

논문 2007-44SC-1-8

변수 불확실성 특이시스템의 비약성 강인 보장비용 제어

(Non-fragile robust guaranteed cost control for descriptor systems with parameter uncertainties)

김 종 해*

(Jong Hae Kim)

요 약

본 논문은 변수 불확실성과 제어기의 곱셈형 섭동을 가지는 특이시스템에 대한 비약성 강인 보장비용 제어기 설계 알고리즘을 제안한다. 제어기가 존재할 조건, 비약성 보장비용 제어기 설계 방법, 제어기에서의 비약성 척도와 보장비용 성능지수를 최소화하는 보장비용의 상한치(upper bound)를 선형행렬부등식 접근방법으로 제안한다. 또한, 특이치분해와 변수치환 및 슈어여수정리를 이용하여 구한 충분조건은 구하고자 하는 변수의 견지에서 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식으로 변형된다. 따라서, 제안한 비약성 강인 보장비용 제어기는 변수 불확실성과 제어기의 곱셈형 섭동을 가지는 페루프 특이시스템의 접근적 안정성과 보장비용 성능지수를 최소화하고 제어기의 섭동에 대해서도 안정성을 보장한다. 마지막으로, 수치예제를 통하여 제안한 알고리즘의 타당성을 검증한다.

Abstract

In this paper, we consider the non-fragile robust guaranteed cost state feedback controllers design method for descriptor systems with parameter uncertainties and static state feedback controller with multiplicative uncertainty. The sufficient condition of controller existence, the design method of non-fragile robust guaranteed cost controller, the measure of non-fragility in controller, the upper bound of guaranteed cost performance measure to minimize the guaranteed cost are presented via LMI(linear matrix inequality) technique. Also, the sufficient condition can be rewritten as LMI form in terms of transformed variables through singular value decomposition, some changes of variables, and Schur complements. Therefore, the obtained non-fragile robust guaranteed cost controller satisfies the asymptotic stability and minimizes the guaranteed cost for the closed loop descriptor systems with parameter uncertainties and controller fragility. Finally, a numerical example is given to illustrate the design method.

Keywords : Descriptor systems, non-fragile control, guaranteed cost control, linear matrix inequality

I. 서 론

상태공간 모델은 매우 유용하지만, 상태변수가 모든 물리적 의미를 포함하지는 못한다. 따라서 특이현상은 선형 동적시스템의 자연스러운 형태이고, 상태변수와 물리적 현상사이의 제약조건 등의 상태공간 모델이 해석하지 못하는 회로 시스템의 임펄스나 히스테리시스 등의 해석을 가능하게 한다^[1,2]. 특이시스템의 특징들로

인하여 대규모 시스템, 특이 섭동 이론(singular perturbation theory), 제약조건이 있는 기계적 시스템 등에 최근 많은 관심을 가져왔다. 또한, 상태공간 모델을 기초로 하는 제어이론에서 많은 기본적인 개념과 이론들이 특이시스템을 일반화시켜 왔다^[1-5].

뿐만 아니라 플랜트의 변수에 대하여 강인성(robustness)을 가지도록 설계하거나 하나의 성능지수를 최적화하도록 설계된 폐환시스템(feedback systems)은 매우 정확한 제어기의 구현이 요구된다. 일반적인 제어기 설계방법은 제어기가 정확하게 구현되어진다는 가정하에 이루어진다. 그러나 제어기의 구현문제는 안전한 제어기 이득 여유도를 가지도록 구현하는 공학자

* 정회원, 선문대학교 전자공학부

(Division of Electronic Eng., Sun Moon University)

접수일자: 2006년2월20일, 수정완료일: 2007년1월5일

에게 요구되는 조건과 더불어 A/D 또는 D/A 컨버터, 마무리오차(rounding-off error), 제한 워드 길이(finite word length) 등의 문제와 연관이 있다. 따라서 제작하는 제어기는 제어기의 이득변수에서 발생하는 불확실성에도 잘 견딜 수 있도록 설계해야 한다. 제어기의 약성(fragility)은 기본적으로 제어기를 구현할 때 시스템의 부정확성으로 인하여 폐환시스템의 성능저하를 유발하므로 최근 중요한 문제로 고려되고 있다. 또한, 정확한 제어기 구현이 가능하다 하더라도 현장에서는 제어기의 이득조정(gain tuning)이 필요하므로 제어기의 비약성(non-fragility)에 대한 연구가 필요하다.

