IE Interfaces
Vol. 20, No. 2, pp. 94-102, June 2007.

대한산업공학회 제2차 석사논문경진대회 수상논문

SPC 차트를 이용한 포트폴리오 관리

김동섭 · 류홍서†

고려대학교 정보경영공학부

Portfolio Management Using Statistical Process Control Chart

Dong Sup Kim · Hong Seo Ryoo

Division of Information Management Engineering, Korea University, Seoul 136-713

Portfolio management deals with decision making on 'when' and 'how' to revise an existing portfolio. In this paper, we show that a classical statistical process control (SPC) chart for normal data, a well-established tool in quality engineering, can effectively be used for signaling times for revising a portfolio. Noting that the day-to-day performance of a portfolio may be auto-correlated, we use the exponentially weighted moving average center-line chart to develop an automatic portfolio management procedure.

The portfolio management procedure is extensively tested on historical data of equities traded in the Korea Exchange (KRX), the American Stock Exchange (AMEX), and the New York Stock Exchange (NYSE). In comparison with the performances of the KOSPI, XAX, and NYA indices during the same time periods, results from these experiments show that SPC chart-based portfolio revision presents itself a convenient and reliable method for optimally managing portfolios.

Keyword: portfolio revision, statistical process control chart, KRX, AMEX, NYSE

1. 서 론

포트폴리오 관리는 크게 '투자자의 투자 목표에 따라 위험 대비 수익을 최적으로 만족시키고자 포트폴리오를 어떻게 구성할 것인가?'에 관한 포트폴리오 선택의 문제와 '투자 상황의 변화에 따라 언제, 또는 어떻게 포트폴리오를 조정할 것인가?'에 관한 포트폴리오 수정의 문제로 나눌 수 있다. 특히, 오늘날 점점 더 복잡해지는 금융 환경 속에서 '자산을 언제 사고팔 것인가?'의 결정은 포트폴리오 수정의 중요한 문제로 대두하였다.

포트폴리오 수정(portfolio revision) 전략은 크게 포트폴리오 리밸런싱(portfolio rebalancing)과 포트폴리오 업그레이딩(portfolio upgrading)의 두 가지로 구분할 수 있다. 포트폴리오 리밸런싱은 초기에 설정한 포트폴리오 내의 이상적인 자산 계층(asset class) 또는 자산 간 목표 비율(target proportion)로부터 현재 시점의 자산 (계층) 간 비율이 벗어난 경우, 초기의 투자 정책에 맞게 현재의 자산 (계층) 간 비율을 재조정하는 전략이다. 기본적인 포트폴리오 리밸런싱 방법으로는 주기적 리밸런싱(periodic rebalancing)과 허용 범위 리밸런싱(tolerance band rebalancing)이 있다(e.g., Donohue and Yip, 2003; Masters, 2003). 주기적 리밸런싱은 투자자가 일정한 시간(예를 들면, 월, 분기, 또는 년) 간격으로 현재의 자산 계층의 구성 비율을 초기 투자 시에 설정한 목표 비율로 재조정한다. 이에 반해, 허용범위 리밸런싱은 임의의 자산 계층의 비율이 미리 결정된 허용 범위(예를 들면, 각 자산의 목표 비율로부터 임의로 결정된 ±5%, 혹은 ±10% 등의 편차)를 벗어날 때 포트폴리오 내 각 자산 계층의 비율을 초기 설정 목표 비율로 재조정한다.

포트폴리오 업그레이딩은 포트폴리오 내에 존재하는 하나의 자산 계층을 구성하는 자산 간에 적용되며, 새로운 상황의 전개로 기존 포트폴리오가 최적의 (위험 대비) 수익률을 만족

†연락저자 : 류홍서 교수, 136-713 서울시 성북구 안암동 5가 1번지 고려대학교 정보경영학부, Fax : 02-929-5888,
E-mail : hsryoo@korea.ac.kr
2006년 12월 접수, 3회 수정 후 2007년 05월 게재확정.

시켜 주지 못할 경우, 현재의 정보를 반영하여 최적의 포트폴리오가 되도록 자산을 재배분하는 수정 전략이다. 포트폴리오 업그레이딩의 가장 단순한 기법의 예로 Ryoo(2007)의 일정 시간(예를 들면, 월, 분기, 또는 년)마다 자산을 재구성하는 것을 들 수 있다.

일반적으로 포트폴리오 수정은 자산에 대한 추가적 매매가 요구되기 때문에 포트폴리오 수정 과정에서 투자자는 수수료나 세금 등과 같은 거래 비용(transaction cost)을 부담하게 되고, 경우에 따라서는 이러한 비용이 포트폴리오 수정에 따른 이득보다 더 커질 수도 있다. 따라서 투자자에게 '포트폴리오를 언제, 또는 어떻게 수정할 것인가'에 관한 것은 매우 중요한 의사결정의 문제이다.

포트폴리오 구성의 문제가 많은 관심을 끌어 온 것과는 대조적으로(Chen *et al*., 1971; Konno and Suzuki, 1992; Konno and Yamazaki, 1991; Markowitz, 1952; Mossin, 1968; Perold, 1984; Ryoo, 2007), 포트폴리오 수정, 특히, 포트폴리오 수정 시점을 결정하는 연구는 미비하였다. 더욱이, 이러한 연구는 포트폴리오 리밸런싱에 국한되어 있었으며, 포트폴리오 업그레이딩과 관련된 연구는 거의 진행되지 않았다. 먼저, Leland(1999)는 현재의 포트폴리오 내에 자산 계층 간의 비율이 목표 비율에서 벗어날 경우에 발생하는 준최적 비용(suboptimal cost)과 자산 계층 간의 비율을 목표 비율에 가깝도록 재조정할 경우에 발생하는 거래 비용을 최소로 하여 비거래 영역(no-trade region)을 정의하고, 2개의 자산으로 구성된 포트폴리오에 대해 포트폴리오 리밸런싱을 위한 문턱 비율(threshold proportion)을 설정하였다. Donohue and Yip(2003)는 Leland(1999)의 기법으로부터 비거래 영역의 모양과 크기의 특징을 분석하였고, 자산 계층의 개수를 7개로 확장하여 휴리스틱 포트폴리오 리밸런싱 전략과 성능을 비교하였다. 그러나 Leland(1999)와 Donohue and Yip(2003)의 기법은 복잡한 편미분 방정식을 포함하고 있어 자산 (계층)의 개수가 늘어남에 따라 기법 적용의 어려움이 급속히 증가하는 단점으로 인하여 매우 제한된 소수의 자산 (계층)을 포함한 포트폴리오 리밸런싱에만 적용이 가능하다는 문제점을 안고 있다. Sun *et al*.(2006)은 Leland(1999)와 Donohue and Yip(2003)의 기법에 내재한 계산적 어려움을 완화하기 위하여 거래 비용과 확실성 등가(certainty-equivalent)가 추가된 준최적 비용을 DP(dynamic programming)를 사용하여 최소화하는 기법을 제안하였다. 하지만, 이 기법도 자산 계층의 개수 증가에 따라 수반되는 계산적 어려움의 문제를 해결하지 못하였으며, 특히 구현이 쉽지 않다는 어려움도 지닌다. Masters(2003)는 위험의 측도로 자산 계층의 분산, 추가적 매매에 의한 거래 비용, 허용 범위 등을 고려하여 계산이 쉽고, 구현이 간편한 휴리스틱 포트폴리오 리밸런싱 전략을 제시하였는데, 이 전략은 투자자가 허용 범위를 사전에 결정해야 하는 또 다른 의사 결정의 문제를 안고 있다.

