 매우 방대하지만 국내에서는 최근에야 제도가 도입된 관계로 특히 재무론 분야를

1) "default"는 "채무불이행"으로도 번역되지만 모기지와 관련해서는 "파산"으로 번역하더라도 무리가 없다. 본 연구에서는 "파산"이 "모기지 차입자의 default"를 의미하는 것으로 사용하기로 한다.

2) 본 고에서는 자동이체증권 혹은 pass-through으로 불리는 이 증권을("CMO"와 대조하여) "pass-through"의 표현으로 통일하기로 한다.

3) pass-through는 CMO에 "nested"된 증권 즉 전자가 후자의 특별한 경우(후순위율이 0인 경우)라고 파악하기도 한다.

4) 혹은 PAC-Support 구조라고도 한다. 좁은 의미로는 PAC-Support는 가장 자유롭게 설계된 선순위-후순위 증권구조를 뜻한다.

살펴보면 매우 빈약한 편이다. 그런데 MBS의 가치평가와 관련하여 기존 국외 연구를 살펴보면, i) MBS 위험 중 주로 조기상환 위험을 중점적으로 다루어 왔고, ii) MBS 가치평가에 주로 옵션평가모형만을 사용하는 등 비계량적(non-financial) 요인이 MBS 가치에 미치는 영향을 간과하였고, iii) MBS의 차별적 유형에 따른 가치 변동에 대한 연구가 빈약하다는 사실을 알 수 있다. 즉 미국의 경우 FNMA와 FHLMC 등 정부지원기업(GSE)이 직접 MBS를 발행하거나 혹은 민간 기관이 발행한 MBS를 GNMA와 같은 정부기관이 보증하여 MBS의 파산 위험을 심각하게 인식하지 않았고[5] 차입자의 인구통계학적, 지리적 변수가 모기지의 조기상환 혹은 파산에 미치는 영향을 적절히 감안하지 못했으며, 동일한 모기지풀을 대상으로 발행된 MBS라 하더라도 MBS 각 지분의 위험을 어떻게 할당하는가에 따라 전체 MBS 가치가 달라질 수 있음을 명확히 인식하지 못하였다. 본 연구에서는 지금까지 상대적으로 소홀하게 연구된 온 모기지의 파산 위험을 효율적으로 통제함으로써 MBS의 가치를 제고시키는 방안과 여러 모수들이 이 방안들의 효율성에 미치는 영향 및 그 현실적 함의를 고찰한다.

모기지 차입자의 파산 위험이 존재하는 한 어떤 기관의 보증(보험)이 있더라도 이로 인한 비용(disutility)은 궁극적으로 발생하며, 투자자 혹은 모기지 금융기관 등 누군가는 이 비용을 부담하게 된다. 이를 부담하는 주체는 개별 모기지의 파산 위험 자체는 제거할 수 없지만, 파산 위험이 주어졌을 때 자신의 효용을 최대화하는 모기지풀 구성 및 MBS 발행구조를 선택함으로써 파산 위험을 효율적으로 관리할 수 있다. 구체적으로는, 모기지풀을 구성하는 단계에서 전체 풀의 파산 위험을 감소시킬 수 있으며 또 모기지풀 구성 이후에도 MBS의 발행구조에 의해 파산 위험의 집중 및 제거가 가능하며 이를 통해 투자자 효용이 증대되고 MBS의 가치(가격)가 제고될 수 있다. 본 연구에서는 이를 이론적으로 증명하고 그 결과를 가능한 직관적으로 해석하며 MBS 시장에 대한 그 현실적 함의를 제시한다.

본 연구는 타 연구와 대비하여 다음과 같은 특징을 가진다. 먼저 개별 모기지의 위험이나 개별 모기지 위험의 상관관계를 확률과정(stochastic process)으로 접근하여 MBS 가치평가를 시도하는 부류의 연구가 있을 수 있다. 그런데 본 연구에서는 개별 모기지의 위험, 개별 모기지 위험들간의 상관관계, 시장 참여자의 효용함수, MBS의 최적 발

5) MBS를 발행하는 주요 기관은 the Federal Home Loan Mortgage Corporation 및 the Federal National Mortgage Association이고, 민간금융기관이 발행한 MBS를 보증하는 기관은 the Government National Mortgage Association인데, 이들을 줄여서 각각 FHLMC(Freddie Mac), FNMA(Fannie Mae), 그리고 GNMA(Ginnie Mae)라 부른다. 우리나라의 경우 2004년 3월 1일 출범한 한국주택금융공사가 MBS의 주요발행기관이다.

행 구조 등의 주제를 동시에 다루는 이론 연구이다. 그러므로 현실적으로 일정한 변수들을 외생화하고(exogenize) 나머지를 내생 변수로 취하여 모형을 전개할 수 밖에 없는데, 구체적으로는 개별 모기지의 위험이 주어지고(동시에) 모기지 위험의 상관계수가 $-1 < \rho < 1$의 범위를 가질 때, 그리고 투자자 효용 함수로 세 가지 형태가 존재할 때 MBS 가치를 최대화하는 MBS 발행 구조를 논의한다. 두 번째로 모기지의 채무불이행-담보자산 처분 - 대출금의 회수 등의 일련의 과정은 제도적으로 다양하고 현실적으로는 복잡한 과정이 될 수 있는데, 본 연구에서는 이 모든 과정의 최종적인 결과가 산출되었다고 설정함으로써 논의를 되도록 재무론 영역으로 국한시켰다. 즉 파산으로 인하여 회수되는 모기지의 최종 가치(cash flow)만을 직접 다루고 그 이전의 과정은 편의상 생략한다. 또 CMO는 조기상환 위험의 헤지라는 관점에서 연구되는 경우가 많았지만, 본 연구에서는 파산 위험의 효율적 헤지를 위한 MBS 최적 발행 구조의 관점에서 논의된다.

한편 MBS와 관련하여 지금까지 발표된 논문들 중 모기지 파산 위험과 MBS 가치평가를 관련시켜 진행된 연구는 미약하다. 본 장에서는 다만 모기지 혹은 MBS에 대한 기존 연구와 최근 연구 동향 중 일부를 소개함으로써 기존 연구의 일반적인 흐름을 소개하고자 한다. 모기지 혹은 MBS의 조기상환 및 가치평가에 관한 연구는 현재 방대한 문헌을 이루고 있는데, 예로서 Stanton(1995)은 모기지 차입자에 따라 조기상환 비용이 상이하다는 사실과 조기상환은 연속적이 아니라 단속적으로 발생한다는 사실을 반영한 모형을 제시하고 실증분석해 본 결과, 조기상환의 계절적 패턴, 예상과 다른 조기상환 행태 및 소진현상(burnout)에 따른 조기상환이 합리적으로 설명된다고 주장하였다. 조기상환을 예측하고 설명하기 위한 이자율 모형에 대한 연구도 활발히 이루어졌는데, Chen and Yang(1995)은 4개의 이자율 확률 과정(stochastic process) 가설이 이자율 기간구조와 GNMA MBS 가격을 얼마나 잘 설명하는지 비교분석 하였다. 실증 분석 결과 Ho-Lee 모형이 이자율 기간구조를 가장 잘 설명하였고 단순한 수의상환채권(callable bonds) 모형으로는 GNMA 가격에 가까운 값을 산출할 수 없음을 발견하였다. 이들은 조기상환의 비금융적 특성을 적절히 반영하지 않는 한 현실적인 MBS 가치평가 모형이 정립되기 어렵다고 결론지었다.

한편 MBS의 조기상환에 영향을 주는 인구통계학적 변수 중 대표적인 것으로 차입자의 이동성(mobility)에 관한 연구도 이루어졌다. Chari and Jagannathan(1989)은 이동성이 높은 차입자는 낮은 모기지 이자율과 높은 모기지 포인트(Point)를 선호한다고 주장하였다. “Point”란 차입자가 모기지를 대출 받을 때 대출 기관에 지불하는 1회성

수수료를 말하는데, 차입자는 자신의 미래 소득의 불확실성에 대한 일종의 보험으로 {높은 포인트 + 낮은 이자율}을 선호한다는 것이다. 이들은 차입자가 직장을 이동할 경우 대부분 현재보다 높은 소득을 제공하는 직장으로 이동한다고 가정하였는데, 직장 이동시 기존 모기지를 청산하면서 차입자가 상실하게 되는(이미 지불된) 높은 포인트 비용은 새로운 고소득을 감안할 때 효용의 감소가 작다고 주장하였다. 그러나 Brueckner (1994)는 이동성이 높은 차입자는 여러 번 이동해야 하므로, 즉 여러 번 포인트 수수료를 지불해야 하므로 {낮은 포인트+높은 이자율}을 선호한다고 주장하였다. Stanton and Wallace(1998)는 이동성이 상이한 차입자들은 상이한 {포인트+이자율} 조합을 선호하는데 이 관계가 항상 안정적이지는 않음을 발견하였는데 그 원인 규명을 위해서는 Point 이외에 차입자가 지불하는, 그러나 대출기관의 수입으로 실현되지는 않는, 순수한 "거래 비용" 즉 차입자 신용 정보비용, 보험・보증 비용, 주택 감정평가 비용 등을 함께 고려하여야 한다고 주장하였다. 또 조기 상환 위험에 관한 연구 중에는 Koutmos and Pericli(2000), Koutmos and Pericli(1999) 혹은 Anderson et al.(1993) 등 이 위험의 헤지에 관한 연구도 많이 이루어졌다. 또 일반적인 증권의 발행 구조와 가치평가에 대한 연구로 Boot and Thakor(1993), Riddiough(1997) 등을 들 수 있는데, 넓게 보면 MBS의 발행 구조에 따라 그 가치(가격)가 달라질 수 있다는 본 연구의 일부 내용과 맥락이 통한다고 할 수 있다.

한편 MBS에 대한 국내 연구로는 유진(2005, 2006)을 들 수 있는데, 이들은 본 연구의 주제인 모기지 "파산 위험"과는 달리 "조기상환 위험"에 대한 연구로 두 연구의 주요 변수는 "이자율"이다. 유진(2005)의 경우 특히 이자율 변동에 따른 모기지조기상환 중 소위 "소진현상(burnout effect)"과 "재금융(refinancing)"으로 인한 3기간 동안의 MBS 현금 흐름의 변화를 파악하고 MBS 효용을 최대화하는 발행 구조를 고찰하였다. 유진(2005)은 소진현상과 재금융으로 인한 조기상환을 보다 명확히 반영하기 위하여 이자율의 추세적 하락을 가정하였다. 한편 유진(2006)은 모기지의 조기상환 위험이 존재할 때, TAC(targeted amortization class)과 같은 중순위채 (mezzanine tranche)를 포함하는 4가지 유형의 다양한 CMO 구조 중에서 투자자의 효용을 증대시키는 구조에 대해 분석하였다. 그 결과 극단적인 선순위－후순위채보다는 절충적인 선순위-중순위-후순위채 구조가 보다 선호된다고 주장하였다. 특히 유진(2005)이 이자율의 추세적 하락을 가정함으로써 "과다"한 조기상환만을 다룬 반면 유진(2006)은 특별한 추세를 가정하지 않음으로써 과다한 조기상환 및 과소한 조기상환 위험을 모두 분석하여 조기상환 위험의 정의에 충실하게 논의를 전개하였다. 한편 본 연구는 유진(2005, 2006)과는

근본적으로 다른 “파산 위험”에 대한 연구이다. 조기상환 연구인 유진(2005, 2006)의 경우 중요한 변수는 이자율이었으나 본 연구의 주요 변수는 두 모기지의 파산 확률 g_1, g_2 및 이들의 상관계수의 세 변수로서 각 모기지의 현금 흐름이 유진(2005, 2006)보다 복잡하다. 모형이 복잡해질수록 분석적 해를 산출하기는 어려워지는데 본 연구의 경우 일부는 분석적 해를 도출하였으나 나머지 일부는 수치적 해를 이용하여 논의 및 결론을 유도하였다. 마지막으로 본 연구와 유진(2005, 2006)의 유사점으로는 이항 모형을 사용하여 현금 흐름의 변동성을 반영한 점을 들 수 있다.

본 연구는 다음과 같이 구성되어 있다. 제 Ⅱ장에서는 가장 단순한 MBS인 모기지풀 혹은 pass-through의 효용과 개별 모기지들의 파산 위험과의 관계를 고찰한다. 제 Ⅲ장에서는 투자자의 효용과 욕구가 다양할 때 이들에게 보다 선호되고 더 높은 가격으로 거래될 MBS의 발행 구조를 파악한다. 제 Ⅳ장에서는 투자자 효용이 동질적일 때 보다 선호되는 MBS 발행구조를 찾아본다. 제 Ⅴ장에서는 개별 모기지론의 파산 확률, 파산시 가격 하락율, 그리고 모기지간의 상관 관계가 MBS 발행구조의 효율성에 미치는 영향을 분석하며, 제 Ⅵ장에서는 본 연구를 요약하며 마친다.