Keel 등^[6]은 제어기가 정확히 구현되지 않으면 최종 제어기가 나쁜 안정성 여유(stability margin)를 가짐을 보였다. 그래서 최근 몇몇 연구자들은 비약성 제어기 설계 알고리즘을 개발해 왔다^[7-12]. Haddad 등^[7]은 자승적(quadratic) 리아푸노프 유계를 통한 비약성 제어기 설계방법을 제시하였다. 그리고 Famularo 등^[8]은 플랜트와 제어기에 변수 불확실성이 존재하는 선형시스템을 위한 LQ 정적 상태궤환 제어기 설계방법을 고려하였다. 그러나, Famularo 등^[8]은 직접적으로 비약성 척도(the measure of non-fragility)를 구한 것이 아니라 제어기를 찾기 이전에 미리 비약성 척도를 선정해야 하였다. 또한, 다루고 있는 시스템이 비특이(non-singular) 시스템에 국한되었다. 그리고 Dorato 등^[9]은 표시 한정기호 제거(symbolic quantifier elimination)방법을 이용하여 비약성 제어기를 설계하는 문제를 다루었다. 하지만 비약성 제어를 다루었던 대부분의 기존 결과들이 비정규(non-regular) 특이시스템을 다루었다.

Chang과 Peng^[13]의 연구결과 이래로 보장비용 제어 문제는 상당히 광범위하게 다루어져 왔다. 특히, Petersen 등^[14]이 2차 보장비용 제어의 개념을 소개한 이후에 다양한 제어기 설계방법에 대한 방법들^[14-17]이 소개되어졌다. 하지만, 특이시스템에 대한 보장비용 제어문제를 다루는 연구결과는 거의 미비한 상태이다. 더욱이 불확실성 특이시스템에 대하여 제어기 약성을 고려하는 비약성 강인 보장비용 제어기 설계방법은 없는 실정이다.

따라서 본 논문에서는 변수 불확실성을 가지는 특이시스템에 대하여 제어기 설계시에 발생하는 불확실성을 미리 고려하여 점근적 안정성과 보장비용 성능지수를 만족하는 비약성 강인 보장비용 제어기 설계 알고리즘 방법을 최적화가 가능한 선형행렬부등식 방법으로 제시한다. 또한, 비약성의 척도를 제시함으로써 제어기의 변동에 대한 성능을 예측가능하게 한다. 제어기가 존재할 조건

과 제어기 설계방법을 특이치 분해(singular value decomposition)방법, 슈어 여수(Schur complements)정리, 변수치환 등의 방법을 이용한다. 제안한 알고리즘은 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식으로 표현이 가능하므로 동시에 해를 구할 수 있다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. $(\cdot)^T$, $(\cdot)^{-1}$, $\deg(\cdot)$, $\det(\cdot)$ 및 $\text{rank}(\cdot)$ 는 (\cdot) 에 대한 전치(transpose), 역(inverse), 차수(degree), 행렬식(determinant), 계수(rank)를 나타낸다. 그리고, I , I_r 및 R^r 은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, $r \times r$ 차원을 가지는 단위행렬 및 $r \times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다. $*$ 는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이다.

II. 문제 설정

시변 변수 불확실성(time-varying parameter uncertainties)을 가지는 특이시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (1)$$

을 다룬다. 여기서, $x(t) \in R^n$ 는 상태, $u(t) \in R^m$ 는 제어입력, E 는 $\text{rank}(E) = r \leq n$ 을 만족하는 특이행렬, ΔA 와 ΔB 는 시스템 모델에서 실수 행렬 함수(real valued matrix functions)의 형태인 시변 변수 불확실성이고 모든 행렬은 적절한 차원(dimension)을 가진다. 변수 불확실성은 노름(norm)의 유계(bound)를 가지는

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= D_1 F_1(t) H_1 \\ \Delta B(t) &= D_2 F_2(t) H_2 \\ F_i(t)^T F_i(t) &\leq I, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (2)$$

의 형태를 만족하고, D_1 , D_2 , H_1 , H_2 는 알고 있는 상수 행렬(known constant real matrices)이고 $F_i(t)$ 는 식 (2)를 만족하는 모르는 행렬이다. 비록 설계할 제어기의 형태는

$$u(t) = Kx(t) \quad (3)$$

과 같을지라도 구현하는 제어기의 형태를 곱셈형 섭동(multiplicative uncertainty)을 가지는

$$u(t) = [I + \alpha\Phi(t)]Kx(t) \quad (4)$$

의 형태라고 가정한다. 여기서, K 는 제어기 이득(controller gain), α 는 양의 실수이고, $\alpha\Phi(t)K$ 는 제어