본 논문에서 관리가 어려운 많은 종류의 자산으로 구성된 분산 포트폴리오(diversified portfolio) 리밸런싱과 포트폴리오 업그레이딩에 모두 적용 가능한 포트폴리오 수정 시점 결정의 도구로써 산업 공학의 전통적 관리 기법의 하나인 SPC(Statistical Process Control) 차트(관리도)를 제안한다. 또한, 실제 상황에 맞추어 실제 포트폴리오 관리를 위하여 EWMA(Exponentially Weighted Moving Average) 중심선을 사용하는 SPC 차트 기반 포트폴리오 수정 절차를 수립하고, 이를 KRX(Korea Exchange), AMEX(American Stock Exchange), NYSE(New York Stock Exchange)에서 거래되었던 실제 주식 데이터에 적용하여 그 실용성과 우수성을 시험하였다. 이 실험에서 SPC 차트를 이용한 포트폴리오 수정 기법은 시장의 종류와 동향에 상관없이 KRX, AMEX, NYSE의 주가 지수 대비 우수한 수치 결과를 보였다. 이것은 본 논문에서 제안하는 SPC 차트 기반 포트폴리오 수정 기법의 실용성과 우수성을 증명하며, 더불어 산업공학 전통 관리 도구인 SPC 차트가 제조 산업이라는 기존의 제한적 적용 분야에서 탈피하여 금융 투자 의사 결정의 난제인 최적의 포트폴리오 관리 및 수정에 효율적인 새로운 대안으로 제안될 수 있다는 흥미로운 사실을 보여주는 것이다.

논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 SPC 차트를 개관하고 SPC 차트를 포트폴리오 관리에 적용하기 위한 이론적 근거를 설명한다. 이러한 이론적 근거를 바탕으로 포트폴리오 수정에 적용하기 위한 SPC 차트를 소개한다. 제3장에서는 SPC 포트폴리오 수정 절차를 제시하고, 실험 계획을 수립하고, 실험 결과를 비교한다. 끝으로 제4장에는 결론을 기술한다.

2. SPC 차트를 이용한 포트폴리오 관리

본 장에서는 SPC 차트를 포트폴리오 관리에 적용하기 위한 이론적 근거를 제시하고, 이를 바탕으로 실제적 포트폴리오 수정 시점을 알려 주는 도구로써 SPC 차트를 소개한다.

2.1 SPC 차트 개관

SPC 차트는 일반적으로 제조 산업에서 공정의 변화를 감지하기 위해 사용되는 도구로, 일련의 데이터에서 변화를 감지하는 가설 검정의 연속적 전략이다.

공정이 관리 상태(in control)에 있을 때, 시간 t에서 정규 분포를 따르는 크기가 n인 표본 $x_{it}(=x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{nt})$는 i.i.d.(independent and identically distributed)이고, 평균과 분산이 각각 μ와 σ^2로 알려져 있다. 여기에서 임의의 시간 t에서 표본 x_{it}의 평균 μ가 변화되었는지를 검정하기 위하여 다음과 같은 가설을 세울 수 있다.

H_0: μ가 이전과 동일하다.
(즉, 공정이 관리 상태에 있다.)
H_1: μ가 변했다.
(즉, 공정이 관리 상태를 벗어났다.)

이를 검정하고자 확률 표본을 바탕으로 시간 t 에서 x_{it}의 평균 x_t를 $\sum_{i=1}^{n} x_{it}/n$라 하면, $z_t(=\frac{x_t-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$를 계산하여 $|z_t|>z_{\alpha/2}$이면($z_{\alpha/2}$는 표준 정규 분포의 상위 $\alpha/2$ 지점), H_0을 기각하고 H_1을 채택한다. 이때, z_t의 값이 $\pm z_{\alpha/2}$ 사이에 있을 가능성이 $1-\alpha$로 기대된다. 따라서 표본 평균 x_t는 $1-\alpha$의 확률로 $\mu \pm z_{\alpha/2}$의 범위 내에 분포할 것이다. 이것으로부터 SPC 차트의 중심선(Center Line; CL), 관리 상한(Upper Control Limit; UCL), 관리 하한(Lower Control Limit; LCL)을 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned} UCL &= \mu + L\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ CL &= \mu \\ LCL &= \mu - L\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned} \tag{1}$$

요컨대, 표본 평균 x_t가 UCL과 LCL 사이에 존재할 때, '공정이 관리 상태에 있다'고 할 수 있으며, 그렇지 않을 때, '공정이 관리 상태에서 벗어났다'고 할 수 있다. 위 식 (1)에서 L은 $z_{\alpha/2}$로 표준 편차로 표현된 중심선으로부터 관리 한계까지의 거리이며, 통상 3-sigma 관리 한계를 채택하고 있어 L은 3으로 두게 된다. 만약 모집단의 평균과 분산을 모를 경우, μ와 σ는 추정하여 사용하게 된다.

SPC 차트 기법은 표본 추출 기법에서 기인한 것으로, 그로 말미암아 SPC 차트 내에 존재하는 일련의 표본 값 또는 통계치를 모으면 하나의 분포를 이루게 된다. 그러므로 SPC 차트 적용시, 의사 결정에 대한 제1 혹은 제2종 과오(type I or Ⅱ errors)를 줄이고 공정의 이상 현상(abnormality)을 조기에 감지하기 위한 통계적으로 비정상적 현상을 판단하는 몇 가지 규칙(rule)이 함께 적용된다. 이러한 규칙은 Western Electric(1958)에 의해 처음 제안되었으나, 본 논문에서는 Nelson(1984)에 의해 조합된 아래의 여섯 가지 상황을 현재 시점 t에서 표본 평균 x_t에 대한 이상 현상을 감지하기 위하여 사용한다.