Ⅱ. 모기지 상관계수와 MBS 가치 평가

차입자에 의한 개별 모기지의 파산이란 차입자가 정해진 모기지론의 할부금을 납부하지 않는 것을 의미한다. 예로서 실업 혹은 경제 침체 등의 이유로 차입자가 모기지론의 할부금을 더 이상 납부하지 못할 때 일차적으로 차입자의 파산이 발생한다. 그런데 이러한 외부적인 원인 외에도 차입자의 내부적인 동기로 파산이 발생할 수 있다. 모기지론 담보물인 아파트 등의 부동산 가격이 하락하여 특정 시점에서 모기지론의 잔여 할부금들의 현재가치보다도 작아진다면 차입자는 더 이상 모기지론 할부금을 납부하지 않고 부동산을 포기할 수 있다. 그 부동산을 획득하기 위하여 지불해야 할 금액이 그 자산의 현재 가격보다 높다면, 자신의 이익을 극대화하는 경제인에게는 그 자산을 포기하는(파산을 선택하는) 것이 합리적인 선택이 될 수 있기 때문이다.[6] 후자의 파산은 사실 전자의 파산까지도 내포한다. 왜냐하면 차입자의 경제 사정으로 모기지론 할부금을 지불하기가 어려운 경우에도 자산(부동산) 가격이 부채(잔여 할부금 합계)의 현재가치보다 크면 새로운 차입을 통해서라도 부채를 갚고 그 자산을 취득하려 할 것이므로,

6) 본 연구에서는 파산으로 인해 개인에게 돌아오는 도덕적, 사회적 부담은 논외로 한다.

차입자가 파산을 선택했다면 이는 곧 부동산 가격이 모기지론 잔여원금보다 작았음을 의미하기 때문이다. 그러므로 본 연구에서는 일반적으로 모기지론 담보물의 시장 가격이 모기지론의 잔여 할부금의 현재가치보다 작을 때 파산이 발생한다고 간주한다.

이 파산 위험을 개별 모기지 차원에서 원천적으로 제거하는 것은 불가능하다. 하지만 모기지풀 차원에서는 어느 정도 제거할 수 있는데, 그 이유는 모기지의 개별적 파산 위험 모두가 “체계적 위험(systematic risk)”은 아니기 때문이다. 즉 모기지풀을 구성할 때 파산 위험의 상관성이 적은 개별 모기지들을 더 많이 포함시킨다면 풀 전체로서의 파산 위험은 감소할 수 있다. 그런데 서론에서 언급한 pass-through는 모기지풀을 (1/n)로 축약한 지분으로 이루어진 MBS이므로 모기지풀 자체도 일종의 MBS라 할 수 있으며 이 때 모기지풀은 가장 단순한 형태의 MBS가 된다(흔히 CMO를 “MBS를 기초자산으로 하여 발행된 또 다른 MBS”라고 하는데 이 때 전자의 MBS란 곧 모기지풀 혹은 pass-through를 의미한다). 본 장에서는 가장 단순한 형태의 MBS인 pass-through (혹은 모기지풀)의 가치와 개별 모기지론의 파산의 관계에 대해 분석한다. 한편 모기지풀의 구성이 완료된 이후에도, 시장에 참여하는 다양한 투자자들의 욕구와 효용을 보다 효율적으로 충족시키는 구조(security design)로 MBS를 발행하면 투자자가 평가하는 가치(가격)가 상승할 수 있다. 제 Ⅲ장에서는 투자자 욕구가 다양할 때 이들의 효용을 극대화하는 MBS 발행 구조를, 제 Ⅳ장에서는 투자자 욕구가 동질적일 때 이들의 효용을 효율적으로 충족시키는 MBS 발행구조를 고찰한다.

1. 가정과 용어

본 연구를 위해 다음과 같이 가정과 용어를 설정한다. 명료한 이론 전개를 위해 현실을 단순화하였다.

가정 :

(ⅰ) 모기지 차입자는 자신이 지불해야 할 모기지론의 잔여 할부금들의 현재 가치가 모기지 담보물의 시장 가격보다 클 때 파산(default)를 선택한다.

(ⅱ) 따라서 파산時 모기지론의 가치는 모기지 담보물의 시장 가격과 같아진다.

(ⅲ) 모기지 파산 위험을 이항 모형으로 접근하며, 개별 모기지론의 파산 확률 g_1, g_2가 50%로 동일한 경우, 일반적으로 $g_1 = g_2$인 경우, 나아가 $g_1 \neq g_2$인 경우를 모두 분석한다.

(ⅳ) MBS는 2개의 모기지론을 기초자산으로 하여 구성된다.
(ⅴ) 이 2개의 모기지론들은 개별 파산의 관련성을 제외하고는 파산 확률, 모기지론의 잔여원금, 모기지 담보물의 시장 가격 등이 모두 동일한(identical) 자산이다. (추후 파산확률 g_1, g_2의 대한 제약이 제거되면서 이 가정은 완화된다).
(ⅵ) 파산과 관련하여 2개 모기지론의 가치의 상관계수는 ρ이다($-1 \leq \rho \leq 1$).
(ⅶ) 시장에는 위험회피 투자자 및 위험중립 투자자 등 두 명의 대표적인(representative) 투자자가 존재한다. 또 논의를 확대하기 위해 두 명의 투자자가 모두 위험회피적인 경우도 분석한다.
(ⅷ) 위험회피 투자자의 효용함수로는 DARA(decreasing absolute risk aversion) CARA(constant ARA) 그리고 IARA(increasing ARA)의 세 경우를 모두 가정한다. 구체적으로는 U(W) = ln(W), $-e^{-\gamma W}$, 그리고 $-(a-W)^2$을 가정한다.
(ⅸ) MBS는 2개의 지분(트랜치, tranche)으로 발행된다.
(ⅹ) 무위험이자율은 0으로 가정한다.

먼저 가정 (iii)의 이항 모형을 살펴보자. 모기지론의 잔여 할부금의 현재가치가 모기지 담보물의 시장 가격보다 클 때에 파산이 발생하며 파산시 대출기관 입장에서 모기지론의 가치는 담보물의 시장 가격이 된다. 그러므로 파산 발생시의 모기지론의 가치 $P_{default}$는 파산이 발생하지 않은 경우의 가치 $P_{no\ default}$ 보다 작다. 본 연구에서는 분석의 편의상 이 두 변수를 다음의 다른 두 변수로 표시하고자 한다. 즉 $P_{no\ default} = P(1+\sigma)$, $P_{default} = P(1-\sigma)$이다 ($0<\sigma<1$). 먼저 대수적으로 $P_{no\ default}$, $P_{default}$의 두 값이 주어지면, 이 두 값은 언제나 P, σ의 두 값으로 다시 표시된다. 왜냐하면 이 경우 두 개의 방정식에 두 개의 변수가 있는 단순한 연립방정식이기 되기 때문이다. 예로서 $P_{no\ default} = 200$, $P_{default} = 150$이면 $200 = P(1+\sigma)$, $150 = P(1-\sigma)$의 방정식을 풀어 $P = 175$, $\sigma = 1/7 = 0.143$이 됨을 알 수 있다. 한편 $P = \frac{1}{2}\{P(1+\sigma) + P(1-\sigma)\}$이므로, 모수 P는 위험중립 투자자에 있어서는 모기지론의 가치(효용)를 의미하고 σ는 파산으로 인한 모기지론 가치의 변동성을 의미한다.

(a) $P(1-\sigma)$, $P(1+\sigma)$: 모기지 "파산" 및 "非파산"時의 가치 ($0<\sigma<1$)

가정 (iii)의 의미는 다음과 같다. 금융적인 내용이나 파산 확률 등이 동일한 내용의 모기지론인 경우에도, 차입자 거주지의 지역 경제 혹은 그의 직장 등에 따라 차입자의

실제 파산 시기(event)는 항상 동일하지는 않다. 예로서 서울의 부도율과 지방의 부도율의 크기가 사전적으로 비슷하다 하더라도 각 지역 경제의 싸이클 등에 따라 서로 다른 시기에 부도가 발생할 수 있다. 그러므로 두 차입자의 모기지론의 파산과 관련하여서는 네 가지 경우가 존재하는데, 두 모기지론 M1, M2가 {no default-no default, no default-default, default-no default, default-default}가 되는 경우들이다. 이제 이를 간단히 {uu, ud, du, dd}로 표시하고 이 각각은 문맥에 따라 해당 사건(event)뿐 아니라 그 확률(probability)도 의미하는 것으로 약속하자.

(b) {uu, ud, du, dd} :

두 모기지론의 {非파산 – 非파산, 非파산 – 파산, 파산 – 非파산, 파산 – 파산} 사건 및 그 확률

예로서 M1의 가치와 M2의 가치의 상관계수 $\rho = 1$이라면 이 네 경우의 확률은 {0.5, 0, 0, 0.5}이 되고 $\rho = -1$이라면 {0, 0.5, 0.5, 0}이 될 것이다. 그러나 $-1 < \rho < 1$이라면 네 경우의 확률이 모두 0보다 큰 값을 가지게 된다. 만일 M1, M2의 “파산” 확률 $g_1 = g_2 = 0.5$이면 다음이 성립한다.

(c) {uu, ud, du, dd}의 관계식 :

$uu + ud + du + dd = 1$: 전체 확률공간

$uu + ud - (du + dd) = 0$: $\because (1-g_1) - g_1 = 0.5 - 0.5 = 0$

$uu + du - (ud + dd) = 0$: $\because (1-g_2) - g_2 = 0.5 - 0.5 = 0$

이 때 상관계수 ρ와 각 확률 uu, ud, du, dd 사이에는 정리 1과 같은 관계가 존재한다. 이에 대한 증명은 부록에 있다.

정리 1 : ρ와 uu, ud, du, dd의 관계식($-1 \leq \rho < 1$)

(i) $\rho = uu - ud - du + dd$

(ii) $uu = dd = \frac{1+\rho}{4}$, $ud = du = \frac{1-\rho}{4}$

정리 1을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

[그림 1] 모기지 파산과 가치

		M1가치		M2 가치		모기지 풀	확률
				P(1+σ)		2・P(1+σ)	uu = (1 + ρ)/4
		P(1+σ)					
			파산	P(1−σ)		2・P	ud = (1 − ρ)/4
	파산			P(1+σ)		2・P	du = (1 = ρ)/4
		P(1−σ)					
			파산	P(1−σ)		2・P(1−σ)	dd = (1 + ρ)/4

한편 가정 (vii)는 다양한 MBS가 등장한 중요한 이유가 투자자의 다양한 욕구와 효용을 만족시키기 위한 것임을 반영한 것이다. 다양한 MBS는 곧 다양한 발행구조 즉 다양한 현금 흐름과 위험을 가지는 트랜치를 발행함을 의미한다. 이 경우 새로운 MBS는 전체적인 파산 위험의 크기는 감소시키지는 못하지만 각 트랜치별 파산 위험은 적절히 관리할 수 있는데, 투자자의 위험에 대한 태도가 100% 동질적이 아니면 새로운 발행 구조의 MBS는 새로운 효용과 가치를 창출할 개연성이 있다. 현실적으로도 모든 투자자들의 위험 회피 성향이 동일하지는 않으므로, 본 연구에서는 MBS 발행구조에 따른 가치창출 효과를 고찰하기 위해서 위험에 대한 차별적인 태도를 가진 두 투자자 즉 위험회피 투자자와 위험중립 투자자를 가정한다. 또한 두 명의 투자자 모두가 위험회피적인 경우도 추가적으로 분석하는데, 이 경우 투자자들의 위험에 대한 태도는 100% 동질적인 경우가 된다. 전자는 본 연구의 취지에 적합한 내용이며, 후자는 본 연구의 논의를 확장하여 새로운 현실적 함의를 찾기 위함이다. 가정 (viii)은 통상적으로 자주 사용되는 효용함수 형태를 본 연구에서 사용하겠다는 뜻이다.[7] 물론 이외에도 $U(W) = \frac{1-\gamma}{1} W^{1-\gamma}$ 과 같은 CRRA(constant relative risk aversion) 효용함수등이 존재하지만 분석 결과는 매우 유사하다. 또한 모든 CRRA 함수는 동시에 DARA 함수이므로 두 함수를 별도로 분석하지 않고 여기서는 DARA 함수를 대표적으로 분석한다.

7) 재무론에서 자주 사용되는 효용함수는 “linear risk tolerance”를 보이는 효용함수 혹은 HARA (hyperbolic absolute risk aversion) 효용함수이다. 즉 “absolute risk aversion”의 역수가 aW+b로 표시되는 효용함수들인데, 여기서 b = 0이면 CARA, b = 1이면 log utility (DARA), 그리고 b = −1이면 quadratic utility (IARA), a = 0이면 CRRA 효용함수가 된다.