기 이득의 변동을 나타낸다. 그리고 $\Phi(t)$ 는 유계(bound)를 가지는

$$\Phi(t)^T \Phi(t) \leq I \quad (5)$$

와 같이 정의한다. 또한, α 는 제어기 이득의 변동에 대한 비약성 척도(the measurement of non-fragility)를 나타낸다. 변수 불확실성을 가지는 특이시스템 (1)과 실제 약성을 포함하는 제어기 (4)로 구성되는 페루프 특이시스템은

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) = & [A + B(I + \alpha\Phi(t))K + \Delta A(t) \\ & + \Delta B(t)(I + \alpha\Phi(t))K]x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

과 같이 주어진다. 또한, 보장비용 성능지수는

$$J = \int_0^\infty [x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)] dt \quad (7)$$

이다. 따라서 제어기를 설계하는 목적은 구현시 가지는 제어기 이득의 변동에도 불구하고 불확실성 페루프 특이시스템이 보장비용 성능지수 (7)을 최소화하고 제어기의 이득 변동을 반영하는 비약성 척도 α 의 변동 범위 내에서 점근적 안정성(asymptotic stability)을 보장하는 것이다. 특이시스템의 성질은 정의 1에서 정의한다.

정의 1^[1]. $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ 의 시스템에 대하여,

- (i) $\det(sE - A) \neq 0$ 이면 특이시스템은 정규적(regular)이고,
- (ii) $\text{rank}(E) = \text{deg} \det(sE - A)$ 이면, 특이시스템이 임펄스프리(impulse free)이기 위한 필요충분조건이고,
- (iii) 특이시스템이 가지는 모든 모드가 감소하면 시스템은 점근적으로 안정하다.

III. 비약성 강인 보장비용 제어기 설계

본 절에서는 비약성 강인 보장비용 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법에 대한 설계 알고리즘을 제시한다.

정리 1. 불확실성 페루프 특이시스템 (6)에 대하여, 행렬 부등식

$$E^T P = PE \geq 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & A^T P + P^T A + Q + K^T R K + K^T B^T P + P^T B K \\ & + \alpha \epsilon_1 K^T R R^T K + \alpha \left(\frac{1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1}{\epsilon_2} + \frac{\beta}{\epsilon_5} \right) K^T K \\ & + P^T (\alpha \epsilon_2 B B^T + \epsilon_3 D_1 D_1^T + \epsilon_4 D_2 D_2^T + \alpha \epsilon_5 D_2 D_2^T) P \\ & + \frac{1}{\epsilon_3} H_1^T H_1 + \frac{\beta}{\epsilon_4} I < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

를 만족하는 역행렬이 존재하는 P 와 제어기 이득 K 가 존재하면 식 (3)의 제어기는 제어기 이득의 변동과 변수 불확실성에도 불구하고 불확실성 특이시스템 (1)을 점근적으로 안정화하는 비약성 강인 보장비용 제어기이다. 여기서, Q 와 R 은 보장비용 함수 (7)의 성능을 위해 조절 가능한 양의 정부호(positive-definite) 행렬이고, α , ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 , ϵ_4 , ϵ_5 는 양의 실수이다. 여기서 몇 가지 변수들은

$$R < I, \quad \alpha < 1, \quad \beta = \|H_2^T H_2\| \quad (10)$$

으로 정의한다. 또한, 보장비용의 상한치는

$$J \leq x_0^T E^T P x_0 < \rho = J_g \quad (11)$$

가 된다.

증명: 식 (8)을 만족하는 적절한 리아푸노프(Lyapunov) 함수

$$V(x(t)) = x(t)^T E^T P x(t) \quad (12)$$

를 잡고, 불확실성 페루프시스템 (6)의 해에 따른 식 (12)의 시간에 대한 미분을 구하면

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T E^T P x(t) + x(t)^T P^T E \dot{x}(t) \quad (13)$$

과 같다. 식 (7)과 식 (13)의 관계로부터 식 (9)는

$$\begin{aligned} & x(t)^T [Q + K^T (I + \alpha\Phi(t))^T R (I + \alpha\Phi(t)) K] x(t) \\ & + \dot{V}(x(t)) < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