상황 1. 3-sigma 관리한계선 밖으로 x_t가 벗어날 때
상황 2. 중심선의 어느 한쪽에 $x_{t-8}, x_{t-7}, \cdots, x_t$이 위치할 때
상황 3. $x_{t-5}, x_{t-4}, \cdots, x_t$이 연속하여 상승 또는 하강할 때
상황 4. $x_{t-13}, x_{t-12}, \cdots, x_t$이 연속적으로 상승과 하강을 교대로 반복할 때
상황 5. x_{t-2}, x_{t-1}, x_t 중 2개 이상의 표본이 2-sigma 한계선을 벗어날 때
상황 6. $x_{t-4}, x_{t-3}, \cdots, x_t$ 중 4개 이상의 표본이 1-sigma 한계선을 벗어날 때

2.2 SPC에 의한 포트폴리오 관리의 이론적 근거

n개의 자산으로 구성된 포트폴리오를 가정하자. 이때, 시간 t에서 자산 j의 가격을 p_{jt}라 하고, 그 추정량을 $\widehat{p_{jt}}$라 하면, 시간 t에서 자산 j 가격의 추적 오차(tracking error) 혹은 추정 오차(estimation error)

$$e_{jt} = p_{jt} - \widehat{p_{jt}}$$

는 시간 t에 관하여 특정 평균 μ_j와 분산 σ_j^2을 가지게 된다(여기에서 $\widehat{p_{jt}}$가 p_{jt}의 불편 추정량(unbiased estimator)인 경우 μ_j는 0). 이 경우, 시간 t에서 포트폴리오의 가치와 그 추정량은 각각

$$x_t := \sum_{j=1}^{n} y_j p_{jt}$$

와

$$\widehat{x_t} := \sum_{j=1}^{n} y_j \widehat{p_{jt}}$$

로 계산되며, 여기에서 y_j는 자산 j의 보유량을 나타낸다. 따라서 시간 t에서 포트폴리오 가치의 추적 오차는

$$e_t := x_t - \widehat{x_t} = \sum_{j=1}^{n} y_j p_{jt} - \sum_{j=1}^{n} y_j \widehat{p_{jt}} = \sum_{j=1}^{n} y_j e_{jt}$$

로 계산되며, e_t는 중심 극한 정리(the Central Limit Theorem)에 의하여 n이 큰 경우 e_{jt}의 분포와 상관없이 다음과 같이 근사적으로 정규 분포를 따르게 된다.

$$e_t\left(=\sum_{j=1}^{n} y_j e_{jt}\right) \overset{a}{\sim} N\left(\sum_{j=1}^{n} y_j \mu_j, \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \sigma_j^2\right) \tag{3}$$

따라서 포트폴리오 추적 오차의 정규 근사를 통하여 SPC 차트가 포트폴리오 관리에 적용될 수 있다는 것을 확인할 수 있으며, 실제적으로 본 논문에서 고려하는 포트폴리오는 많은 수의 자산으로 구성된 분산 포트폴리오(diversified portfolio)라는 점은 그 근거를 더욱더 뒷받침한다. 또한, 위의 식 (3)은 분산 포트폴리오 관리에 normal 데이터 관리를 위하여 개발된 SPC 차트 기법이 적용될 수 있다는 점을 보여주며, 이때, 포트폴리오를 관리를 위한 SPC 관리도는 시간 t에 관한 e_t의 평균 $\sum_{j=1}^{n} y_j \mu_j$와 분산 $\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \sigma_j^2$을 위의 식 (1)에 대입하여 구축할 수 있게 된다.

2.3 실제 포트폴리오 관리를 위한 SPC 차트

일반적으로 주식 가격(주가)의 변화를 표현하기 위한 확률 모형으로 Samuelson(1965)의 기하학적 브라운 운동(geometric Brownian motion)이 이용되고 있다(e.g., Black and Scholes, 1973). 그러나 주가의 변화에는 상기 모형으로 설명할 수 없는 다양한 이례 현상(anomalies)이 존재한다고 알려져 있고, short-term momentum(양의 자기 상관) 현상과 long-term reversal(음의 자기

상관) 현상은 그 대표적인 예가 된다(Daniel *et al.*, 1998; Fama and French, 1988). 그러나 위와는 반대로, 실제 주가에는 자기 상관이 존재하지 않는다는 점을 보여준 연구가 존재하고(e.g., Lo and MacKinlay, 1988), 본 논문에서 다루는 분산 포트폴리오 경우, 다양한 주식을 포함한 포트폴리오의 가치 변화가 중심 극한의 규칙을 반하고, 어떤 이론으로 설명이 가능한 특정 현상을 보여줄 수 있는 가능성은 매우 희박하다. 하지만, 일반적으로 주가에 존재하는 설명하기 어려운 데이터간의 자기 상관을 자동적으로 반영하여 '정상적인' 포트폴리오 가치변동에 민감하게 반응하는 제2종 과오를 줄이기 위해서는 auto-correlated 데이터 관리를 위하여 개발된 SPC 차트 기법을 적용할 수 있다(Montgomery, 2005). 이 중에서도 EWMA(Exponentially Weighted Moving Average) 중심선(Center-line; CL) 관리도는 EWMA를 이동하는 중심선으로 두고 최근 데이터에 비중을 크게 둔 smoothed variance를 바탕으로 그 폭을 자동으로 조정하는 관리 한계선(본 논문 3장의 <Figure 1>~<Figure 6>에서 동적으로 변하는 관리 한계선 참조)을 사용하는 기법으로, 자기 상관이 존재하는 데이터의 관리에 적합할 뿐만 아니라(Montgomery and Mastrangelo, 1991), 최근 동향에 더 민감한 EWMA 통계치가 일반 투자자의 통념을 잘 반영한다는 점에서 실제 포트폴리오 관리에 적합하다(Ryoo, 2007). 이런 연유로 인하여, 본 논문은 실제 포트폴리오 관리에 EWMA 중심선 관리도를 제안한다. 자기 상관이 존재하는 데이터의 관리를 위한 EWMA 중심선 관리도의 적합성은 Montgomery and Mastrangelo(1991)에 기술되어 있으며, 다음은 Montgomery and Mastrangelo(1991)의 EWMA 중심선 관리도를 포트폴리오 관리를 위해 변형한 것이다.