2. DARA 효용함수

모기지풀의 기대값(기대가치)은 M1, M2의 상관관계에 영향받지 않으므로 위험중립 투자자의 경우 모기지풀의 효용은 언제나 같다. 하지만 위험회피 투자자의 효용은 모기지풀의 구성에 따라 달라질 수 있으므로 여기서는 위험회피 투자자의 효용의 변화만을 살펴보기로 한다. 그의 효용함수가 U(W) = ln(W)인 경우 M1, M2를 기초자산으로 하는 모기지풀로부터의 투자자의 기대 효용은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
EU(MBS) &= \mathrm{uu}\times \ln[2P(1+\sigma)] + \mathrm{ud}\times \ln[2P] + \mathrm{du}\times \ln[2P] + \mathrm{dd}\times \ln[2P(1-\sigma)] \\
&= \frac{1+\rho}{4}\times \ln[2P(1+\sigma)] + \frac{1-\rho}{4}\times \ln[2P] + \frac{1-\rho}{4}\ln[2P] + \frac{1+\rho}{4}\times \ln[2P(1-\sigma)] \\
&= \frac{1+\rho}{4}\times \{2\times \ln[2P] + \ln[1+\sigma] + \ln[1-\sigma]\} + \frac{1-\rho}{2}\times \ln[2P] \\
&= \ln[2P] + \frac{1+\rho}{4}\times \ln[1-\sigma^2]
\end{aligned}
$$

(식 1) DARA 투자자의 MBS 기대 효용

$$EU_{DARA} = \ln[2P] + \frac{1+\rho}{4}\times \ln[1-\sigma^2]$$

식 (1)은 두 M1, M2 가치의 상관계수 ρ의 함수이므로 어떤 값의 모기지들을 기초자산으로 편입하는가에 따라 이 MBS의 효용은 달라진다. 이를 고찰하기 위해 식 (1)의 기대 효용을 ρ로 편미분 해보자.

$$\frac{\partial EU_{DARA}}{\partial \rho} = \frac{1}{4}\ln\ [1-\sigma^2] < 0,\ \ where\ \ \ln\ [1-\sigma^2] < 0,\ 0 < \sigma < 1$$

이므로 ρ가 작을수록 DARA 투자자의 기대효용은 증대된다.

정리 2 : DARA 투자자의 MBS 기대 효용과

두 모기지 M1, M2의 가치의 상관계수 ρ가 작을수록 DARA 투자자의 기대효용은 증대한다.

3. CARA 효용함수

투자자의 효용함수가 U(W) = $-e^{-\gamma W}$인 경우 MBS로부터 얻는 기대 효용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} EU(MBS) &= \mathrm{uu}\times[-e]^{-\gamma\cdot 2P(1+\sigma)}+(\mathrm{ud}+\mathrm{du})\times[-e]^{-\gamma\cdot 2P}+\mathrm{dd}\times[-e]^{-\gamma\cdot 2P(1-\sigma)} \\ &= \frac{1+\rho}{4}\times[-e]^{-\gamma\cdot 2P(1+\sigma)}+\frac{1-\rho}{2}\times[-e]^{-\gamma\cdot 2P}+\frac{1+\rho}{4}\times[-e]^{-\gamma\cdot 2P(1-\sigma)} \\ &= [-e]^{-2\gamma P}\left[\frac{1+\rho}{4}\times[e]^{-2\gamma P\sigma}+\frac{1-\rho}{2}+\frac{1+\rho}{4}\times[e]^{2\gamma P\sigma}\right] \end{aligned}$$

(식 2) CARA 투자자의 MBS 기대 효용

$$EU_{CARA}=[-e]^{-2\gamma P}\left[\frac{1+\rho}{4}\times\left([e]^{-2\gamma P\sigma}+[e]^{2\gamma P\sigma}\right)+\frac{1-\rho}{2}\right]$$

ρ가 이에 미치는 영향을 분석하기 위해 식 (2)를 ρ로 편미분 해보자.

$$\begin{aligned} \frac{\partial EU_{CARA}}{\partial\rho} &= [-e]^{-2\gamma P}\left[\frac{1}{4}\left([e]^{-2\gamma p\sigma}+[e]^{2\gamma P\sigma}\right)-\frac{1}{2}\right] \\ &= [-e]^{-2\gamma P}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}g(X)\right],\ where\ g(X)=X^2+X^{-2},\ X=e^{\gamma P\sigma}>1 \end{aligned}$$

여기서 $\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}g(X)\right]$의 부호는 g(X) 값이 2보다 큰가에 의해 결정되는데, g(1) = 2이고 $\frac{\partial g(X)}{\partial X}=2X-2X^{-3}=2X^{-3}(X^4-1)>0\,(X>1)$ 이므로 g(X) 값은 항상 2보다 크다. $g(X)>2$이면 $\frac{\partial EU_{CARA}}{\partial\rho}=[-e]^{-2\gamma P}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}g(X)\right]<0$이고, 이는 곧 ρ가 작을수록 CARA 투자자의 기대효용이 증대함을 의미한다.

정리 3 : CARA 투자자의 MBS 기대 효용과

두 모기지 M1, M2의 가치의 상관계수 ρ가 작을수록 CARA 투자자의 기대효용은 증대한다.

4. IARA 효용함수

투자자의 효용함수가 U(W) = $-(a-W)^2$인 경우 MBS로부터 얻는 기대 효용은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} EU(MBS) &= \mathrm{uu}(-[a-2P(1+\sigma)]^2) + (\mathrm{ud}+\mathrm{du})(-[a-2P]^2) + \mathrm{dd}(-[a-2P(1-\sigma)]^2) \\ &= \mathrm{uu}(-a^2-4P^2(1+\sigma)^2+4aP(1+\sigma)) + (\mathrm{ud}+\mathrm{du})(-a^2-4P^2+4aP) \\ &\quad + \mathrm{dd}(-a^2-4P^2(1-\sigma)^2+4aP(1-\sigma)) \\ &= \frac{1+\rho}{4}(-2a^2-8P^2(1+\sigma^2)+8aP) + \left(\frac{1-\rho}{2}\right)(-a^2-4P^2+4aP) \\ &= \frac{1+\rho}{2}(-a^2-4P^2(1+\sigma^2)+4aP) + \left(\frac{1-\rho}{2}\right)(-a^2-4P^2+4aP) \\ &= \frac{1}{2}(-2a^2-8P^2-4P^2\sigma^2+8aP) + \left(\frac{\rho}{2}\right)(-4P^2\sigma^2) \end{aligned}$$

(식 3) IARA 투자자의 MBS 기대 효용

$$EU_{IARA} = \frac{1}{2}(-2a^2-8P^2-4P^2\sigma^2+8aP) - 2\rho P^2\sigma^2$$

ρ가 이 기대효용에 미치는 영향을 분석하기 위해 식 (3)을 ρ로 편미분하면 $-2P^2\sigma^2$이므로 다음이 성립한다.

정리 4 : IARA 투자자의 MBS 기대 효용과 ρ

두 모기지 M1, M2의 가치의 상관계수 ρ가 작을수록 IARA 투자자의 기대효용은 증대한다.

정리 2~정리 4에 의하여 시장에 위험회피 투자자가 참여하면 그의 효용함수의 형태와 관계없이 ρ값이 작은 모기지들로 MBS를 구성할 때 이 MBS의 전체 효용 혹은 가치는 증대됨을 알 수 있으며, 이 경우 MBS는 시장에서 보다 높은 가격으로 발행 및 유통될 수 있다.[8] 한편 평균적인 ρ값이 작은 모기지풀을 구성하기 위한 현실적 방안

8) 위험중립 투자자인 경우에는 효용의 변화가 없으나 위험회피 투자자의 효용(가치) 증대로 MBS의 시장균형 가격(equilibrium market price)은 상승한다.

의 하나는 지역적으로 분산된 모기지들로 모기지풀을 구성하는 것을 생각할 수 있다. 또 보다 미시적으로는 직업, 소득, 성별, 연령별로 차별적인 개별 모기지들을 전체 풀에 많이 포함시킬 때 풀 전체의 평균 ρ가 감소될 수 있다.

Ⅲ. MBS 발행구조와 가치평가 : 이질적 투자자 경우

Pass-through의 형태로 MBS가 발행되면 현금흐름에 대한 50%의 권리를 갖는 2개의 트랜치가 발행된다. 한편 Senior-Subordinate 구조의 MBS 혹은 CMO는, 파산과 관계없이 현금 흐름이 매우 안정적인 선순위채(senior)와 이 선순위채를 위해 현금 흐름의 안정성을 희생하는 후순위채(subordinate)로 이루어진 MBS를 말한다. 이처럼 각 트랜치별로 파산 위험을 집중 혹은 제거하여 투자자에게 제시할 때 다른 투자자들의 효용을 감소시키지 않으면서 적어도 한 부류의 투자자들의 효용을 추가적으로 증대할 수 있으며 이 때 CMO의 시장 가격은 제고될 수 있다. 보다 구체적으로, 본 장에서는 Senior-Subordinate 구조의 CMO의 경우 <표 1>과 같이 모기지풀의 현금 흐름을 재분배한다고 가정한다. 또 CMO의 서로 다른 tranche를 매입할 수 있는 위험중립 혹은 위험회피 투자자가 존재한다고 가정한다.

<표 1> MBS 발행구조와 현금 흐름($0 \leq \alpha \leq 1,\ (1+\alpha)\sigma \leq 1$)

확률	Mortgage Pool	Pass-through Tranche 1	Pass-through Tranche 2	CMO Senior	CMO Subordinate
uu = $(1+\rho)/4$	$2 \cdot P[1+\sigma]$	$P(1+\sigma)$	$P(1+\sigma)$	$P[1+(1-\alpha)\sigma]$	$P[1+(1+\alpha)\sigma]$
ud = $(1-\rho)/4$	$2 \cdot P$	P	P	P	P
du = $(1-\rho)/4$	$2 \cdot P$	P	P	P	P
dd = $(1+\rho)/4$	$2 \cdot P[1-\sigma]$	$P(1-\sigma)$	$P(1-\sigma)$	$P[1-(1-\alpha)\sigma]$	$P[1-(1+\alpha)\sigma]$
평균 현금 흐름	$2 \cdot P$	P	P	P	P

즉 사건 uu(dd)가 발생하여 모기지풀의 트랜치당 현금 흐름이 σP만큼 커질(작아질) 때에는 senior tranche에 $\alpha\sigma$P만큼의 현금 흐름을 더 적게(많게) 배정하여 평균 현금 흐름(P)과의 격차를 줄여 현금 흐름의 불확실성을 감소시키는 대신 subordinate tranche에 나머지 현금 흐름을 모두 배정하여 불확실성을 흡수시킨다. 이제 Senior-Subordinate CMO의 형태로 MBS가 발행되고 각 투자자의 위험회피 성향에 "적합하게", 즉 위험중립자에게는 Subordinate Tranche를 그리고 위험회피자에게는 Senior Tranchee를 제시

(판매)할 때 이들의 기대 효용에 어떤 변화가 있을 것인가를 파악해 보자. 먼저 위험중립 투자자의 경우 현금 흐름의 불확실성과 관계 없이 현금 흐름의 기대값에만 관심이 있으므로, 동일한 기대값 P를 제공하는 subordinate tranche의 효용은 pass-through의 트랜치 효용과 같다. 즉 위험중립자들은 subordinate tranche와 pass-through 트랜치에 동일한 가치(가격)를 부여한다. 한편 위험회피 투자자의 경우 현금 흐름의 불확실성이 작아진 CMO senior-tranche의 효용이 pass-through 트랜치의 효용보다 더 높아질 수 있다. 명확한 이해를 위해 구체적 예를 든다면 α = 1인 경우를 생각할 수 있다. α = 1이면 Senior tranche는 항상 “P”의 현금 흐름을 갖는 “무위험 자산”이 된다. 그러므로 pass-through tranche의 위험을 완전히 제거하게 되어 위험회피 투자자의 효용을 현격히 증대시키므로, 그는 pass-through tranche보다 senior tranche에 보다 높은 가치(가격)를 부여한다. 즉 α = 1인 새로운 Senior-Subordinate MBS를 발행하면 위험중립 투자자의 효용은 변하지 않지만 위험회피 투자자의 효용은 증대되어 이 MBS에 대한 수요와 그 가치(가격)는 제고된다. 이처럼 경제 내에 위험회피 정도가 이질적인 투자자 집단들이 존재할 때 각 투자자 집단의 효용에 적합한 tranche들을 발행하여 판매한다면 결과적으로 투자자 효용 및 MBS 가치의 증대를 가져올 수 있다.