를 의미한다. 식 (14)를 정리하면

$$\begin{aligned} & x(t)^T Qx(t) + x(t)^T K^T R Kx(t) + 2\alpha x(t)^T K^T R \Phi(t) Kx(t) \\ & + \alpha^2 x(t)^T K^T \Phi(t)^T R \Phi(t) Kx(t) + x(t)^T A^T P x(t) \\ & + x(t)^T P^T A x(t) + x(t)^T K^T B^T P x(t) + x(t)^T P^T B Kx(t) \\ & + 2\alpha x(t)^T P^T B \Phi(t) Kx(t) + 2x(t)^T P^T D_1 F_1(t) H_1 x(t) \\ & + 2x(t)^T P^T D_2 F_2(t) H_2 x(t) \\ & + 2\alpha x(t)^T P^T D_2 F_2(t) H_2 \Phi(t) Kx(t) < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

와 같고, 아래의 수식전개 및 식 (5)와 식 (10)의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned}
& 2\alpha x(t)^T K^T R \Phi(t) K x(t) \\
& \leq \alpha \epsilon_1 x(t)^T K^T R R^T K x(t) + \frac{\alpha}{\epsilon_1} x(t)^T K^T K x(t) \\
& \alpha^2 x(t)^T K^T \Phi(t)^T R \Phi(t) K x(t) \leq \alpha x(t)^T K^T K x(t) \\
& 2\alpha x(t)^T P^T B \Phi(t) K x(t) \\
& \leq \alpha \epsilon_2 x(t)^T P^T B B^T P x(t) + \frac{\alpha}{\epsilon_2} x(t)^T K^T K x(t) \\
& 2x(t)^T P^T D_1 F_1(t) H_1 x(t) \\
& \leq \epsilon_3 x(t)^T P^T D_1 D_1^T P x(t) + \frac{1}{\epsilon_3} x(t)^T H_1^T H_1 x(t) \\
& 2x(t)^T P^T D_2 F_2(t) H_2 x(t) \\
& \leq \epsilon_4 x(t)^T P^T D_2 D_2^T P x(t) + \frac{1}{\epsilon_4} x(t)^T H_2^T H_2 x(t) \\
& \leq \epsilon_4 x(t)^T P^T D_2 D_2^T P x(t) + \frac{\beta}{\epsilon_4} x(t)^T x(t) \\
& 2\alpha x(t)^T P^T D_2 F_2(t) H_2 \Phi(t) K x(t) \\
& \leq \alpha \epsilon_5 x(t)^T P^T D_2 D_2^T P x(t) \\
& \quad + \frac{\alpha}{\epsilon_5} x(t)^T K^T \Phi(t)^T H_2^T H_2 \Phi(t) K x(t) \\
& \leq \alpha \epsilon_5 x(t)^T P^T D_2 D_2^T P x(t) + \frac{\alpha \beta}{\epsilon_5} x(t)^T K^T K x(t)
\end{aligned}$$

식 (9)를 얻을 수 있다. 또한, 보장비용의 성능지수의 계산을 위하여 식 (1)의 초기조건과 시간 0에서 시간 T_f 까지 식 (14)를 적분하면

$$J + x(T_f)^T E^T P x(T_f) - x_0^T E^T P x_0 < 0 \quad (16)$$

이 된다. 불확실성 페루프 특이시스템 (6)이 점근적으로 안정하면 식 (16)에서 T_f 가 무한대의 시간으로 감에 따라 $x(T_f)^T E^T P x(T_f)$ 의 항이 0으로 수렴하므로 식 (16)은 식 (11)이 된다. ■

정리 1은 구하고자 하는 변수의 건지에서 비선형성을 포함하는 요소가 존재하므로 구하고자 하는 변수의 측면에서 볼록최적화(convex optimization)가 불가능하고 식 (8)에서는 등호를 포함하고 있어서 해를 구하기가 쉽지 않다. 또한, 보장비용 함수의 최소화를 위한 선형행렬부등식으로 변형하여야 한다. 따라서, 적절한 분해와 전개를 통하여 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식의 형태로 비약성 강인 보장비용 제어가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 아래 정리 2에서 제시한다.