포트폴리오 가치 x_t를 추정하는 통계치를 한 시점 앞선 지시자(one-step ahead indicator), 즉, EWMA(z_{t-1})를 이용하면 시간 t에서 포트폴리오 가치의 추정량 $\hat{x_t}$은 다음과 같이 나타난다.

$$\hat{x_t} = z_{t-1} = \lambda x_{t-1} + (1-\lambda) z_{t-2}$$

위에서 λ는 0과 1 사이의 값을 갖는 평활 상수(smoothing constant)이며 주어진 데이터에 적합한 λ값은 추적 오차 e_t의 제곱의 합을 최소화하는 값을 계산하거나 실험을 통하여 결정할 수 있다(Montgomery, 2005). 이때, 추적 오차

$$e_t = x_t - \hat{x_t} = x_t - z_{t-1}$$

는 특정 평균과 편차를 가지게 되며, n이 큰 분산 포트폴리오의 경우 정규 분포를 따르게 된다($n=1$인 auto-correlated 데이터의 경우에도 e_t가 정규 분포를 따르는 다양한 경우가 존재하는데, 이 점에 관해서는 Montgomery and Mastrangelo(1991)를 참조). 이를 바탕으로 추적 오차 e_t에 대한 관리 한계는 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} & P[-L\sigma_e(t) \le e_t \le L\sigma_e(t)] \\ &= P[z_{t-1} - L\sigma_e(t) \le x_t \le z_{t-1} + L\sigma_e(t)] \\ &= 1-\alpha \end{aligned} \tag{4}$$

여기에서 L은 2.1절에서 언급된 바와 같이 통상 3으로 둔다. 그러므로 포트폴리오 가치 x_t의 평가 및 관리를 위한 시간 t에 대한 동적인 SPC 관리도는 위 식 (4)에 기반을 두어 다음과 같이 시간에 따라 동적으로 변동하는 EWMA CL과 smoothed variance를 이용한 UCL과 LCL를 계산하여 구축할 수 있으며

$$\begin{aligned} UCL_x(t) &= z_{t-1} + L\sigma_e(t-1) \\ CL_x(t) &= z_{t-1} \\ LCL_x(t) &= z_{t-1} - L\sigma_e(t-1) \end{aligned} \tag{5}$$

위의 식 (4)와 식 (5)에서 smoothed variance $\sigma_e(t)$는 다음과 같이 추정할 수 있다(Montgomery and Mastrangelo, 1991).

$$\hat{\sigma_e^2}(t) = \theta e_t^2 + (1-\theta)\sigma_e^2(t-1) \tag{6}$$

식 (6)에서 θ는 위의 EWMA(z_{t-1})를 이용한 $\hat{x_t}$ 계산에 사용된 λ와 마찬가지로 평활 상수이며, 통상 0과 1 사이의 크지 않은 값을 가진다.

3. 실 험

이 장에서는 SPC 포트폴리오 수정에 의한 실용성과 우수성을 시험하기 위한 실험 환경과 구체적 절차를 기술하고, 그 결과를 분석한다.

3.1 데이터 집합

실험을 위하여 우리는 KRX(Korea Exchange), AMEX(American Stock Exchange), NYSE(New York Stock Exchange)에서 거래된 실제 주식 정보를 이용하였다. <Table 1>에서 볼 수 있듯이, KRX 데이터는 2005년 1월부터 2006년 5월까지 유가 증권 시장에서 거래된 약 800개 주식의 352일간의 주가 정보를, AMEX 데이터는 2006년 1월부터 2006년 7월 19일까지 거래된 약 800개 주식의 137일간의 주가 정보를, 그리고 NYSE 데이터에는 2002년 1월부터 2002년 9월 20일까지 거래된 약 3500개 주식의 183일간의 주가 정보를 포함한다.

Table 1. Datasets Used for Experiments

Dataset	Number of Trading Days	Approximate Number of Stocks per Day	Time Period
KRX[1]	352	800	Jan, 05~May, 06
AMEX[2]	137	800	Jan, 06~Jul 19, 06
NYSE[3]	183	3500	Jan, 02~Sep 20, 02

[1]: from http://www.krx.co.kr
[2]: from http://www.amex.com
[3]: from http://apmoneywire.ap.org (no longer in existence)

3.2 포트폴리오 선택 모형

실제 포트폴리오를 구성하기 위한 포트폴리오 선택 모형으로 Markowitz(1952, 1991)의 전통적 MV(Mean-Variance) 모형을 개량한 Konno and Yamazaki(1991)의 MAD(Mean-Absolute Deviation) 모형을 사용하였다. 이는 MV 모형이 n개의 비선형 변수와 $\binom{n}{2}$개의 비선형 공분산 항을 포함한 2차 함수의 문제라는 점에서 NYSE와 같이 일일 거래되는 자산의 개수가 3500개 정도가 될 때, 현실적 시간 내에 문제의 해를 주지 못하기 때문이다. 반면, MAD 모형은 LP(Linear Programming) 기법으로 문제 해결이 가능하다는 장점이 있기 때문에 실시간으로 해를 얻을 수 있다. 더불어, 포트폴리오 구성은 MAD 모형 외에 다른 ad hoc 방법을 적용하여도 무관하다는 점을 언급한다.

우리는 MAD 모형의 적용에 있어 기존의 위험 최소화 모형을 수익률 최대화 모형으로 변형하였다. 이는 위험 측도의 상한을 설정함으로써 SPC 차트에서 관리 한계의 너비를 합리적으로 설계하여 빈번하게 또는 드물게 수정이 일어나는 것을 막을 수 있기 때문이다. 본 실험에서 사용한 MAD 모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{N} r_i w_i \\ \text{subject to} \quad & \sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{N}(r-r_i)w_i\right| \le \gamma \times T \\ & \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \\ & w_i \ge 0,\ i=1,\cdots,N \end{aligned} \tag{7}$$

식 (7)의 γ는 투자자가 허용하는 위험 한계(입력 매개 변수)이고, T는 포트폴리오를 구성하기 위하여 고려되는 기간의 길이(입력 매개 변수)로 양의 정수 값을 지닌다. 예를 들어, $T=30$이라 놓으면, 포트폴리오를 구성하여 위하여 현 시점(수정 시점)으로부터 지난 30일간의 주가 정보를 이용하게 된다. 여기에서 r_{it}는 시간 t에서 주식 i의 수익률로 $\frac{p_{it}-p_{iT}}{p_{iT}}$와 같이 계산되며, p_{it}는 시간 t에서 주식 i의 가격이므로 p_{iT}는 포트폴리오를 구성하는 시점에서 주식 i의 가격이 된다. r_i는 EWMA를 통한 r_{it}의 기댓값이고, w_i는 주식 i에 대한 보유 비율이다. 끝으로 N은 투자 가능한 주식의 총 개수이다. 참고로, 식 (7)의 비선형 함수는 표준 LP 기법에 의해 선형화될 수 있다(Chvátal, 1983).