이제 위험중립 투자자는 어떤 α에 대해서도 동일한 효용 수준을 유지함이 파악되었으므로 이들의 효용에 대한 고찰은 생략하기로 하며, 본 장에서는 위험회피 투자자에게 있어서 senior-tranche와 pass-through 트랜치의 효용의 크기를 비교하여 두 MBS의 전체 효용의 크기를 비교하기로 한다. 즉 $\alpha = 0$이면 senior tranche = subordinate tranche = pass-through tranche이므로 두 MBS는 동일한 MBS가 되고 $\alpha > 0$이면 상이한 MBS가 되므로, $\alpha > 0$일 때 (위험회피 투자자의) senior-tranche의 효용의 변화를 살펴봄으로써 두 MBS의 상대적 가치를 파악하기로 한다.

1. DARA 효용함수

senior tranche의 기대 효용을 구하면

$$EU(Senior) = \frac{1+\rho}{4}\ln\ [P(1+(1-\alpha)\sigma)] + 2\times\frac{1-\rho}{4}\ln\ [P] + \frac{1+\rho}{4}\ln\ [P(1-(1-\alpha)\sigma)]$$

$$\frac{1+\rho}{4}[\ln P + \ln(1+(1-\alpha)\sigma] + \frac{1-\rho}{2}\ln[P] + \frac{1+\rho}{4}[\ln P + \ln(1-(1-\alpha)\sigma)]$$

이를 α로 편미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial EU(Senior)}{\partial\alpha}=\frac{1+\rho}{4}\left[\frac{-\sigma}{1+(1-\alpha)\sigma}+\frac{\sigma}{1-(1-\alpha)\sigma}\right]$$
$$=\frac{(1+\rho)\cdot\sigma}{4}\cdot\left[\frac{2(1-\alpha)\cdot\sigma}{[1-(1-\alpha)\sigma]\cdot[1+(1-\alpha)\sigma]}\right]>0$$

그러므로 CMO senior tranche의 효용은 pass-through의 개별 tranche의 그것보다 크고 따라서 CMO 전체의 효용은 pass-through의 효용보다 크다.

2. CARA 효용함수

$$EU(Senior)=\frac{1+\rho}{4}\left[-e^{-\gamma[P(1+(1-\alpha)\sigma)]}\right]+2\times\frac{1-\rho}{4}\left[-e^{-\gamma P}\right]+\frac{1+\rho}{4}\left[-e^{-\gamma[P(1-(1-\alpha)\sigma)]}\right]$$
$$=\frac{1+\rho}{4}\left[-e^{-\gamma P-\gamma P(1-\alpha)\sigma}\right]+\frac{1-\rho}{2}\left[-e^{-\gamma P}\right]+\frac{1+\rho}{4}\left[-e^{-\gamma P+\gamma P(1-\alpha)\sigma}\right]$$
$$=e^{-\gamma P}\left[\frac{1+\rho}{4}\left[-e^{-\gamma P(1-\alpha)\sigma}\right]-\frac{1-\rho}{2}+\frac{1+\rho}{4}\left[-e^{-\gamma P(1-\alpha)\sigma}\right]\right]$$

이를 α로 편미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial EU(Senior)}{\partial\alpha}=e^{-\gamma P}\left[\frac{1+\rho}{4}[-e^{-\gamma P(1-\alpha)\sigma}](\gamma P\sigma)+\frac{1+\rho}{4}[-e^{\gamma P(1-\alpha)\sigma}](-\gamma P\sigma)\right]$$
$$=e^{-\gamma P}\left(\frac{1+\rho}{4}\right)(\gamma P\sigma)\times[e^{\gamma P(1-\alpha)\sigma}-e^{-\gamma P(1-\alpha)\sigma}]$$
$$=e^{-\gamma P}\left(\frac{1+\rho}{4}\right)(\gamma P\sigma)\times\left[e^{\gamma P(1-\alpha)\sigma}-\frac{1}{e^{\gamma P(1-\alpha)\sigma}}\right]>0,\qquad where\ e^{\gamma P(1-\alpha)\sigma}>1$$

그러므로 CMO의 효용은 pass-through의 효용보다 크다.

3. IARA 효용함수

$$EU(Sen)=\frac{1+\rho}{4}(-[a-P(1+(1-\alpha)\sigma)]^2])+\frac{1+\rho}{2}(-[a-P]^2)$$
$$+\frac{1+\rho}{4}(-[a-P(1-(1-\alpha)\sigma)]^2)$$

이를 α로 편미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial EU(Senior)}{\partial \alpha} = \frac{1+\rho}{4}(-2[a-P(1+(1-\alpha)\sigma)](\sigma)) + \frac{1+\rho}{4}(-2[a-P(1-(1-\alpha)\sigma)](-\sigma))$$
$$= \frac{1+\rho}{4}(2\sigma)([a-P(1-(1-\alpha)\sigma)]-[a-P(1+(1-\alpha)\sigma)])$$
$$= \frac{1+\rho}{4}(2\sigma)\cdot 2(1-\alpha)\sigma > 0$$

그러므로 CMO 전체의 효용은 pass-through의 효용보다 크다.

본 장에서 지금까지 살펴본 바와 같이 위험회피 투자자의 다양한 형태의 효용함수에 걸쳐 CMO senior tranche의 효용이 pass-through의 개별 tranche의 효용보다 높다. 그러므로 위험에 대한 태도가 상이한 투자자들이 시장에 참여할 때에는 (동일한 모기지풀을 대상으로 MBS를 발행할 경우에도) 단순한 구조의 pass-through보다는 보다 차별화된 구조인 CMO가 선호되고 그 결과 시장에서 더 높은 가격으로 거래될 수 있음을 알 수 있다.

Ⅳ. 동질적 투자자 경우

이제 모든 투자자가 위험회피 투자자인 경우를 살펴보기로 하자. 이 때 투자자의 효용함수 형태가 틀리면 각 투자자 효용은 “additive”하지 못하므로 투자자 효용의 합(sum)의 후생적 의미를 상실한다. 반면 투자자 효용함수를 동일하게 설정하면 개별 효용의 합이 후생적 의미를 갖는다. 그러므로 우리는 두 투자자의 효용함수가 공히 DARA, CARA 혹은 IARA인 경우를 살펴보기로 한다. 즉 투자자의 효용이 100% 동일한 경우 전체 투자자의 효용의 합을 증대시키는 MBS 발행 구조가 존재하는지를 파악해 보기로 한다. 이를 통해서 시장에 참여하는 투자자들의 욕구가 대체적으로 유사할 경우에 보다 높은 가치를 창출하는 MBS 형태를 유추해 볼 수 있다.

두 위험회피 투자자의 개인적 효용이 아닌 전체 투자자 효용의 극대화를 추구하므로, CMO 발행 구조를 보다 일반화하여 CMO senior tranche 및 subordinate tranche의 발행 구조를 α에 연계시키지 않고 자유로이 α, β로 설정하기로 하자.[9] (<표 2> 참조)

본 장에서는 Jensen’s Inequality를 이용하여 두 MBS의 효용을 비교해 보기로 한다. DARA, CARA 혹은 IARA인 두 투자자의 효용함수를 간단히 f[·]로 표시하자. 즉 현

9) 제 Ⅲ장에서 사건 uu 혹은 dd 발생 시 subordinate tranche 현금 흐름을 $P[1\pm(1+\alpha)\sigma]$로 설정한 이유, 즉 α로 연계시킨 이유는 위험중립 투자자의 기대값(효용) P를 충족시키기 위한 것이었음을 기억하자.

<표 2> MBS 발행구조와 현금 흐름($0 \leq \{\alpha, \beta\} \leq 1$, $0 < (1+\beta)\sigma < 1$)

확률	Mortgage Pool	Pass-through Tranche 1	Pass-through Tranche 2	CMO Senior	CMO Subordinate
$uu = (1+\rho)/4$	$2 \cdot P[1+\sigma]$	$P[1+\sigma]$	$P[1+\sigma]$	$P[1+(1-\alpha)\sigma]$	$P[1+(1+\alpha)\sigma]$
$ud = (1-\rho)/4$	$2 \cdot P$	P	P	P	P
$du = (1-\rho)/4$	$2 \cdot P$	P	P	P	P
$dd = (1+\rho)/4$	$2 \cdot P[1-\sigma]$	$P[1-\sigma]$	$P[1-\sigma]$	$P[1-(1-\beta)\sigma]$	$P[1-(1+\beta)\sigma]$

금 흐름이 x일 때의 투자자의 효용의 크기를 f[x]라 하자. 이 때 f[·]가 DARA, CARA 혹은 IARA 중 어떤 함수이든 모두 위험회피자의 효용함수이므로 f[·]는 강오목함수(strictly concave functions)임을 알 수 있다. 이제 Pass-through의 두 트랜치를 보유할 때의 기대효용을 구하면 다음과 같다.

Pass-through의 기대효용
= 2×{1개 Pass-through tranche의 기대효용}
$= 2\times\{uu \times f[P(1+\sigma)] + (ud+du) \times f[P] + dd \times f[P(1-\sigma)]\}$
$= 2\times(ud + du) \times f[P] + 2\{uu \times f[P(1+\sigma)] + dd \times f[P(1-\sigma)]\}$

한편 Senior-Subordinate CMO의 두 트랜치를 보유할 때의 기대효용은 다음과 같다.

Senior-Subordinate CMO의 기대효용
= Senior tranche의 기대효용 + Subordinate tranche의 기대효용
$= uu \times f[P[1+(1-\alpha)\sigma]] + (ud + du) f[P] + dd \times f[P[1-(1-\beta)\sigma]]$
$+ uu \times f[P[1+(1+\alpha)\sigma]] + (ud + du) f[P] + dd \times f[P[1-(1+\beta)\sigma]]$
$= 2 \times (ud + du) f[P] + uu \times \{f[P[1+(1-\alpha)\sigma]] + f[P[1+(1+\alpha)\sigma]]\}$
$+ dd \times \{f[P[1-(1-\beta)\sigma]] + f[P[1-(1+\beta)\sigma]]\}$

그러므로 두 MBS의 기대효용을 비교하면,

Pass-through 기대효용 − Senior-Subordinate CMO의 기대효용
$= 2 \times \{uu \times f[P(1+\sigma)] + dd \times f[P(1-\sigma)]\}$

$$
\begin{aligned}
&- uu\{f[P[1+(1-\alpha)\sigma]] + f[P[1+(1+\alpha)\sigma]]\} - dd\{f[P[1-(1-\beta)\sigma]] + f[P[1-(1+\beta)\sigma]]\} \\
&= uu \times \{2 \times f[P(1+\sigma)] - f[P[1+(1-\alpha)\sigma]] - f[P[1+(1+\alpha)\sigma]]\} \\
&\quad + dd \times \{2 \times f[P(1-\sigma)] - f[P[1-(1-\beta)\sigma]] - P[[1-(1+\beta)\sigma]]\} \\
&= uu \times A + dd \times B
\end{aligned}
$$

가 된다. 그런데 f[・]는 강오목 함수이므로 Jensen's Inequaltity에 의해

$$
\begin{aligned}
A &= 2 \times f[P(1+\sigma)] - \{f[P[1+(1-\alpha)\sigma]] + f[P[1+(1+\alpha)\sigma]]\} > 0 \\
B &= 2 \times f[P(1-\sigma)] - \{f[P[1-(1-\beta)\sigma]] + f[P[1-(1+\beta)\sigma]]\} > 0
\end{aligned}
$$

이 성립한다. 즉 투자자의 구체적 효용 함수 형태가 DARA, CARA, 혹은 IARA에 관계없이, 그리고 $0 \leq \{\alpha, \beta\} \leq 1$, $0 < (1+\beta)\sigma < 1$인 모든 α, β값에 대해, Pass-through의 기대효용은 언제나 Senior-Subordinate CMO의 기대효용보다 크다.[10]

한편 CMO의 발행 구조를 더욱 일반화한 경우에는 어떠할까? 즉 지금까지는 사건 ud 혹은 du의 경우에는 Pass-through와 Senior-Subordinate CMO의 각 트랜치에 각각 "P"의 현금 흐름이 할당되었지만, Senior-Subordinate CMO의 두 트랜치의 현금 흐름에 변화를 주어 보자. 구체적으로 senior tranche에는 $P(1+\delta)$를, subordinate tranche 에$P(1-\delta)$를 할당하는 경우를 생각할 수 있는데, 이 경우에도 pass-through의 효용이 더 크게 나타난다. 또 반대로 senior tranche에 $P(1-\delta)$를, subordinate tranche에 $P(1+\delta)$를 할당하는 경우에도 마찬가지인데 위의 증명 과정과 매우 유사하므로 여기서는 증명을 생략한다. 이처럼 모기지풀의 현금 흐름을 항상 $\frac{1}{2}$씩으로만 분배하는 pass-through보다 다양한 α, β, δ 값의 조합을 이용하여 분배할 수 있는 CMO의 발행구조가 훨씬 자유롭고 일반적임에도 불구하고 항상 pass-through보다 더 적은 효용을 산출하는 이유는 무엇일까? 이는 투자자 효용의 형태와 관련되어 있다. 즉 두 투자자가 "모두" 위험을 회피하는 경우에는, 모기지풀의 현금 흐름을 정확히 $\frac{1}{2}$씩 분배하는 구조가 전체 후생 경제상 가장 높은 효용을 창출한다. 왜냐하면 CMO와 같이 각 트랜치별로 위험을 집중・제거시켜 전체 투자자 효용의 증대를 꾀하려고 하면, 위험이 집중된 트랜치로 인한 투자자 효용의 감소가 위험이 제거된 트랜치로 인한 효용의 증대를 상회하게 되기 때문이다. 그리고 위험 회피 정도가 상이한 DARA, CARA 및 IARA 효용함수 모두

10) 참고로 두 MBS의 효용의 크기를 α, β의 편미분으로 직접 비교하여 증명한 결과를 제 Ⅶ장(부록)에서 보여준다. DARA인 경우만을 예시하였다.