정리 2. 시변 불확실성 특이시스템 (1)에 대하여, 다음의 최적화 문제

minimize ρ subject to (17)

$$\begin{aligned}
& \text{i) } \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & X_1 & X_3^T & Y_1^T & \Gamma_4 & \Gamma_5 \\ * & \Gamma_3 & 0 & X_4 & Y_2^T & \Gamma_6 & \Gamma_7 \\ * & * & -Z_1 & -Z_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -Z_4 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma \Gamma_8 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \Gamma_9 \end{bmatrix} < 0 \\
& \text{ii) } \begin{bmatrix} -\rho I & x_{01}^T \\ * & -X_1 \end{bmatrix} < 0 \\
& \text{iii) } \gamma > 1
\end{aligned}$$

을 만족하는 양의 정부호(positive-definite) 행렬 X_1 , 역행렬이 존재하는 행렬 X_4 , 행렬 X_3 , Y_1 , Y_2 및 양의 실수 γ , ρ 가 존재하면, 아래의 형태

$$K = YP = [Y_1 P_1 + Y_2 P_3 \quad Y_2 P_4] \quad (18)$$

로 표현되는 제어이득은 변수 불확실성과 제어기 이득의 변화에도 불구하고 페루프 특이시스템의 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성 및 보장비용 성능지수를 최소화하는 비약성 강인 보제어기 이득이다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= A_1 X_1 + X_1 A_1^T + Y_1^T B_1^T + B_1 Y_1 + \epsilon_3 D_{11} D_{11}^T \\
\Gamma_2 &= X_3^T A_4^T + Y_1^T B_2^T + B_1 Y_2 + \epsilon_3 D_{11} D_{12}^T + \epsilon_4 D_{21} D_{22}^T \\
\Gamma_3 &= A_4 X_4 + X_4 A_4^T + Y_2^T B_2^T + B_2 Y_2 \\
&\quad + \epsilon_3 D_{12} D_{12}^T + \epsilon_4 D_{22} D_{22}^T \\
\Gamma_4 &= [Y_1^T B_1 \quad D_{21}] \\
\Gamma_5 &= [X_1^T H_{11}^T + X_3^T H_{12}^T \quad \sqrt{\beta} X_1 \quad \sqrt{\beta} X_3^T] \\
\Gamma_6 &= [Y_2^T B_2 \quad D_{22}] \\
\Gamma_7 &= [X_4 \quad H_{12}^T \quad 0 \quad \sqrt{\beta} X_4] \\
\Gamma_8 &= \begin{bmatrix} \epsilon_1 R R^T + (\frac{1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1}{\epsilon_2} + \frac{\beta}{\epsilon_5}) I & 0 & 0 \\ * & \frac{1}{\epsilon_2} I & 0 \\ * & * & \frac{1}{\epsilon_5} I \end{bmatrix} \\
\Gamma_9 &= \begin{bmatrix} -\epsilon_3 I & 0 & 0 \\ * & -\epsilon_4 I & 0 \\ * & * & -\epsilon_4 I \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$P_1 = X_1^{-1}, \quad P_4 = X_4^{-1}, \quad P_3 = -P_4 X_3 P_1$$

$$\gamma = \frac{1}{\alpha}$$

$$Q^{-1} = Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ * & Z_4 \end{bmatrix}$$

으로 정의한다.

증명: 슈어 여수정리와 변수치환, $X = P^{-1}$, $Y = KP^{-1} = KX$,을 이용하면 식 (9)는

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 X^T & Y^T & \Pi_2 & \Pi_3 \\ * & -Z & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -R^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma \Pi_4 & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_5 \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

로 변형된다. 여기서, 변수는

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= AX + X^T A^T + Y^T B^T + BY + \epsilon_3 D_1 D_1^T + \epsilon_4 D_2 D_2^T \\ \Pi_2 &= [Y^T \quad B \quad D_2] \\ \Pi_3 &= [X^T H_1^T \quad \sqrt{\beta} X^T] \\ \Pi_4 &= \begin{bmatrix} \epsilon_1 R R^T + (\frac{1}{\epsilon_1} + 1 + \frac{1}{\epsilon_2} + \frac{\beta}{\epsilon_5}) I & 0 & 0 \\ * & \frac{1}{\epsilon_2} I & 0 \\ * & * & \frac{1}{\epsilon_5} I \end{bmatrix} \\ \Pi_5 &= \begin{bmatrix} -\epsilon_3 I & 0 \\ * & -\epsilon_4 I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

와 같다. 식 (8)에서 등호를 없애고 구하려는 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식을 만들기 위하여 일반성을 상실함 없이(without loss of generality)

