

< 논문 >

## 축소된 유한요소모델을 이용한 하드디스크 구동부의 고유치 및 주파수응답 해석

한 정 삼\*

(2006년 8월 21일 접수, 2007년 3월 9일 심사완료)

### Eigenvalue and Frequency Response Analyses of a Hard Disk Drive Actuator Using Reduced Finite Element Models

Jeong Sam Han

**Key Words :** Model Order Reduction(모델차수축소법), Moment-Matching Method(모멘트 일치법), Krylov Subspace(크리로프 부공간), Arnoldi Process(아놀디 과정), Eigenvalue Problem(고유치 문제), Frequency Response(주파수 응답), HDD(하드디스크 드라이브)

#### Abstract

In the case of control for mechanical systems, it is highly useful to be able to provide a compact model of the mechanical system to control engineers using the smallest number of state variables, while still providing an accurate model. The reduced mechanical model can then be inserted into the complete system models and used for extended system-level dynamic simulation. In this paper, moment-matching based model order reductions (MOR) using Krylov subspaces, which reduce the number of degrees of freedom of an original finite element model via the Arnoldi process, are presented to study the eigenvalue and frequency response problems of a HDD actuator and suspension system.

#### 1. 서 론

유한요소법은 공학시스템의 설계 및 해석시 시스템의 동역학 특성을 얻기 위하여 널리 이용되는 방법의 하나이다. 공학시스템에 따라서는 그 복잡성으로 인하여 수만~수십만의 큰 자유도를 갖는 대형 유한요소모델이 요구되어 해석에 대규모 전산자원과 장시간의 연산시간을 필요로 하게 된다. 따라서 이 경우, 시스템의 유한요소모델에 대하여 초기 시스템의 응답 특성을 충분히 정확하게 나타내면서도 작은 크기의 축소모델로 표현할 수 있다면, 이 축소모델은 기계와 제어 부분을 동시에 고려하는 전체 시스템 수준의 설계 및 해석에 이용되어 전체 시스템의 동역학 특성을 규명하는데 효과적으로 활용될 수 있다. 이렇듯 전체 시스템 수

준에 대한 효율적인 해석을 위하여 초기 대형 유한요소모델의 차수를 축소하는 축소모델링(reduced modeling)에 대한 연구는 기계 구조물의 진동해석,<sup>(1,2)</sup> 회로해석,<sup>(3)</sup> 미소기전시스템(MEMS)의 동해석,<sup>(4,5)</sup> 열해석<sup>(6,7)</sup> 문제 등에 널리 이용되고 있다.

본 논문에서는 현재 널리 연구되는 모델차수축소법(model order reduction)<sup>(8)</sup>의 한 방법으로 모멘트 일치법(moment-matching method)<sup>(9)</sup>과 이에 근거한 크리로프 부공간(Krylov subspace)을 이용하는 모델차수축소법<sup>(9,10)</sup>에 대하여 설명한다. 또한, 아놀디 과정(Arnoldi process)<sup>(3)</sup>으로 축소모델링에 요구되는 크리로프 부공간의 기저(basis)를 생성하는 C++ 프로그램인 mor4fem<sup>(11)</sup>을 이용하여 하드디스크 드라이브용 구동부<sup>(12)</sup>의 고유진동수 및 주파수응답 특성을 파악하고자 한다. 끝으로 초기 유한요소모델과 축소모델 사이에 발생하는 해석 결과의 오차를 축소모델의 차수에 따라서 비교함으로써, 공학적 관점에서 축소모델의 차수를 자동적으로 결정할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