에 대해, 또 각 효용함수의 모든 모수값에 대해 pass-through 효용이 CMO 효용을 상회하였으므로 pass-through의 우월한 효용은 투자자의 위험 회피 정도와 관계없이 강건하게("robust") 성립함을 알 수 있다. 이의 현실적 함의를 찾는다면, 시장에 참여하는 투자자가 비교적 동질적인 경우에는 트랜치의 차별화를 통한 추가적 효용(가치) 증대가 어렵다는 것이다. 반면 시장에 다양한 기호와 욕구를 가진, 이질적인 투자자가 많이 참여하면 제 Ⅲ장에서와 같이 MBS의 발행 구조의 변화를 통해서 투자자 효용이 제고될 개연성이 보다 높다. 결론적으로 MBS가 투자자들에게 보다 높은 가치를 지닌 증권으로 인식되고 또 보다 높은 가격으로 시장에서 유통되기 위해서는 투자자 효용에 대한 체계적 연구가 필요하다.

Ⅴ. 일반화 : 파산 확률이 $\frac{1}{2}$로 동일하지 않은 경우

M1, M2의 파산 확률을 각각 g_1, g_2라 하자. 이제 더 이상 $g_1 = g_2 = \frac{1}{2}$을 가정하지는 않고 단지 $0 < g_1 < 1$ 그리고 $0 < g_1 < 1$만을 가정한다. 그런데 새로운 두 모수를 도입함에 따라 $\frac{\partial EU(Senior)}{\partial \alpha}$ 혹은 $\frac{\partial EU(CMO)}{\partial \beta}$과 같은 비교정태분석이 너무 복잡해진다. 왜냐하면 이러한 편미분의 결과가 모두 g_1, g_2, α, β, γ의 함수로 나타나 이들 값에 따라 편미분의 부호(+, -)가 결정되기 때문이다. 그러므로 제 Ⅲ장, 제 Ⅳ장에서와 같이 편미분의 부호를 용이하게 판단하기 어렵고 직관적 해석도 마찬가지이다. 그러므로 두 파산 확률을 100% 자유로이 취하는 대신 어느 정도 분석적인 해와 직관적 해석이 가능하도록 약간의 제한을 두기로 한다. 여기서는 $\rho = 0$인 경우를 설정하여 논의를 전개해 본다. 반면 다음 절에는 ρ에 전혀 제한을 가하지 않고 단지 $g_1 = g_2 (\neq \frac{1}{2})$즉 파산 확률이 동일한 경우를 분석하기로 한다. 또 계산 과정이 비교적 단순한 DARA 효용 함수 즉 U(W) = ln(W)를 대표적으로 분석하며, 투자자들의 효용이 이질적인 경우를 다루기로 한다(즉 CMO의 senior tranche의 추가적인 효용 창출을 고찰한다).

1. 파산 확률이 다를 경우($g_1 \neq g_2$, $\rho = 0$)

$\rho = 0$이면 $dd = g_1 \cdot g_2$, $uu = (1-g_1)(1-g_2)$, $ud = (1-g_1)g_2$, $du = g_1(1-g_2)$이고 uu와 dd와의 관계는 $uu = dd + 1 - g_1 - g_2$이다. 또한 $E(M1) = (1-g_1)P(1+\sigma) + g_1 \cdot P(1-\sigma) = P[1+(1-2g_1)\sigma]$, 마찬가지로 $E(M2) = P[1+(1-2g_2)\sigma]$가 된다. 이 때 CMO의 Senior tranche의 기대효용은

$EU(Senior) = uu \cdot \ln[P\{1+(1-\alpha)\sigma\}] + dd \cdot \ln[P\{1-(1-\alpha)\sigma\}] + (ud+du)\ln[P]$
$= uu(\ln[P] + \ln[1+(1-\alpha)\sigma]) + dd(\ln[P] + \ln[1-(1-\alpha)\sigma]) + (ud+du)\ln[P]$
$= uu \cdot \ln[1+(1-\alpha)\sigma]) + dd \cdot \ln[1-(1-\alpha)\sigma]) + \ln[P]$ ($\because$ $uu+dd+ud+du = 1$)

가 되고 이를 α로 편미분하면

$$\frac{\partial EU(Senior)}{\partial \alpha} = \frac{-uu \cdot \sigma}{1+(1-\alpha)\sigma} + \frac{dd \cdot \sigma}{1-(1-\alpha)\sigma}$$
$$= \frac{dd[1+(1-\alpha)\sigma] - uu[1-(1-\alpha)\sigma]}{[1+(1-\alpha)\sigma] \cdot [1-(1-\alpha)\sigma]} \times \sigma = \frac{f(\alpha) \cdot \sigma}{[1+(1-\alpha)\sigma] \cdot [1-(1-\alpha)\sigma]}$$

이 된다. 여기서 $f(\alpha) > 0$이면 이 편미분의 부호도 양(+)이 된다. $f(\alpha)$를 다시 쓰면

$f(\alpha) = dd[1+(1-\alpha)\sigma] - uu[1-(1-\alpha)\sigma]$
$= dd[1+(1-\alpha)\sigma] - (dd + 1 - g_1 - g_2) \cdot [1-(1-\alpha)\sigma]$
$= dd[(1-\alpha)\sigma+(1-\alpha)\sigma] - (1 - g_1 - g_2) + (1 - g_1 - g_2)(1-\alpha)\sigma$
$= (2dd + 1 - g_1 - g_2)(1-\alpha)\sigma + (g_1 + g_2 - 1)$
$= [2g_1g_2 + 1 - g_1 - g_2](1-\alpha)\sigma + (g_1 + g_2 - 1)$
$= [g_1g_2 + g_1g_2 + 1 - g_1 - g_2](1-\alpha)\sigma + (g_1 + g_2 - 1)$
$= [g_1g_2 + (1 - g_1)(1-g_2)](1-\alpha)\sigma + (g_1 + g_2 - 1)$
$= G \cdot (1-\alpha)\sigma + (g_1 + g_2 - 1)$ (where $G = g_1 g_2 + (1 - g_1)(1-g_2) > 0,\ \forall g_1, g_2$)

라 하자. $f(\alpha) > 0$ 이려면 $G(1-\alpha)\sigma - 1 + (g_1+g_2) > 0$ 이므로 $G\sigma - 1 + (g_1+g_2) > G\alpha\sigma$이다.

즉 $\alpha < \dfrac{G\sigma - 1 + (g_1+g_2)}{G\sigma} = 1 + \dfrac{(g_1+g_2) - 1}{G\sigma} = 1 + GG$이어야 한다.

이제 GG의 크기에 따라 즉 g_1, g_2, σ의 크기에 따라 $f(\alpha) > 0$를 충족시키는 의미있는 α값이 존재하는지 그리고 그 값의 범위는 어떻게 되는지가 결정된다. 만일 $(g_1 + g_2) \geq 1$이면 $(1+GG) \geq 1$이므로 $0 < \alpha < 1$의 모든 값에 대해 $f(\alpha) > 0$이다. 즉 모든 α값에 대해 EU(Senior)는 증가한다. 만일 $(g_1 + g_2) < 1$이면 $GG < 0$이므로 $(1+GG)$의 부호는 g_1, g_2, σ의 값에 의하여 결정된다. 예로서 $GG \leq (-1)$이면 $\alpha < 0$이 되어 $f(\alpha) > 0$을 만드는 양의 α는 존재하지 않는다. 즉 $0 < \alpha < 1$의 모든 값에 대해 $f(\alpha) < 0$이고 EU(Senior)를 증대시킬 수 있는 발행구조는 존재하지 않는다. 또 g_1, g_2가 주어졌을 때 σ가 작으면 GG의 분모인 $G\sigma$가 작아지므로 $GG < (-1)$일 확률 즉 $f(\alpha) < 0$일 확률이 높

아진다. 본 장에서는 g_1, g_2의 값에 보다 많은 관심이 있으므로, σ가 주어졌을 때의 (1+GG)의 값을 알아보기로 한다. 먼저 $\sigma = \frac{1}{2}$일 때 그리고 $(g_1 + g_2) < 1$일 때 (1+GG)의 값 즉 α의 최대값은 다음 표와 같다.

<표 3>에서와 같이 g_1+ g_2의 합이 상대적으로 큰경우에는 1 + GG 값의 부호가 양(+)이 되어 α<1 + GG 가 유의한 범위로 결정되며, g_1+ g_2의 합이 작은 경우에는 $\alpha < 1 +$ GG 의 범위가 음(−)이 되므로 $f(\alpha) > 0$을 충족시키는 α는 없고 따라서 EU(Senior)를 증대시키는 CMO 발행구조는 존재하지 않는다(음영으로 표시된 셀(cell)은 1 + GG < 0인 {g_1, g_2}조합을 나타낸다). 한편 앞서 지적하였듯이 σ가 작아지면 GG < −1일 확률이 높아지는데 참고로 $\sigma = 1/3$일 때 (1 + GG)의 값은 <표 4>와 같다.

<표 3> α의 최대값과 g_1, g_2의 관계($g_1 + g_2 < 1$, $\sigma = \frac{1}{2}$)

g_1	g_2																		
	0.04	0.09	0.14	0.19	0.24	0.29	0.34	0.39	0.44	0.49	0.54	0.59	0.64	0.69	0.74	0.79	0.84	0.89	0.94
0.04	−0.99	−0.98	−0.97	−0.96	−0.95	−0.93	−0.92	−0.90	−0.87	−0.85	−0.81	−0.77	−0.72	−0.66	−0.58	−0.46	−0.28	0.01	0.58
0.09	−0.98	−0.96	−0.94	−0.91	−0.88	−0.84	−0.81	−0.76	−0.71	−0.65	−0.58	−0.50	−0.40	−0.28	−0.12	0.08	0.37	0.78	
0.14	−0.97	−0.94	−0.90	−0.85	−0.80	−0.75	−0.69	−0.62	−0.55	−0.46	−0.36	−0.24	−0.10	0.06	0.27	0.52	0.84		
0.19	−0.96	−0.91	−0.85	−0.79	−0.72	−0.65	−0.57	−0.48	−0.38	−0.26	−0.14	0.01	0.18	0.37	0.60	0.88			
0.24	−0.95	−0.88	−0.80	−0.72	−0.64	−0.54	−0.55	−0.33	−0.20	−0.07	0.08	0.25	0.44	0.65	0.89				
0.29	−0.93	−0.84	−0.75	−0.65	−0.54	−0.43	−0.30	−0.17	−0.03	0.13	0.30	0.48	0.68	0.90					
0.34	−0.92	−0.81	−0.69	−0.57	−0.44	−0.30	−0.16	−0.01	0.15	0.32	0.51	0.70	0.91						
0.39	−0.90	−0.76	−0.62	−0.48	−0.33	−0.17	−0.01	0.16	0.34	0.52	0.71	0.92							
0.44	−0.87	−0.71	−0.55	−0.38	−0.20	−0.03	0.15	0.34	0.53	0.72	0.92								
0.49	−0.85	−0.65	−0.46	−0.26	−0.07	0.13	0.32	0.52	0.72	0.92									
0.54	−0.81	−0.58	−0.36	−0.14	0.08	0.30	0.51	0.72	0.92										
0.59	−0.77	−0.50	−0.24	0.01	0.25	0.48	0.70	0.92											
0.64	−0.72	−0.40	−0.10	0.18	0.44	0.68	0.91												
0.69	−0.66	−0.28	0.06	0.37	0.65	0.90													
0.74	−0.58	−0.12	0.27	0.60	0.89														
0.79	−0.46	0.08	0.52	0.88															
0.84	−0.28	0.37	0.84																
0.89	0.01	0.78																	
0.94	0.58																		