3.3 SPC 차트를 이용한 포트폴리오 수정 절차 및 구현

우리는 SPC 차트를 이용하여 실제 투자 상황에서 포트폴리오를 수정하기 위한 절차를 포트폴리오 업그레이딩을 중심으로 다음과 같이 수립하였다. 먼저, 특정 시점으로부터 지난 T일간의 주식의 정보를 바탕으로 3.2절의 MAD 모형을 이용하여 포트폴리오를 구성한다. MAD 모형을 이용한 포트폴리오 구성에는 현 시점으로부터 지난 T일간 거래된 주가 정보를 이용하며, 충분히 '많은' 정보를 사용하기 위하여 T를 30으로 설정하여 현재 포트폴리오 수정 시점으로부터 지난 30일 내내 거래되었던 주식 정보를 고려하여 최적 포트폴리오를 (재)구성한다. 여기에서 실제 거래 상황을 반영하기 위하여 현재 시점 이후 미래의 주가 정보는 미지(unknown)로 간주하였다. 따라서 (재)구성된 미래의 포트폴리오 가치는 당일 거래되었던 주가 정보만을 이용하여 이루어졌다. 식 (7)에서 매개 변수 γ은 실험에서 다루는 주식 시장의 지난 T 기간, 즉 지난 30일의 평균 절대 편차(mean-absolute deviation)를 계산하여 사용하였다. MAD 모형에 의해 도출된 해를 바탕으로 포트폴리오에 포함된 주식의 지수 집합(index set)은

$$\begin{aligned} P &= \{i \mid w_i > 0 \ \text{ for } \ i=1,\cdots,N\} \\ &= \{1,\cdots,n\} \ \text{(without loss of generality)} \end{aligned}$$

로 표현되며, 위 2.3절에서 자산 i의 보유량 y_i는 포트폴리오 수정 당일의 투자액 F와 자산 i의 가격인 p_{iT}를 이용하여 아래와 같이 계산된다.

$$y_i = F \times \frac{w_i}{p_{iT}}$$

이렇게 계산된 y_i와 시간 t에서 주가 p_{it}를 이용하여 2.3절의 EWMA 중심선 관리도를 구축하여 포트폴리오 가치의 이상 동향을 관찰하게 되며, 이를 위한 단계는 제1국면(Phase Ⅰ)과 제2국면(Phase Ⅱ)으로 나눌 수 있다. 먼저, 제1국면은 현 시점으로부터 포트폴리오를 구성하기 위하여 사용된 지난 T 기간($t=1, 2, \cdots, T$)으로 정의하며, 그 이후의 시점($t=T+1, T+2, \cdots$)을 제2국면이라 칭한다. 제1국면은 EWMA 중심선 관리도 설계에 필요한 통계량을 얻는 과정으로, 여기에서 포트폴리오 가치의 추정량인 $\hat{x_t}$을 계산하기 위하여 λ는 간단히 0.2로 설정하였으며, $\hat{x_1}(=z_0)$는 $\sum_{i\in P} y_i p_{i1}$로 두었다. 이를 바탕으로 제2국면에서 $\hat{\sigma_e^2}$를 계산하기 위해 $\sigma_e^2(0)$는 $\sum_{i\in P}^{n} S_i^2$로 두었으며, θ는 0.2로 설정하였다. 또한 $\hat{x_t}$를 계산하여 위하여 $\hat{x_1}$는 $\sum_{i\in P} y_i p_{i0}$(제1국면의 $\sum_{i\in P} y_i\, p_{iT}$)로 두었으며, λ는 제1국면에서와 마찬가지로 0.2로 설정하였다. 더불어, σ_e를 바탕으로 관리 한계의 너비를 결정하기 위하여 L을 3으로 두어 3-sigma 관리 한계를 설정하였다. 시간 t에서 포트폴리오 가치를 x_t로 놓고, 기 설정된 3-sigma 관리 한계로부터 2.1절에서 제시된 여섯 가지 상황을 적용한다. 이는 일반적 투자자의 위험 회피 성향을 반영한 것으로 제1종 과오(type Ⅰ error)가 늘어나서 거래 비용을 보다 많이 부과하게 되더라도 포트폴리오의 이상 현상을 조기에 감지하여 투자자의 손실을 사전에 차단하고자 하는 의도이다. 시간 t에서 이상 신호가 발생하면, 시간 t를 포트폴리오 수정이 필요한 시점이라고 간주하고, 포트폴리오 재구성하

기 위하여 현재의 시점, 즉, 시간 t에서 포트폴리오 가치를 아래와 같이 재투자 금액 F로 갱신한다.

$$F \leftarrow \sum_{i \in P} y_i \, p_{it}$$

이렇게 갱신된 재투자 금액 F는 포트폴리오 재구성에 사용되며, 이러한 포트폴리오 수정 절차는 데이터가 끝나는 시점까지 연속적으로 반복되어 적용된다.

실제 주식 거래 시에는 거래량에 비례하여 거래 비용이 발생하게 되는데, 우리는 실험에서 거래 비용을 고려한 투자자의 수익을 계산하기 위하여 포트폴리오 수정 시 재투자 금액 F를 다음과 같이 추가적으로 계산하였다.

$$F \leftarrow (1-0.004) \times \sum_{i \in P} y_i \, p_{it}$$

위의 식은 재투자 금액을 포트폴리오가 재구성될 때마다 재구성 시점에서의 포트폴리오 가치(F)의 0.4%에 해당하는 거래 비용을 제외한 그 나머지로 정의하는 것으로, 이것은 2006년 11월 현재 HTS(Home Trading System)을 이용한 online 주식 거래 시 0.024% 이상의 매수 및 매도 수수료와 함께 0.3%의 매도 세금이 부과된다는 점을 반영한 것이다(e.g., http://www.etrade.co.kr/ae/aec_fee.html). 여기에서 우리는 매 포트폴리오 수정 시 100% 회전율(turnover rate)을 가정하였다는 점과 총 포트폴리오 가치의 0.4%를 거래 비용으로 책정하였다는 점에서 이러한 계산 방식에 의해 지불되는 거래 비용은 실제 투자 상황에서 투자자가 HTS를 통하여 지불하게 될 거래 비용보다 더 많다는 점을 언급한다.