\* 회원, 안동대학교 기계공학부

E-mail : jshan@andong.ac.kr

TEL : (054)820-6218 FAX : (054)820-5167

2. 이차 시스템의 모델차수축소법

일반적으로 다중입출력 시스템의 운동방정식을 유한요소해석의 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.<sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}^T\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서,  $t$ 는 시간변수,  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^N$ 은 상태변수벡터,  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$ 은 입력벡터, 그리고  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^p$ 는 출력벡터를 의미한다. 상태변수벡터  $\mathbf{x}(t)$ 의 자유도는  $N$ , 입력벡터와 출력벡터의 크기는 각각  $m$ 과  $p$ 이다. 행렬  $M, C, K \in \mathcal{R}^{N \times N}$ 는 각각 이차 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬이다. 행렬  $B \in \mathcal{R}^{N \times m}$ 와  $L \in \mathcal{R}^{N \times p}$ 은 각각 하중이 작용하는 위치와 크기를 나타내는 하중분배행렬과 선택한 위치의 응답을 보기 위한 출력측정행렬을 의미한다. 과도응답 해석에서 각 하중의 시간에 따른 입력 변화는  $\mathbf{u}(t)$ 로 표현된다. 다양한 공학 문제에서  $m$ 과  $p$ 는  $N$ 보다 훨씬 작은 경우가 대부분이다.

모델차수축소법의 기본 개념은 아래 식 (2)의 관계를 만족하는 변환행렬  $V \in \mathcal{R}^{N \times n}$ 을 통하여 초기 시스템의 큰 자유도의 상태변수벡터  $\mathbf{x}(t)$ 의 응답을 작은 자유도로 구성된 축소시스템의 상태변수벡터  $\mathbf{z}(t)$ 로 근사화하는 것이다.

$$\mathbf{x}(t) \cong V\mathbf{z}(t) \quad \text{where } \mathbf{z}(t) \in \mathcal{R}^n, n \ll N \quad (2)$$

따라서, 먼저 변환행렬  $V$ 를 구한 후에 식 (1)의 이차 시스템을 식 (2)처럼  $V$ 에 투영(projection)시키고, 다시 이 식의 양변에  $V$ 의 전치행렬을 곱하면 다음과 같이 식 (1)과 동일한 형태를 지닌 이차 축소시스템을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_r\ddot{\mathbf{z}}(t) + C_r\dot{\mathbf{z}}(t) + K_r\mathbf{z}(t) &= B_r\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= L_r^T\mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 축소행렬은  $M_r = V^T M V$ ,  $C_r = V^T C V$ ,  $K_r = V^T K V$ ,  $B_r = V^T B$  및  $L_r = V^T L$ 로 각각 표현된다. 따라서, 모델차수축소법은 어떻게 변환행렬  $V$ 를 구하는가 하는 문제로 귀결된다. 축소모델의 자유도는  $n \ll N$ 이고, 축소모델에서 입력벡터  $\mathbf{u}(t)$ 와 출력벡터  $\mathbf{y}(t)$ 는 초기 시스템과 비교하여 변동이 없음을 알 수 있다. 따라서, 축소된  $n$ 차 자유도 모델을 해석에 이용하므로 매우 효율적인 고유치 및 주파수응답 해석이 가능하다.

2.1 모멘트 일치법

식 (1)의 전달함수(transfer function)를 구하기 위해 간단히 초기조건  $dx(0)/dt=x(0)=0$  하에서 라플라스 변환(Laplace transform)을 수행하고, 이를 정리하면

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Y}(s)/\mathbf{U}(s) = \mathbf{L}^T (s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{B} \quad (4)$$

이고, 이 식을  $s$ 에 대하여 전개점  $s=s_0$ 에서 테일러 급수 전개(Taylor series expansion)을 하면 전달함수는 아래와 같이 급수 형태로 표현될 수 있다.<sup>(8)</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1(s-s_0) + \dots + \mathbf{m}_q(s-s_0)^q + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_i (s-s_0)^i \end{aligned} \quad (5)$$

이때, 계수  $\mathbf{m}_i$ 를 전개점  $s_0$ 에 대한 전달함수의 모멘트(moment)라고 한다. 이 모멘트는 초기 시스템과 축소시스템의 유사성(similarity)를 나타내는 지표로 사용된다. 즉, 식 (1)과 동일한 이차 형태를 지닌 축소시스템 (3)의 전달함수를