<표 4> α의 최대값과 g_1, g_2의 관계($g_1+g_2<1$, $\sigma=\frac{1}{3}$)

g_1	g_2																		
	0.04	0.09	0.14	0.19	0.24	0.29	0.34	0.39	0.44	0.49	0.54	0.59	0.64	0.69	0.74	0.79	0.84	0.89	0.94
0.04	-1.99	-1.98	-1.96	-1.94	-1.92	-1.90	-1.87	-1.84	-1.81	-1.77	-1.72	-1.66	-1.59	-1.49	-1.36	-1.19	-0.92	-0.49	0.37
0.09	-1.98	-1.94	-1.90	-1.86	-1.82	-1.77	-1.71	-1.64	-1.57	-1.38	-1.39	-1.25	-1.10	-0.92	-0.68	-0.37	0.05	0.76	
0.14	-1.96	-1.90	-1.85	-1.78	-1.71	-1.63	-1.54	-1.43	-1.32	-1.19	-1.04	-0.86	-0.65	-0.40	-0.10	0.28	0.81		
0.19	-1.94	-1.86	-1.78	-1.69	-1.59	-1.48	-1.35	-1.22	-1.07	-0.90	-0.70	-0.49	-0.23	0.06	0.04	0.81			
0.24	-1.92	-1.82	-1.71	-1.59	-1.46	-1.31	-1.16	-0.99	-0.81	-0.60	-0.38	-0.13	0.16	0.48	0.84				
0.29	-1.90	-1.77	-1.63	-1.48	-1.31	-1.14	-0.96	-0.76	-0.54	-0.31	-0.01	0.22	0.52	0.86					
0.34	-1.87	-1.71	-1.54	-1.35	-1.16	-0.96	-0.74	-0.51	-0.27	-0.01	0.28	0.55	0.87						
0.39	-1.84	-1.64	-1.43	-1.22	-0.99	-0.76	-0.51	-0.27	0.01	0.28	0.58	0.88							
0.44	-1.81	-1.57	-1.32	-1.07	-0.81	-0.54	-0.27	0.01	0.29	0.58	0.88								
0.49	-1.77	-1.48	-1.19	-0.90	-0.60	-0.31	-0.01	0.29	0.58	0.88									
0.54	-1.72	-1.38	-1.04	-0.70	-0.38	-0.06	0.26	0.58	0.88										
0.59	-1.66	-1.25	-0.86	-0.49	-0.13	0.22	0.55	0.88											
0.64	-1.59	-1.10	-0.65	-0.23	0.16	0.52	0.87												
0.69	-1.49	-0.92	-0.40	0.06	0.48	0.86													
0.74	-1.36	-0.68	-0.10	0.40	0.84														
0.79	-1.19	-0.37	0.28	0.81															
0.84	-0.92	0.05	0.76																
0.89	-0.49	0.67																	
0.94	0.37																		

이제 g_1, g_2 및 σ값과 CMO 가치와의 관계를 해석해 보자. 먼저 모기지론의 파산 확률이 낮은 경우에는 ($g_1+g_2<1$) CMO 가치를 증대시키는 새로운 발행 구조가 존재할 가능성이 낮다. 왜냐하면 개별 모기지론의 파산 가능성 자체가 희박하므로 전체 모기지풀 차원에서도 파산 위험이 작기 때문이다. 즉 파산 위험이 높을수록 복잡한 발행 구조의 CMO의 강점이 부각되며 그렇지 않을 경우에는 기존의 평이한 MBS보다 “추가적으로” 가치를 제고하는 CMO 발행구조는 찾아내기 어렵다. 둘째로 σ값이 작을수록 CMO 가치를 증대시키는 새로운 발행 구조가 존재할 가능성이 낮다. σ값이 작다는 것은, 파산시 모기지론의 가치 하락이 작다는 뜻이므로 파산으로 인한 가격 충격(damage)이 작다는 의미가 된다. 파산의 충격이 작다면 굳이 복잡한 발행 구조의 CMO를 통하지 않아도, 평이한 구조의 MBS만으로 최적의 위험 관리가 가능할 확률이 높아진다는 것이다. 요약하면 파산 확률이 낮거나 파산시 충격이 작다는 것은 결국 파산 위험이 작다는 의미이다. 그러므로 파산 위험이 낮을수록 MBS 발행구조 차별화의

순기능이 작아지며 나아가 파산 위험이 임계치 이하로 낮아지면 CMO는 평이한 MBS 이상의 효용을 증대시킬 수 없음을 <표 3>, <표 4>의 결과가 시사하고 있다.

2. 파산 확률이 $\frac{1}{2}$과 다를 경우($g_1 = g_2 \neq \frac{1}{2}$, $-1 < \rho < 1$)

이제 $g_1 = g_2 \neq \frac{1}{2}$이고 ρ는 어떠한 값이라도 취할 수 있다고 가정한다. $g_1 = g_2 = g$라 하면 $uu + ud = 1 - g = uu + du$이므로 $ud = du$가 성립하고 또 $ud + dd = du + dd = g$이므로 $uu - dd = 1 - 2g$가 된다. 한편 두 모기지론 가치의 기대값은 $E(M1) = E(M2) = (1-g) P(1+\sigma) + g \cdot P(1-\sigma) = P[1+(1-2g)\sigma]$이고 분산은

$$
\begin{aligned}
Var[M1] = Var[M2] &= E[\{M-E[M]\}^2] = (1-g)[P(1+\sigma)-E[M]]^2 + g[P(1-\sigma)-E[M]]^2 \\
&= (1-g)[P(1+\sigma) - P[1+(1-2g)\sigma]]^2 + g[P(1-\sigma) - P[1+(1-2g)\sigma]]^2 \\
&= (1-g)[2g\sigma P]^2 + g[-2(1-g)\sigma P]^2 \\
&= (1-g)4g^2\sigma^2P^2 + g \cdot 4(1-2g+g^2)\sigma^2P^2 \\
&= 4g^2\sigma^2P^2 - 4g^3\sigma^2P^2 + 4g\sigma^2P^2 - 8g^2\sigma^2P^2 + 4g^3\sigma^2P^2 \\
&= -4g^2\sigma^2P^2 + 4g\sigma^2P^2 \\
&= 4g\sigma^2P^2(1-g)
\end{aligned}
$$

이다. 또 두 모기지론 가치의 공분산은

$$
\begin{aligned}
& Cov[M1, M2] = E[\{M1-E[M1]\} \cdot \{M2-E[M2]\}] \\
& = uu\{P(1+\sigma) - P[1+(1-2g)\sigma]\}^2 + dd[P(1-\sigma) - P[1+(1-2g)\sigma]]^2 \\
& + (ud + du)\ \{P(1+\sigma) - P[1+(1-2g)\sigma]\}\{P(1-\sigma) - P[1+(1-2g)\sigma]\}^2 \\
& = uu \cdot 4g^2\sigma^2P^2 + dd \cdot \sigma^2P^2\ (-2+2g)^2 + 2ud \cdot [\sigma P(2g)(-2+2g)\sigma P] \\
& = 4\sigma^2P^2[uu \cdot g^2 + dd(1-2g+g^2) + 2ud(-g+g^2)] \\
& = 4\sigma^2P^2[g^2 \cdot (uu+dd+2ud) + g(-2dd-2ud) + dd] = 4\sigma^2P^2[g^2 + g(-2g) + dd] \\
& = 4\sigma^2P^2[dd - g^2]
\end{aligned}
$$

이다. 마지막으로 상관계수는

$$\rho(M1, M2) = Cov[M1, M2] / \{\sigma(M1)\sigma(M2)\} = 4\sigma^2P^2[dd-g^2] / 4g\sigma^2P^2(1-g) = (dd-g^2)/g(1-g)$$

이므로 uu, ud, du 및 dd는 다음과 같이 ρ의 함수로 표현가능하다. 즉,

$$dd = \rho g(1-g) + g^2,\ uu = dd + 1-2g = \rho g(1-g) + g^2,\ ud = du = 1-g-uu = 1-g-(dd+1-2g) = g-dd$$

이 된다. 또 $g_1 \neq g_2$ 그리고 $\rho = 0$였던 앞절과 비교하여 uu, dd 등의 값만 틀릴 뿐 기본 공식은 같으므로 CMO Senior tranche의 기대 효용은

$$EU(Senior) = uu \cdot \ln[1+(1-\alpha)\sigma]) + dd \cdot \ln[1-(1-\alpha)\sigma]) + \ln[P]$$

이고 이를 편미분하면

$$\frac{\partial EU(Senior)}{\partial \alpha} = \frac{dd[1+(1-\alpha)\sigma] - uu[1-(1-\alpha)\sigma)}{[1+(1-\alpha)\sigma]\cdot[1-(1-\alpha)\sigma]} \times \sigma = \frac{f(\alpha)\cdot\sigma}{[1+(1-\alpha)\sigma]\cdot[1-(1-\alpha)\sigma]}$$

이 된다. 여기서 $f(\alpha) > 0$이면 전체 편미분의 부호도 0보다 크다. $f(\alpha)$를 다시 쓰면

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= dd[1+(1-\alpha)\sigma] - uu[1-(1-\alpha)\sigma] \\
&= dd[1+(1-\alpha)\sigma] - (dd+1-2g)\cdot[1-(1-\alpha)\sigma] \\
&= dd[(1-\alpha)\sigma + (1-\alpha)\sigma] - (1-2g) + (1-2g)(1-\alpha)\sigma \\
&= (2dd+1-2g)(1-\alpha)\sigma + (2g-1) \\
&= [2\{\rho g(1-g)+g^2\} + 1 - 2g](1-\alpha)\sigma + (2g-1) \\
&= [2(\rho g - \rho g^2 + g^2) + 1 - 2g](1-\alpha)\sigma + (2g-1) \\
&= [2(1-\rho)g^2 + 2(\rho-1)g + 1](1-\alpha)\sigma + (2g-1) \\
&= G(1-\alpha)\sigma + (2g-1)
\end{aligned}$$

이다. 여기서 $G = 2(1-\rho)g^2 + 2(\rho-1)g + 1$인데 이는 g의 2차 함수로 모든 g 값에 대해서 항상 0보다 크다.

이제 $f(\alpha) > 0$이기 위해서는

$G(1-\alpha)\sigma + (2g-1) > 0$, 즉 $G\sigma - G\alpha\sigma + 2g - 1 > 0$이므로 $\alpha < (G\sigma)^{-1}(G\sigma + 2g-1) = 1 + (2g-1)(G\sigma)^{-1} = 1+GG$가 된다. 여기서 $(G\sigma)^{-1} > 0$이므로 $g \geq \frac{1}{2}$ 이면 ρ값과 관계 없이 $\alpha < 1 + GG \geq 1$이 되어 모든 α 값에 대해 $f(\alpha) > 0$이 성립하여 CMO senior tranche의 가치가 증대됨을 알 수 있다. 한편 $g < \frac{1}{2}$이면 ρ값에 따라 $\alpha < 1 + GG$의 범위가 <표 5> 및 <표 6>과 같다.