앞서 언급한 바와 같이 본 논문에서 우리는 SPC 포트폴리오 수정 절차를 포트폴리오 업그레이딩을 중심으로 수립하였다. 그러나 SPC 포트폴리오 수정은 포트폴리오 업그레이딩에 한하여 제한적으로 적용 가능한 것이 아니라, 포트폴리오 가치의 이상 동향을 관찰하여 포트폴리오 리밸런싱 시점을 결정하는 전략에도 적용이 가능하다는 점을 언급한다.

SPC 포트폴리오 수정 절차는 Linux PC(Intel 2.66GHz processor, 512Mb memory)에서 Absoft의 ProFortran 7.0에 의해 구현되었고, 포트폴리오 선택 문제의 해는 ILOG의 CPLEX 9.0(ILOG CPLEX Division, 2003)의 LP solver에 의해 도출되었다.

3.4 실험 계획

실험에서 사용된 KRX 데이터는 주어진 기간(2005년 1월부터 2006년 5월까지)에 상승하는 장(bull market)의 추세를 따르며, AMEX 데이터는 주어진 기간(2006년 1월부터 2006년 7월 19일까지)에 소폭 상승하는 장의 추세를 따른다. 그리고 NYSE 데이터는 주어진 기간(2002년 1월부터 2002년 9월 20일까지)에 2001년 9월 11일 사건 이후 미국의 경제를 반영하는 하락하는 장(bear market)의 추세를 따른다. 우리는 기존의 데이터뿐만 아니라 더욱더 다양한 데이터에 SPC 포트폴리오 수정 절차를 시험하여 신뢰할만한 실험 결과를 제시하고자, 기존의 데이터로부터 시간축을 역으로 놓음으로써 기존의 주식 시장 동향과 반대로 움직이는 새로운 데이터(time reversal)를 생성하였다. 우리는 이를 KRX 데이터에 있어 KRX-r 데이터, AMEX 데이터에 있어 AMEX-r 데이터, NYSE의 데이터에 있어 NYSE-r 데이터라 부르기로 한다.

이 여섯 가지 데이터에 대하여 위 3.3절의 SPC 포트폴리오 수정 절차를 시험하였고, 그 우수성을 측정하기 위하여 실험에서 얻어진 결과(수익률)를 각 데이터가 얻어진 주식 시장의 주가 지수, 즉 KOSPI(Korea Composite Stock Price Index), XAX (AMEX Composite Index), NYA(NYSE Composite Index)와 비교하였다. 참고로, 주식 시장의 주가 지수는 시장에서 거래되는 모든 주식을 포함하는 하나의 거대한 분산 포트폴리오로 간주될 수 있으며, 금융 투자 기법의 우수성을 측정하는 벤치마크 포트폴리오로 널리 사용된다(e.g., Ryoo, 2007).

3.5 수치 결과

<Figure 1>~<Figure 6>과 <Table 2>, <Table 3>은 3.4절의 실험 결과를 정리한 것이다.

<Figure 1>~<Figure 6>은 SPC 포트폴리오 수정에 의한 포트폴리오 가치, 관리 상한, 관리 하한, 각 주식 시장의 주가 지수를 표준화한 수치(normalized value), 즉, 수익률(초기 투자액[주가 지수] 대비 시간 t에 따른 포트폴리오의 가치[주가 지수])을 도식화한 것으로, 이는 본 실험에서 얻어진 시간에 따른 포트폴리오 수익률 변동과 이에 따른 SPC 차트의 관리자로서의 기능을 상세히 보여준다. 여기에서 실선은 SPC 차트를 이용하여 관리된 포트폴리오의 수익률을, 2점 쇄선은 관리 상한 및 하한을, 점선은 각 주식 시장의 주가 지수를, '▪'은 포트폴리오의 수정 시점을 각각 나타낸다.

<Figure 1>, <Figure 3>, <Figure 6>는 주어진 기간에 상승 추세에 있는 주식 시장 데이터의 실험 결과를 제공한다. 이 결과에서 우리는 각 주식 시장에 대해 SPC 포트폴리오 수정에 의한 수익률이 주가 지수 수익률보다 우수하다는 점을 알 수 있다. <Figures 2>, <Figure 4>, <Figure 5>는 실험 대상 기간에 하락 추세에 있는 주식 시장 데이터의 실험 결과를 정리한 것으로, 상승장 데이터의 실험 결과처럼 각 주식 시장에 대해 SPC 포트폴리오 수정에 의한 수익률이 주가 지수의 수익률보다 우수하다는 점을 보여준다.

본 실험을 통하여 우리는 SPC 차트를 이용한 포트폴리오 관리가 주식 시장의 동향에 상관없이 각 주식 시장의 주가 지수보다도 일반적으로 더 우수하고 견고한 결과를 제시하여 준다는 점을 알 수 있다. 이것은 본 논문에서 제시하는 SPC 차트 기반 포트폴리오 관리 기법이 포트폴리오의 가치가 급격하게 하락하기 이전에 포트폴리오 수정 시점에 대한 조기 감지 능력(2.1절의 여섯 가지 이상 상황 참조)을 갖춘 점에 기인하는 것으로, 본 논문에서 제안하는 포트폴리오 관리 기법의 실용성과 함께 우수성 및 신뢰성을 잘 설명하여 준다.

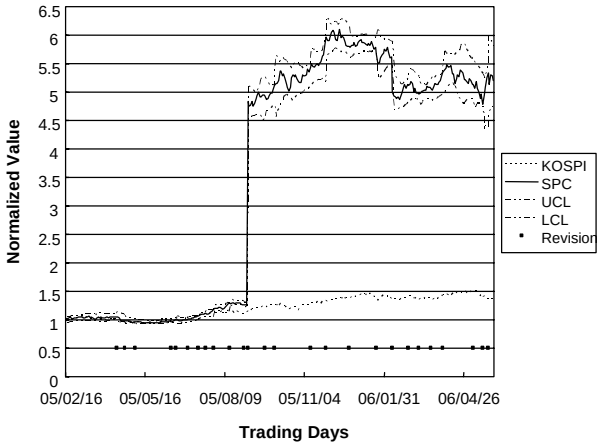


Figure 1. Comparison of Normalized KOSPI and Return from SPC Chart-based Portfolio Revision on KRX Data