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \\ \Delta A(t) &= D_1 F_1(t) H_1 = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \end{bmatrix} F_1(t) [H_{11} \quad H_{12}] \quad (20) \\ \Delta B(t) &= D_2 F_2(t) H_2 = \begin{bmatrix} D_{21} \\ D_{22} \end{bmatrix} F_2(t) H_2 \end{aligned}$$

과 같은 특이치분해(singular value decomposition)^[1]를 사용한다. 또한 식 (8)의 조건을 만족하기 위하여

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

로 두고, 구하려는 해를

$$Y = [Y_1 \quad Y_2], \quad X = P^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

와 같이 정의한다. 식 (20)과 (21) 및 (22)를 식 (19)에 대입하면 모든 변수의 견지에서 블록최적화가 가능한 식 (17)의 첫 번째 선형행렬부등식을 얻을 수 있다. 상태의

초기조건을 적절한 차원을 가지는

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} \quad (23)$$

로 두고, 식 (20)과 (21) 및 식 (23)을 식 (11)에 대입하면 식 (17)의 두 번째 선형행렬부등식이 된다. 식 (17)의 세 번째 선형행렬부등식은 식 (11)과 $\gamma = 1/\alpha$ 의 관계로부터 얻을 수 있다. ■

참조 1. $E = I$ 인 경우, 비특이시스템에 대한 비약성 강인 보장비용 제어기 문제가 식 (19)의 선형행렬부등식으로부터 얻을 수 있다. 따라서 제안한 제어기 설계 알고리즘은 특이시스템에 대한 문제 뿐만 아니라 상태공간 문제를 다루는 비특이시스템의 비약성 강인 보장비용 제어 문제까지도 해결하는 일반적인 알고리즘이다.

참조 2. 식 (17)은 구하려는 변수 $X_1, X_3, X_4, Y_1, Y_2, \rho, \gamma$ 의 견지에서 블록최적화가 가능한 선형행렬부등식이므로 MATLAB의 LMI 도구상자^[18]로부터 한번에 모든 해를 구할 수 있다. 또한, 비약성 척도는 변수치환의 관계로부터 $\alpha = 1/\gamma$ 로 계산할 수 있고, 보장비용의 상한치 ρ 는 식 (17)의 선형행렬부등식으로부터 직접 구할 수 있다.

참조 3. 강인성과 비약성 및 보장비용 성능지수의 최소화 성능을 동시에 만족하기 위한 최적화문제는 최소의 ρ 와 최대의 α 값을 계산하여야 한다. 따라서 비약성과 보장비용의 문제사이에는 상호절충(trade-off)의 관계가 다소 존재함을 알 수 있다. 하지만 본 논문에서는 보장비용 함수의 최소화에 중점을 두고 제어기의 약성에 얼마나 견딜 수 있는지에 대한 비약성 척도를 계산할 수 있다. 또한, 실제 시스템의 적용시에는 비특이시스템의 LQ 제어에서처럼 $Q, R, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$ 의 값을 적절히 조절함으로써 원하는 성능을 구할 수 있다.

IV. 예 제

본 절에서는 제안한 비약성 강인 보장비용 제어기 설계 알고리즘의 타당성을 확인하기 위하여 수치예제를 보인다. 변수 불확실성을 가지는 특이시스템

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} F_1(t) [0.1 \ 0.1 \ 0.1] \right\} x(t) \\ &+ \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} F_2(t) 0.1 \right\} u(t) \end{aligned} \quad (24)$$

를 다룬다. 보장비용 함수의 성능을 결정하는 몇 가지 변수들의 값을 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 0.1$, $R = 0.1$, $Q = I$ 로 잡고 상태의 초기조건이 $x_0 = [2 \ -1 \ 0]^T$ 라고 두면 정리 2로부터 구하고자 하는 모든 해는 LMI 도구상자^[18]의 'mincx'로부터

$$X = \begin{bmatrix} 2.1819 & -1.0756 & 0 \\ -1.0756 & 0.5724 & 0 \\ -0.9723 & -0.6917 & -1.6275 \end{bmatrix}$$

$$Y = [-18.7480 \ -17.1697 \ -17.8316]$$

$$P = \begin{bmatrix} 6.2132 & 11.6743 & 0 \\ 11.6743 & 23.6825 & 0 \\ -8.6738 & -17.0402 & -0.6145 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\rho = 1.8740$$