<표 5> α의 최대값과 g, ρ의 관계($g < \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{1}{2}$)

$g=$	$\rho=$																		
	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.01	−1.04	−1.03	−1.03	−1.02	−1.02	−1.02	−1.01	−1.01	−1.00	−1.00	−1.00	−0.99	−0.99	−0.98	−0.98	−0.98	−0.97	−0.97	−0.96
0.03	−1.11	−1.10	−1.09	−1.07	−1.06	−1.05	−1.03	−1.02	−1.01	−1.00	−0.98	−0.97	−0.96	−0.95	−0.94	−0.92	−0.91	−0.90	−0.89
0.05	−1.20	−1.17	−1.15	−1.12	−1.10	−1.08	−1.05	−1.03	−1.01	−0.99	−0.97	−0.95	−0.93	−0.91	−0.89	−0.87	−0.85	−0.83	−0.82
0.07	−1.29	−1.25	−1.21	−1.17	−1.14	−1.10	−1.07	−1.04	−1.01	−0.98	−0.95	−0.92	−0.89	−0.87	−0.84	−0.81	−0.79	−0.77	−0.74
0.09	−1.38	−1.33	−1.27	−1.22	−1.17	−1.13	−1.08	−1.04	−1.00	−0.96	−0.92	−0.89	−0.85	−0.82	−0.79	−0.75	−0.72	−0.70	−0.67
0.11	−1.48	−1.41	−1.34	−1.27	−1.21	−1.15	−1.09	−1.04	−0.99	−0.94	−0.89	−0.85	−0.81	−0.77	−0.73	−0.69	−0.66	−0.62	−0.59
0.13	−1.60	−1.50	−1.40	−1.32	−1.24	−1.17	−1.10	−1.03	−0.97	−0.91	−0.86	−0.81	−0.76	−0.71	−0.67	−0.63	−0.59	−0.55	−0.51
0.15	−1.72	−1.59	−1.47	−1.36	−1.27	−1.18	−1.09	−1.02	−0.95	−0.88	−0.82	−0.76	−0.70	−0.65	−0.60	−0.56	−0.52	−0.48	−0.44
0.17	−1.85	−1.68	−1.54	−1.41	−1.29	−1.18	−1.08	−1.00	−0.91	−0.84	−0.77	−0.70	−0.64	−0.59	−0.54	−0.49	−0.44	−0.40	−0.36
0.19	−1.99	−1.78	−1.60	−1.44	−1.30	−1.18	−1.07	−0.97	−0.87	−0.79	−0.72	−0.65	−0.58	−0.52	−0.47	−0.41	−0.37	−0.32	−0.28
0.21	−2.14	−1.88	−1.66	−1.47	−1.31	−1.17	−1.04	−0.93	−0.83	−0.74	−0.65	−0.58	−0.51	−0.45	−0.39	−0.34	−0.29	−0.24	−0.20
0.23	−2.30	−1.98	−1.71	−1.49	−1.30	−1.14	−1.00	−0.88	−0.77	−0.67	−0.59	−0.51	−0.44	−0.37	−0.31	−0.26	−0.21	−0.16	−0.12
0.25	−2.48	−2.08	−1.76	−1.50	−1.29	−1.11	−0.95	−0.82	−0.70	−0.69	−0.51	−0.43	−0.36	−0.29	−0.23	−0.18	−0.13	−0.08	−0.04
0.27	−2.67	−2.17	−1.79	−1.49	−1.25	−1.05	−089	−0.75	−0.62	−0.52	−0.43	−0.34	−0.27	−0.21	−0.15	−0.09	−0.04	0.00	0.04
0.29	−2.86	−2.25	−1.80	−1.46	−1.20	−0.98	−0.81	−0.66	−0.54	−0.43	−0.33	−0.25	−0.18	−0.12	−0.06	−0.01	0.04	0.08	0.12
0.31	−3.06	−2.30	−1.79	−1.41	−1.12	−0.89	−0.71	−0.56	−0.44	−0.33	−0.24	−0.16	−0.08	−0.02	0.03	0.08	0.13	0.17	0.21
0.33	−3.25	−2.33	−1.74	−1.32	−0.02	−0.79	−0.60	−0.45	−0.32	−0.22	−0.13	−0.05	0.02	0.07	0.13	0.17	0.22	0.25	0.29
0.35	−3.43	−2.31	−1.65	−1.21	−0.89	−0.65	−0.47	−0.32	−0.20	−0.10	−0.02	0.06	0.12	0.17	0.22	0.27	0.31	0.34	0.37
0.37	−3.55	−2.23	−1.51	−1.05	−0.73	−0.50	−0.32	−0.18	−0.07	0.03	0.10	0.17	0.23	0.28	0.32	0.36	0.40	0.43	0.45
0.39	−3.58	−2.06	−.130	−0.84	−0.54	−0.32	−0.15	−0.03	0.08	0.16	0.23	0.29	0.34	0.38	0.42	0.46	0.49	0.51	0.54
0.41	−3.46	−1.79	−1.03	−0.59	−0.31	−0.12	0.03	0.14	0.23	0.30	0.36	0.41	0.46	0.49	0.53	0.55	0.58	0.60	0.62
0.43	−3.08	−1.38	−0.68	−0.30	−0.06	0.11	0.23	0.32	0.39	0.45	0.50	0.54	0.57	0.60	0.63	0.65	0.67	0.69	0.71
0.45	−2.36	−0.83	−0.26	0.04	0.22	0.35	0.44	0.51	0.56	0.60	0.64	0.67	0.69	0.72	0.73	0.75	0.77	0.78	0.79
0.47	−1.25	−0.16	0.22	0.41	0.53	0.60	0.66	0.70	0.73	0.76	0.78	0.80	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.87
0.49	0.21	0.60	0.73	0.80	0.84	0.87	0.89	0.90	0.91	0.92	0.93	0.93	0.94	0.94	0.95	0.95	0.95	0.96	0.96

이제 g 및 ρ값과 CMO 가치와의 관계를 분석해 보자. 개별 모기지론들의 ρ값이 높으면 모기지풀 차원에서도 파산 위험이 증대되므로 MBS의 차별적 효율적 발행 구조를 통한 위험의 효율적 관리 및 효용 증대가 이루어질 가능성이 높다. 반면 ρ값이 낮을수록, 나아가 음(−)의 값을 가지면, 전체 모기지풀 차원에서의 파산 위험 자체가 매우 작아져 새로운 발행 구조를 통한 효용 증대가거의 없다. 마지막으로 g값이 작을수록 파산 확률이 작아지고 파산 위험이 줄어들므로 역시 새로운 발행 구조를 통한 효용증

대 가능성이 낮다. 또 예상대로 σ값이 작을수록 투자자 효용을 증대시키는 의미있는 α 값이 존재할 확률이 낮다.

<표 6> α의 최대값과 g, ρ의 관계($g < \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{1}{3}$)

g=	ρ=																		
	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.01	−2,05	−2.05	−2.04	−2.04	−2.03	−2.02	−2.02	−2.01	−2.01	−2.00	−1.99	−1.99	−1.98	−1.98	−1.97	−1.96	−1.96	−1.95	−1.95
0.03	−2.17	−2.15	−2.13	−2.11	−2.09	−2.07	−2.05	−2.03	−2.01	−1.99	−1.98	−1.96	−1.94	−1.92	−1.90	−1.89	−1.87	−1.85	−1.84
0.05	−2.29	−2.26	−2.22	−2.18	−2.15	−2.11	−2.08	−2.05	−2.02	−1.98	−1.95	−1.92	−1.89	−1.86	−1.83	−1.81	−1.78	−1.75	−1.73
0.07	−2.43	−2.37	−2.31	−2.26	−2.21	−2.16	−2.11	−2.06	−2.01	−1.97	−1.92	−1.88	−1.84	−1.80	−1.76	−1.72	−1.68	−1.65	−1.61
0.09	−2.57	−2.49	−2.41	−2.33	−2.26	−2.19	−2.13	−2.06	−2.00	−1.94	−1.89	−1.83	−1.78	−1.73	−1.68	−1.63	−1.59	−1.54	−1.50
0.11	−2.73	−2.61	−2.51	−2.41	−2.31	−2.22	−2.14	−2.06	−1.98	−1.91	−1.84	−1.77	−1.71	−1.65	−1.59	−1.54	−1.49	−1.44	−1.39
0.13	−2.89	−2.74	−2.61	−2.48	−2.36	−2.25	−2.14	−2.05	−1.96	−1.87	−1.79	−1.71	−1.64	−1.57	−1.50	−1.44	−1.38	−1.33	−1.27
0.15	−3.07	−2.88	−2.71	−2.55	−2.40	−2.27	−2.14	−2.03	−1.92	−1.82	−1.73	−1.64	−1.56	−1.48	−1.41	−1.34	−1.27	−1.21	−1.15
0.17	−3.27	−3.02	−2.81	−2.61	−2.43	−2.27	−2.13	−1.99	−1.87	−1.76	−1.65	−1.56	−1.47	−1.38	−1.31	−1.23	−1.16	−1.10	−1.04
0.19	−3.48	−3.17	−2.90	−2.66	−2.46	−2.27	−2.10	−1.95	−1.81	−1.69	−1.57	−1.47	−1.37	−1.28	−1.20	−1.12	−1.05	−0.98	−0.92
0.21	−3.71	−3.32	−2.99	−2.71	−2.46	−2.25	−2.06	−1.89	−1.74	−1.60	−1.48	−1.37	−1.27	−1.16	−1.09	−1.01	−0.93	−0.86	−0.80
0.23	−3.95	−3.47	−3.07	−2.74	−2.46	−2.21	−2.00	−1.82	−1.65	−1.51	−1.38	−1.26	−1.15	−1.06	−0.97	−0.89	−0.81	−0.74	−0.68
0.25	−4.22	−3.62	−3.14	−2.75	−2.43	−2.16	−1.93	−1.73	−1.55	−1.40	−1.26	−1.14	−1.03	−0.94	−0.85	−0.76	−0.69	−0.62	−0.56
0.27	−4.50	−3.75	−3.18	−2.74	−2.38	−2.08	−1.83	−1.62	−1.44	−1.28	−1.14	−1.02	−0.91	−0.81	−0.72	−0.64	−0.57	−0.50	−0.44
0.29	−4.79	−3.87	−3.20	−2.69	−2.30	−1.98	−1.71	−1.49	−1.30	−1.14	−1.00	−0.88	−0.77	−0.67	−0.59	−0.51	−0.44	−0.37	−0.31
0.31	−5.09	−3.96	−3.18	−2.61	−2.18	−1.84	−1.57	−1.34	−1.15	−0.99	−0.85	−0.73	−0.63	−0.53	−0.45	−0.38	−0.31	−0.25	−0.19
0.33	−5.38	−4.00	−3.11	−2.49	−2.03	−1.68	−1.40	−1.17	−0.99	−0.83	−0.69	−0.58	−0.48	−0.39	−0.31	−0.24	−0.18	−0.12	−0.07
0.35	−5.64	−3.97	−2.97	−2.31	−1.83	−1.48	−1.20	−0.98	−0.80	−0.65	−0.52	−0.42	−0.32	−0.24	−0.17	−0.10	−0.04	0.01	0.06
0.37	−5.83	−3.85	−2.76	−2.07	−1.59	−1.25	−0.98	−0.77	−0.60	−0.46	−0.34	−0.24	−0.16	−0.08	−0.02	0.04	0.09	0.14	0.18
0.39	−5.88	−3.60	−2.45	−1.76	−1.31	−0.98	−0.73	−0.54	−0.38	−0.26	−0.15	−0.07	0.01	0.08	0.13	0.18	0.23	0.27	0.31
0.41	−5.68	−3.18	−2.04	−1.39	−0.97	−0.67	−0.46	−0.29	−0.15	−0.05	0.04	0.12	0.18	0.24	0.29	0.33	0.37	0.40	0.43
0.43	−5.12	−2.57	−1.52	−0.95	−0.59	−0.34	−0.16	−0.02	0.09	0.18	0.25	0.31	0.36	0.40	0.44	0.48	0.51	0.53	0.56
0.45	−4.04	−1.75	−0.89	−0.44	−0.17	0.02	0.16	0.26	0.34	0.41	0.46	0.50	0.54	0.57	0.60	0.63	0.65	0.67	0.68
0.47	−2.37	−0.74	−0.18	0.11	0.29	0.40	0.49	0.55	0.60	0.64	0.67	0.70	0.72	0.74	0.76	0.78	0.79	0.80	0.81
0.49	−0.19	0.04	0.60	0.70	0.76	0.80	0.83	0.85	0.87	0.88	0.89	0.90	0.91	0.91	0.92	0.93	0.93	0.93	0.94

Ⅵ. 결　론

금융감독원에 따르면 한국 주택금융공사의 주택저당증권(MBS) 발행실적이 2006년도 3/4분기에는 1조 7608억원으로 2005년 동기 4조 2996억 원에 비해 59% 감소한 것으로 조사되었다. 이러한 MBS 시장의 침체에는 여러 요인이 있겠지만 투자자의 욕구를 원활히 충족시키는 MBS가 더 많이 발행될수록 MBS 시장이 더욱 활성화될 것은 분명하다. 본 연구에서는 그 하나의 방안으로 개별 모기지들의 파산 위험을 MBS 차원에서 효율적으로 관리하는 방법론을 고찰하며 또 개별 모기지들의 파산 확률, 파산시

가격 변동성 및 두 모기지론의 상관계수가 MBS를 통한 위험 관리의 효율성에 미치는 영향을 분석하였다. 특히 2007년도 미국의 서브프라임(subprime) 모기지 차입자의 파산이 미국, 나아가 전세계 금융시장의 위축을 가져 온 현상황에서 본 연구와 같은 모기지 파산 연구의 의의는 크다고 할 수 있다.