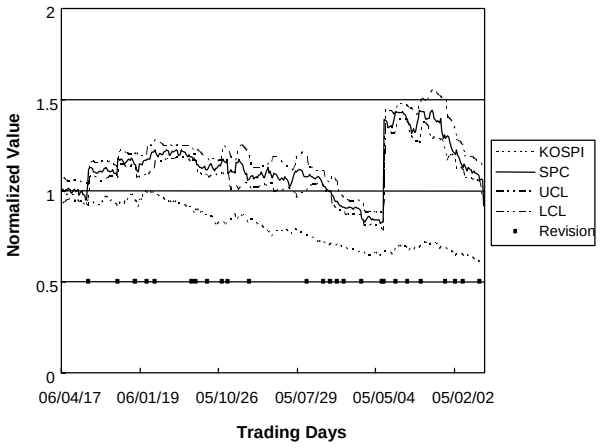


Figure 2. Comparison of Normalized KOSPI (in reverse order of time) and Return from SPC Chart-based Portfolio Revision on KRX-r Data

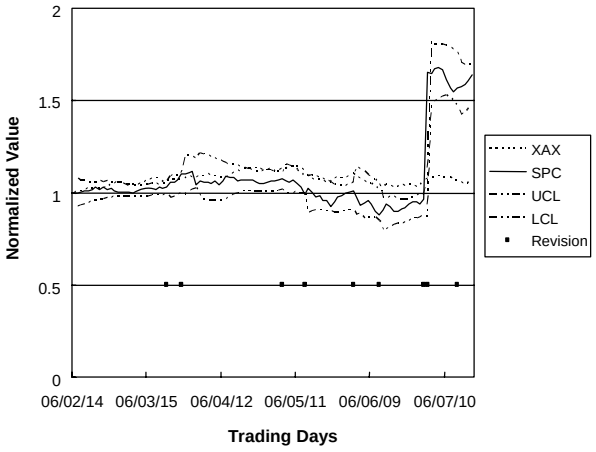


Figure 3. Comparison of Normalized XAX and Return from SPC Chart-based Portfolio Revision on AMEX Data

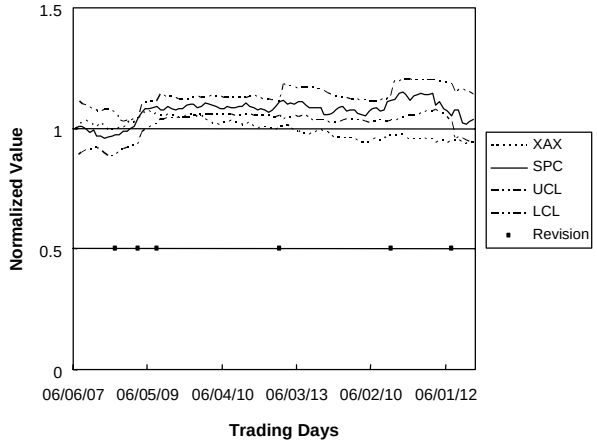


Figure 4. Comparison of Normalized XAX (in reverse order of time) and Return from SPC Chart-based Portfolio Revision on AMEX-r Data

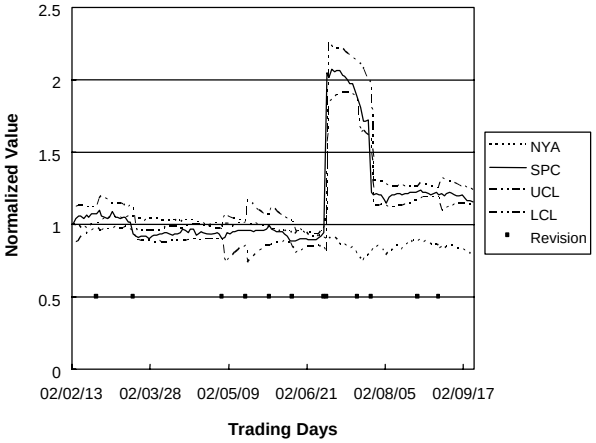


Figure 5. Comparison of Normalized NYA and Return from SPC Chart-based Portfolio Revision on NYSE Data

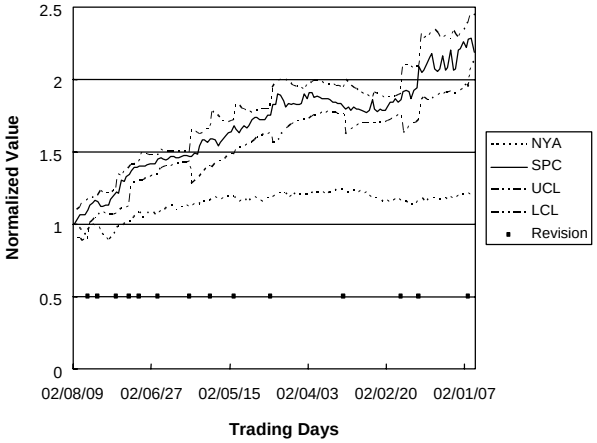


Figure 6. Comparison of Normalized NYA (in reverse order of time) and Return from SPC Chart-based Portfolio Revision on NYSE-r Data

<Table 2>는 본 실험의 수치 결과를 수익률에 대하여 정리한 것으로, 전체적으로 각 주식 시장에 대해 SPC 포트폴리오 수정에 의한 수익률이 주가 지수 수익률보다 우수하다는 점을 잘 보여준다.

<Table 2>에서 괄호 안의 수치는 거래 비용을 고려한 SPC 포트폴리오 수정에 의한 수익률을 나타낸다. 그러나 실제 HTS에서 같은 기간에 SPC 차트를 이용하여 포트폴리오를 관리하였다고 가정하면, 그 기간에 얻어진 실제 포트폴리오 수익률은 <Table 2>의 괄호 안에 표시된 수익률보다 더 높은 수익률을 보인다는 점을 다시 한 번 언급한다(3.3절 참조).

<Table 2>에서 거래 비용을 고려한 SPC 포트폴리오 수정에 의한 수익률과 각 주식 시장의 주가 지수 수익률의 비교를 통하여 우리는 SPC 차트 기반 포트폴리오 관리 기법의 실용성과 우수성을 재확인할 수 있다. 더불어, 거래 비용을 고려한 SPC 차트 기반 포트폴리오 수정의 시간에 따른 투자 수익률 변화는 <Figure 1>~<Figure 6>와 비슷하게 나타난다는 점을 언급한다.