$$\gamma = 4.9348$$

와 같이 구할 수 있다. 또한, 비약성 척도와 보장비용 상한치는 참조 2의 설명에서와 같이

$$\alpha = \frac{1}{\gamma} = 0.2026 \quad (26)$$

$$J_g = \rho = 1.8740$$

으로 구해진다. 여기서, 비약성 척도인 α 의 의미는 제어기 이득의 20.26%까지 변화여도 페루프 특이시스템의 점근적 안정성과 보장비용 성능지수의 한계를 보장한다는 것이다. 또한, 구한 보장비용의 상한치 ($\rho = 1.8740$)가 $x_0^T E^T P x_0 = 1.8380$ 보다 큰 값이므로 식 (11)을 만족함을 알 수 있다. 따라서, 비약성 강인 보장비용 제어기는 식 (18)로부터

$$K = [-162.2610 \ -321.6366 \ 10.9567] \quad (27)$$

로 구해진다. 컴퓨터 모의실험을 위하여 변수불확실성과 제어기 이득의 변화를 고려하는 불확실성을

$$F_1(t) = F_2(t) = \sin t, \quad \Phi(t) = \cos t \quad (28)$$

으로 잡으면, 그림 1~3에서처럼 시간이 흘러감에 따라 상태가 영으로 수렴하기 때문에 구한 비약성 강인 보장비용 제어기는 변수불확실성과 제어기의 곱셈형 섭동에도 불구하고 점근적 안정과 비약성을 보장함을 알 수 있다. 정리 2에서는 보장비용 함수의 상한치인 ρ 의 최소화를 위한 최적화문제이므로 다른 변수들의 값을 조절하기 위하여 적절히 최적화문제를 변경가능하다. 물론 비약성 척도 α 와 성능지수인 ρ 사이의 관계는 어느 정도 상호절충 관계에 있다. ρ 는 작을수록 보장비용 함수를 최소화하고, α 는 값이 클수록 제어기의 이득 변화에 둔감한(insensitive) 비약성 제어기를 설계할 수 있

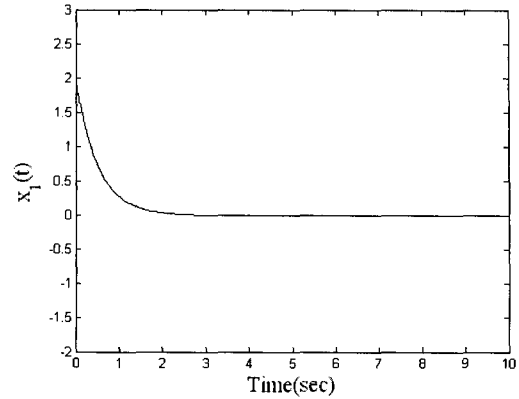


그림 1. $x_1(t)$ 의 궤적

Fig. 1. The trajectory of $x_1(t)$.

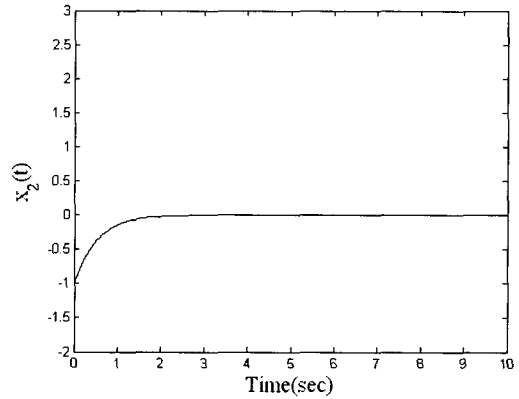


그림 2. $x_2(t)$ 의 궤적

Fig. 2. The trajectory of $x_2(t)$.

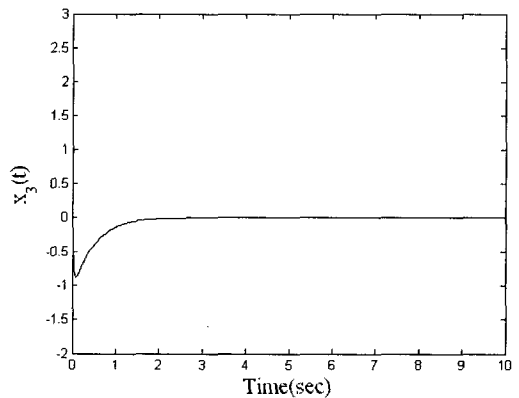


그림 3. $x_3(t)$ 의 궤적

Fig. 3. The trajectory of $x_3(t)$.