본 연구의 첫 번째 발견은 원 모기지풀에 포함되는 개별 모기지들의 파산의 상관관계가 낮을수록 MBS의 효용은 제고된다는 것이다. 이는 상관관계가 낮을수록 모기지풀의 비체계적 위험이 보다 많이 제거되기 때문이다. 둘째로 MBS 시장에 참여하는 투자자가 다양한 욕구와 효용을 가질 때에는 각 트랜치에 모기지풀 현금 흐름을 (1/n)씩 분배하는 평이한 발행구조의 MBS(pass-through)보다 현금 흐름의 불확실성을 선순위채에서 제거하고 후순위채에 집중시킨 MBS(CMO)의 효용이 높아진다. 반면 시장에 참여하는(위험회피) 투자자의 욕구가 동질적일 때에는 위험을 동일하게 분배하는 pass-through의 효용이 차등적으로 분배하는 CMO의 효용보다 언제나 더 높다. 셋째 발견은, 위험에 대한 태도가 이질적인 투자자들이 존재할 때 트랜치의 위험을 차별화하여 MBS 전체의 효용을 제고시키는 방안은 i) 개별 모기지들의 파산 확률이 높을수록 ii) 개별 모기지론 가치의 상관관계가 밀접할수록 iii) 파산시의 모기지론 가치 하락이 클수록 그 효율성이 높아진다는 것이다. 즉 개별 모기지들이 위험을 회피하는 투자자들에게 매력적이지 못할수록 트랜치 차별화를 통한 MBS의 효용 증대 가능성이 높다는 것이다.

한편 모기지 파산의 상관계수인 ρ의 현실적인 함의는 무엇인가? ρ의 중요성은, 파산 위험이 동일하게 주어진 모기지들이 존재할 때 이 모기지들을 여하히 취합하여(packaging) 모기지풀을 구성하는가에 따라 MBS의 가치가 제고될 수 있다는 데에 있다. 현실적인 함의로는, 전체적으로는 모기지론의 파산 확률이 유사한 경우에도 지역 (주택) 경제에 따라 그 상관관계는 여러 다양한 값을 가질 수 있다. 예로서 서울, 수도권, 충청권, 영남 및 호남권 등의 모기지 파산 확률이 비슷하다고 하더라도 그 상관관계는 다양한 값을 가질 수 있다는 것이다. 즉 서울 모기지론의 파산율이 높을 때 수도권의 그것도 높은 반면 영남권의 파산율은 낮을 수 있다. 이 경우 서울과 수도권의 모기지론을 함께 모기기풀에 편입하는 것보다, 서울 및 영남권의 모기지론을 함께 모기지풀에 편입할 때 이를 기초자산으로 하는 MBS의 효용 및 가치 증대가 이루어진다는 것이다. 현실적으로 특히 2006년 이후 대한민국정부의 부동산 정책이 강력하게 시행되고 특히 고가 아파트에 대하여 높은 세금이 부과되면서 서울 지역의 아파트 시장가격이 추세적으로 하락하고 있다. 이는 곧 이 지역 모기지론의 파산 확률이 커짐을 의미하는데, 지방 대

도시의 경우에는 고가 아파트 자체가 별로 없어 그 여파가 크지 않아 이로 인한 모기지론의 파산 확률이 특별히 높아지지는 않을 전망이다. 이 경우 서울 지역과 지방 대도시의 모기지론을 함께 편입하는 것은 모기지풀의 비체계적 위험을 제거하는 중요한 방법론이라고 할 수 있다.

또 본 연구에서 투자자의 동질성은 주로 위험회피 정도를 나타낸다. 즉 투자자들의 위험회피 정도가 대체적으로 비슷하면 동질적, 그렇지 않으면 이질적으로 보았는데, 후자의 대표적인 예로 위험중립자와 위험회피자가 함께 존재하는 경우를 설정하였다. 본 연구에 따르면 MBS를 구입하는 투자자들의 동질성 정도에 따라 이상적인 즉 고가로 판매될 수 있는 MBS 유형이 다르게 된다. 예로서 장기적인 투자 대상으로 MBS에 투자하려는 보험회사 등의 기관투자가들이 MBS 발행 시장의 주된 고객일 경우 이들의 asset-liability management를 고려할 때 비교적 동질적인 위험회피자들일 개연성이 높다. 이러한 경우에는 각 트랜치의 위험도를 극단적으로 차별화한 Senior-Subordinate CMO 보다는 Pass-through 형태의 MBS가 발행시장에서 보다 성공적으로 소화될 수 있을 것이다. 한편 현실적으로 모든 경우에 투자자들의 위험회피 정도를 파악하기란 쉽지 않은 작업인데, 예로서 실험경제학(experimental economics)의 여러 기법 등을 활용하여 제한된 범위에서나마 투자자의 효용에 대한 체계적인 탐구가 가능할 수 있다.

국내 MBS 시장은 최근에 형성되었기 때문에 이에 대한 학술 연구는 아직 일천하다. 또 신뢰성 높은 연구를 위한 자료의 축적이 충분히 이루어지지 않았기 때문에 실증 연구 환경은 아직은 열악하다고 할 수 있다. 한편 국내 모기지 및 MBS 시장을 선도하기 위한 이론 연구 또한 필요하며 아직 초기 단계인 시장의 성숙도를 감안하면 매우 미시적인 주제의 연구보다는 보다 거시적인 주제의 연구가 보다 적절할 수 있다. 이런 맥락에서 본 연구는 특히 국내 MBS 연구에 일정 부분 기여하는 바가 있다고 생각된다. 동시에 본 연구가 비교적 단순한 모형을 사용했다는 점에서 그 한계도 적지 않다. 예로서 연구의 현실성을 제고하기 위해서는 이항 모형 뿐 아니라 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation) 등을 활용한 보다 복잡한 모형을 활용하는 것이 필요하다. 이에 대해서는 향후의 보다 진전된 연구를 기대한다.

참 고 문 헌

유진, "MBS의 발행구조, 가치평가 및 투자자 특성에 관한 연구", 재무관리연구 22(1), 2005, 147-179.

유진, "주택저당증권(MBS)의 발행구조에 관한 연구 : 다양한 MBS 구조설계를 중심으로", 재무관리연구 23(1), 2006, 165-191.

Anderson, Gary A., Joel R. Barber, and Chun-Hao Chang, "Prepayment Risk and the Duration of Default-Free Mortgage-Backed Securities," *Journal of Financial Research*, 16(1), (1993), 1-9.

Boot, Arnoud W. A, and Anjan V. Thakor, Security Design, *Journal of Finance* 48, (1993), 1349-1378.

Brueckner, Jan K., "Borrower Mobility, Adverse Selection, and Mortgage Points," *Journal of Financial Intermediation* 3, (1994), 416-441

Chari, V. V., and Jagannathan, R., "Adverse Selection in a Model of Real Estate Lending," *Journal of Finance* 44, (1989), 499-508.

Chen, Ren-Raw, and T. L. Tyler Yang, "The Relevance of Interest Rate Processes in Pricing Mortgage-Backed Securities," *Journal of Housing Research* 6(2), (1995), 315-332.

Chen, Ren-Raw, Brian A. Maris, and Tyler T. Yang, "Valuing Fixed-Income Options and Mortgage-Backed Securities with Alternative Term Structure Models," *Journal of Business Finance Accounting* 26(1), (1999), 33-55.

Fabozzi, Frank J., *The Handbook of Mortgage-Backed Securities(5th ed.)*, New York : McGraw-Hill, 2001.

Koutmos, Gregory, and Andreas Pericli, "Are Multiple-Hedging Instruments Better Than One? : The Case of Fixed-Rate Mortgage-Backed Securities," *Journal of Portfolio Management* 26(2), (2000), 63-70.

Koutmos, Gregory, and Andreas Pericli, "Hedging GNMA Mortgage-Backed Securities with T-Note Futures-Dynamic Versus Static Hedging," *Real Estate Economics* 27(2), (1999), 335-363.

Riddiough, Timothy J., Optimal design and governance of asset-backed securities, *Journal of Financial Intermediation* 6, (1997), 121-152.

Stanton, Richard, "Rational Prepayment and the Valuation of Mortgage-Backed Securities," *Review of Financial Studies* 8(3), (1995), 677-708.

Stanton, Richard, and Nancy Wallace, "Mortgage Choice-What's the Point?," *Real Estate Economics* 26(2), (1998), 173-205.

<부 록>

정리 1의 증명 :

< “ρ = uu - ud - du + dd”의 증명 >

M1의 1년 후 가치는 각각 0.5의 확률로 P(1-σ), P(1+σ)이므로 M1의 기댓값 = P, 표준편차 = $P\sigma$이다. M2의 경우도 마찬가지이다. 한편 M1과 M2의 공분산은 다음과 같다. (두 모기지론의 가격을 나타내는 확률변수를 동일하게 M1, M2로 표기하자)

$Cov(M1,\ M2) = E[(M1-E(M1-E(M1)) \times (M2-E(M2))] = E[(M1-P) \times (M2-P)]$

$= uu \times P\sigma \times P\sigma + ud \times P\sigma \times (-P\sigma) + du \times (-P\sigma) \times P\sigma + dd \times (-P\sigma) \times (-P\sigma)$

$= (P\sigma)^2 \times (uu - ud - du + dd)$

그러므로 M1과 M2의 상관계수 ρ는 다음과 같다.

$$\rho = \frac{Cov(M1,\ M2)}{\sigma(M1) \times \sigma(M2)} = \frac{(P\sigma)^2 \times (uu - ud - du + dd)}{(P\sigma \times P\sigma)}$$

$$= uu - ud - du + dd \qquad \text{Q.E.D.} \ \blacksquare$$

< “$uu = dd = \frac{1+\rho}{4}$, $ud = du = \frac{1-\rho}{4}$”의 증명 >

한편 (c)에 의해 uu + du = ud + dd = uu + ud = du + dd = 1/2이다. 그러므로 uu + du = du + dd로부터 uu = dd가 되고, ud + dd = du + dd로부터 ud = du이다. 이제 uu = dd를 2(uu + dd) = ρ+1에 대입하면 uu = dd = (ρ + 1)/4가 되고 ud = du를 2(ud + du) = 1 - 에 대입하면 ud = du = (1 - ρ)/4가 된다. Q.E.D. ■

(제 Ⅳ장) 증명 : (DARA 함수의 경우)

Senior-Subordinate CMO의 각 트랜치의 효용은 다음과 같다.

$$EU(Senior) = \frac{1+\rho}{4}\ln[P(1+(1-\alpha)\sigma)] + \frac{1-\rho}{2}\ln[P] + \frac{1+\rho}{4}\ln[P(1-(1-\beta)\sigma)]$$

$$EU(Subordinate) = \frac{1+\rho}{4}\ln[P(1+(1+\alpha)\sigma] + \frac{1-\rho}{2}\ln[P] + \frac{1+\rho}{4}\ln[P(1-(1+\beta)\sigma)]$$

그러므로 두 트랜치의 효용의 합은

$$EU(CMO) = EU(Senior) + EU(Subordinate) = (1-\rho)\times\ln[P] + \frac{1+\rho}{4}$$
$$\times[\ln[P(1+(1-\alpha)\sigma] + \ln[P(1-(1-\beta)\sigma] + \ln[P(1+(1+\alpha)\sigma)] + \ln[P(1-(1+\beta)\sigma)]]$$

이를 α 혹은 β로 편미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial EU}{\partial\alpha} = \frac{1+\rho}{4}\cdot\left[\frac{-\sigma}{P(1+(1-\alpha)\sigma)} + \frac{\sigma}{P(1+(1+\alpha)\sigma)}\right] < 0$$

$$\frac{\partial EU}{\partial\beta} = \frac{1+\rho}{4}\cdot\left[\frac{\sigma}{P(1-(1-\beta)\sigma)} - \frac{\sigma}{P(1-(1+\beta)\sigma)}\right] < 0$$

CMO는 $\alpha = \beta = 0$일 때 pass-through와 같아지고 α 혹은 β 중 어느 하나라도 0보다 큰 값을 가질 때 진정한 의미의 CMO가 된다. 그런데 이 CMO의 기대 효용을 α 혹은 β로 편미분한 결과가 항상 0보다 작으므로 어떠한 $\{\alpha, \beta\}$ 조합으로 이루어지는 CMO의 기대 효용도 pass-through의 그것보다 작다. Q.E.D. ■

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT
Volume 24, Number 3, September 2007

Risks of Mortgage-Backed Securities and Their Pricing

Jin You*

〈abstract〉

We examine the methods to increase MBS values given parameters of default risks of individual mortgages and their correlation, and analyze the effects of these parameters on the efficiency of the methods. First, the values of MBS can be improved when they are comprised of low-correlation mortgages regardless of specific forms of investors' utility functions. Second, the values of MBS can also be raised even after their components mortgages are determined. More specifically, when investors' utilities are heterogeneous, CMO's of a less risky tranche and a riskier tranche are highly valued compared with pass-through securities of two identical tranches. When investors' utilities are homogeneous (risk averse), however, the latter meets the needs of investors better than the former does. Third, it can be shown that the efficiency of the methods in this paper is an increasing function of default risks of mortgage loans or of the correlation between them, and a decreasing function of the amount of the price fall of MBS when in default.

Keywords : Mortgage Loan, Mortgage-Backed Securities, Default Risk, Mortgage Pass-Through, Collateralized Mortgage Obligations, Security Design

* Chungnam National University, College of Management and Economcmics