Table 2. Rate of Return on Investment: Index vs. Portfolios Revised by EWMA CL SPC Chart

Dataset	Index*	SPC Chart-based Revision* (with 0.4% fixed trading cost)
KRX	136	519 (468)
KRX-r	63	92 (82)
AMEX	107	164 (158)
AMEX-r	93	104 (101)
NYSE	80	115 (110)
NYSE-r	120	219 (207)

*: expressed in percent of returns

Table 3. Number of Portfolio Revisions Made per Month (20 Trading Days)

Dataset	Frequency
KRX	1.61
KRX-r	1.61
AMEX	1.68
AMEX-r	1.12
NYSE	1.57
NYSE-r	1.83

<Table 3>은 각 데이터에서 한 달간의 SPC 포트폴리오 수정에 의한 평균 포트폴리오 수정 횟수를 나타낸 것이다. 전체적으로 각 데이터에서 단위 기간 당 2번 이내로 포트폴리오 수정이 일어났으며, 이러한 결과는 실제적으로 SPC 차트를 이용하여 포트폴리오를 관리할 때 과도한 이상 신호를 발생하여 투자자로 하여금 지나치게 주의를 기울이지 않게 할 뿐만 아니라, 너무 잦은 수정으로 거래 비용이 과다 발생하여 포트폴리오 수정에 의한 자산 관리의 효과가 상쇄되지 않는다는 사실을 <Table 2>를 통하여 확인할 수 있다. 이러한 결과는 포트폴리오 가치 변화의 비정상적 동향이 주식 시장의 종류나 추세에 상관없이 SPC 차트의 통계적 변화 인지 능력에 의해 합리적이고 자동적으로 감지되었기 때문으로 풀이된다.

4. 결 론

포트폴리오 수정은 '기존의 포트폴리오를 언제, 또는 어떻게 수정할 것인가?'에 관한 투자 의사 결정에 관한 문제이다. 본 논문에서 포트폴리오 수정 전략인 포트폴리오 리밸런싱과 포트폴리오 업그레이딩에 모두 적용 가능한 SPC 차트를 이용한 새로운 포트폴리오 관리 기법을 제안하고, 실제 상황에 적합한 EWMA 통계치를 이용한 동적 EWMA 중심선 관리도 기반 포트폴리오 수정 절차를 수립하였다. 또, 수립된 포트폴리오 수정 절차를 KRX, AMEX, NYSE에서 거래되는 실제 주식 데이터에 적용하여 SPC 차트 기법을 이용한 포트폴리오 관리의 실용성 및 우수성을 입증하였다. 더불어, 본 논문은 산업 공학의 전통적 관리 도구인 SPC 차트가 금융 공학의 난제 중 하나인 포트폴리오 수정 문제를 해결하는 좋은 대안으로 제시될 수 있다는 흥미로운 점을 보여주었다.

참고문헌

Black, F. and Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**(3), 637-654.

Chen, A. H. Y., Jen, F. C., and Zionts, S. (1971), The Optimal Portfolio Revision Policy, *Journal of Business*, **44**(1), 51-61.

Chvátal, V. (1983), *Linear Programming*, W. H. Freeman, New York.

Daniel, K., Hirshleifer D., and Subrahmanyam, A. (1998), Investor Psychology and Security Market Under- and Overreactions, *Journal of Finance*, **53**(6), 1839-1885.

Donohue, C. and Yip, K. (2003), Optimal Portfolio Rebalancing with Transaction Costs, *Journal of Portfolio Management*, **29**(4), 49-63.

Fama, E. F. and French, K. R. (1988), Permanent and Temporary Components of Stock Prices, *Journal of Political Economy*, **96**(2), 246-273.

ILOG CPLEX Division (2003), *ILOG CPLEX 9.0 User's Manual*, Incline, Nevada.

Konno, H. and Suzuki, K. (1992), A Fast Algorithm for Solving Large Scale Mean-Variance Models by Compact Factorization of Covariance Matrices, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **35**(1), 93-104.

Konno, H. and Yamazaki, H. (1991), Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market, *Management Science*, **37**(5), 519-531.

Leland, H. E. (1999), Optimal Portfolio Management with Transaction Costs and Capital Gains Taxes, Haas School of Business Technical Report, University of California at Berkeley.

Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. (1988), Stock Market Prices Do Not Follow

Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test, *The Review of Financial Studies*, 1(1), 41-66.

Markowitz, H. M. (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7(1), 77-91.

Markowitz, H. M. (1991), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, 2nd Edition, Basil Blackwell, Cambridge, Massachusetts.

Masters, S. J. (2003), Rebalancing, *Journal of Portfolio Management*, 29(3), 52-57.

Montgomery, D. C. (2005), *Introduction to Statistical Quality Control*, 5th Edition, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

Montgomery, D. C. and Mastrangelo, C. M. (1991), Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data, *Journal of Quality Technology*, 23(3), 179-193.

Mossin, J. (1968), Optimal Multiperiod Portfolio Policy, *Journal of Business*, 41(2), 215-229.

Nelson, L. S. (1984), The Shewhart Control Chart-Tests for Special Causes, *Journal of Quality Technology*, 16(4), 237-239.

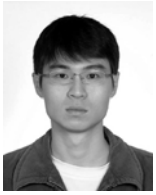
Perold, A. F. (1984), Large Scale Portfolio Optimization, *Management Science*, 30(10), 1143-1160.

Ryoo, H. S. (2007), A Compact Mean-Variance-Skewness Model for Large-Scale Portfolio Optimization and Its Application to the NYSE Market, *Journal of the Operational Research Society*, 58(4), 505-515.

Samuelson, P. A. (1965), Rational Theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Review*, 6(2), 13-32.

Sun, W., Fan, A., Chen, L.-W., Schouwenaars, T., and Albota, M.A. (2006) Optimal Rebalancing for Institutional Portfolios, *Journal of Portfolio Management*, 43(4), 33-43.

Western Electric (1958), *Statistical Quality Control Handbook*, 2nd Edition, American Telephone and Telegraph Company, Indianapolis, Indiana.



김 동 섭
경상대학교 산업공학 학사
고려대학교 산업공학 석사
현재: KSTEC 연구원
관심분야: 수리최적화, 금융공학, 생산계획

류 홍 서
캘리포니아 주립대학교 산업공학 학사
일리노이대학교 산업공학 석사
일리노이대학교 산업공학 박사
현재: 고려대학교 정보경영공학부 · 정보경영 전문대학원 부교수
관심분야: 수리최적화, 조합최적화, 바이오인포메틱스, 금융공학