다. 따라서 실제시스템에서는 두 값을 잘 선택하여서 성능을 만족하도록 하여야 한다.

V. 결 론

본 논문에서는 제어기에 곱셈형 섭동과 시스템 행렬에 변수 불확실성을 가지는 특이시스템 대한 비약성 강인 보장비용 제어기 알고리즘을 제시한다. 비약성 강인 보장비용 제어기가 존재할 조건, 제어기 설계방법, 제어기에서의 비약성 척도와 보장비용 성능지수를 최소화하는 상한치를 선형행렬부등식으로 표현하기 위하여 특이치분해, 슈어 여수정리, 변수치환 방법을 사용하였다. 또한, 비약성 척도를 계산하므로 제어기 이득의 변화에 대한 불확실성 특이시스템의 성능보장 범위를 직접 계산할 수 있다. 뿐만 아니라 보장비용 함수의 성능지수 상한치를 직접 계산하는 해석적인 제어기 설계 알고리즘을 제시하였다. 마지막으로 수치 예제를 통하여 제안한 방법을 검증하였다.

참 고 문 헌

- [1] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, " H_∞ control for descriptor systems: A matrix Inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.
- [2] H. S. Wang, C. F. Yung, and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 145, pp. 316-322, 1998.
- [3] D. J. Bender and A. J. Laub, "The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 32, pp. 672-688, 1987.
- [4] J. D. Cobb, "Controllability, observability, and duality in singular systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 29, pp. 1076-1082, 1984.
- [5] F. L. Lewis, "Preliminary notes on optimal control for singular systems," *Proc. of Conf. on Decision and Control*, pp. 262-272, 1985.
- [6] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya, "Robust, fragile, or optimal," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1098-1105, 1997.
- [7] W. M. Haddad and J. R. Corrado, "Resilient dynamic controller design via quadratic Lyapunov bounds," *Proc. of Conf. on Decision and Control*, pp. 2678-2683, 1997.
- [8] D. Famularo, C. T. Abdallah, A. Jadbabaie, P. Dorato, "Robust non-fragile LQ controllers: The static state feedback case," *Proc. of American Control Conference*, pp. 1109-1113, 1998.
- [9] P. Dorato, "Non-fragile controller design: An overview," *Proc. of American Control Conference*, pp. 2829-2831, 1998.
- [10] A. Jadbabie, C. T. Abdallah, D. Famularo, and P. Dorato, "Robust non-fragile and optimal controller design via linear matrix inequalities," *Proc. of American Control Conference*, pp. 2842-2846, 1998.
- [11] P. Dorato, C. T. Abdallah, and D. Famularo, "On the design of non-fragile compensators via symbolic quantifier elimination," *World Automation Congress*, pp. 9-14, 1998.
- [12] J. H. Kim, S. K. Lee, and H. B. Park, "Robust and non-fragile H_∞ control of parameter uncertain time-varying delay systems," *SICE in Morioka*, pp. 927-932, 1999.
- [13] S. S. L. Chang and T. K. C. Peng, "Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 17, no. 4, pp. 474-483, 1972.
- [14] I. R. Petersen, "Guaranteed cost LQG control of uncertain linear systems," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 142, no. 2, pp. 95-102, 1995.
- [15] L. Yu and J. Chu, "An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems," *Automatica*, vol. 35, no. 6, pp. 1155-1159, 1999.
- [16] L. Yu, G. Chen, and M. Yang, "Optimal guaranteed cost control of linear uncertain systems: LMI approach," *Proc. of IFAC World Congress*, pp. 541-546, 1999.
- [17] A. Fishman, J. M. Dion, L. Dugard, and A. T. Neto, "A linear matrix inequality approach for guaranteed cost control," *Proc. of IFAC World Congress*, pp. 197-202, 1996.
- [18] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.

 저 자 소 개



김 종 해(정회원)

1993년 경북대학교 전자공학과 졸업.

1995년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학석사.

1998년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학박사.

1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원.

2000년~2001년 일본 오사카대학 컴퓨터제어기계공학과 객원연구원.

2002년~현재 선문대학교 전자공학부 조교수

<주관심분야 : 강인제어, 시간지연 시스템 해석 및 제어기 설계, 특이시스템 해석 및 설계, 산업응용제어, 비약성(non-fragile) 및 신뢰(reliable) 제어 등.>