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}(s) &= \hat{\mathbf{m}}_0 + \hat{\mathbf{m}}_1(s-s_0) + \dots + \hat{\mathbf{m}}_q(s-s_0)^q + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mathbf{m}}_i (s-s_0)^i \end{aligned} \quad (6)$$

라고 하면, 결국 모멘트 일치법은 요구되는 차수  $n$ 에 대하여 다음을 만족하는 축소시스템 (3)을 찾는 문제를 의미한다.

$$\mathbf{m}_i = \hat{\mathbf{m}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

식 (1)의 전달함수의 모멘트를 구하기 위하여, 먼저 식 (1)을 다음과 같이 상태공간(state space) 형태로 변환한다.<sup>(9)</sup>

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)의 전달함수는  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{D}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{G}$ 이며, 전개점  $s_0=0$ 에서 테일러 급수 전개를 하면

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} -\mathbf{D}^T (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})^i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G} s^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_i s^i \end{aligned} \quad (9)$$

이 되며, 위의  $\mathbf{m}_i$ 를 식 (1)의 행렬로 다시 표현하면

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_i &= -\mathbf{D}^T (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})^i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G} \\ &= -\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}^T \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \right)^i \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} & -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

이 된다. 만약, 비감쇠 시스템으로 감쇠행렬  $C$ 가 영행렬인 경우,  $\mathbf{H}(s)$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{L}^T (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}s^{2i} \quad (11)$$

즉, 비감쇠 시스템의 모멘트는  $\mathbf{m}_i = \mathbf{L}^T (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}$  이다. 다음 절에서는 크리로프 부공간에 대하여 설명하는데, 편의상 식 (1)의 행렬  $\mathbf{B}$ 와  $\mathbf{L}$ 을 각각 벡터  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ 와  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^N$ 로 변경한 단일입출력 시스템

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{I}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

을 고려한다. 이때, 축소시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{z}(t) &= \mathbf{b}_r u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{I}_r^T \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, 축소행렬은  $\mathbf{M}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{K}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{b}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{b}$  및  $\mathbf{I}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{I}$ 이다. 다중입출력 시스템의 경우, 블록 크리로프 부공간(block Krylov subspace)에 대한 이론<sup>(3)</sup>이 필요하므로 이는 생략하고, 이 후에는 단일입출력 시스템 (12)에 대해서만 고려한다.

### 2.2 크리로프 부공간

행렬  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$  및 벡터  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ 에 대하여

$$\mathcal{K}_q(\mathbf{A}_1, \mathbf{r}) = \text{span}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}_1 \mathbf{r}, \mathbf{A}_1^2 \mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}_1^{q-1} \mathbf{r}\} \quad (14)$$

를  $q$ 차 크리로프 부공간( $q$ th Krylov subspace)라 정의하며,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{r}) &= \text{span}\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{q-1}\} \\ \text{where } \begin{cases} \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}, \\ \mathbf{p}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{p}_j = \mathbf{A}_1 \mathbf{p}_{j-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{p}_{j-2}, \text{ for } j \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

로 정의되는  $\mathcal{K}_q(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{r})$ 는  $q$ 차 이차 크리로프 부공간( $q$ th second-order Krylov subspace)이라 한다.<sup>(8-10)</sup> 단일입출력 이차 시스템 (12)의 모멘트는

$$\mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M} & -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (16)$$

이며,  $\mathbf{A}_1 = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}_2 = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}$ 라 하면 입력 이차 크리로프 부공간은 다음과 같이 정의된다.<sup>(9)</sup>

$$\mathcal{K}_q(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}, -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}) = \text{span}\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{q-1}\} \quad (17)$$

따라서, 식 (16)의 모멘트  $\mathbf{m}_i$ 와 입력 이차 크리로프 부공간의 기저 열벡터(column vector)는 다음의 관계를 가진다.

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{I}^T \mathbf{p}_i \quad (18)$$

크리로프 부공간에 근거한 모멘트 일치법은 식 (18)로 주어지는 전달함수의 모멘트를 실제로 계산하지 않고, 초기 및 축소시스템의 모멘트를 일치시킬 수 있도록 한다. 크리로프 부공간에 근거한 모멘트 일치법에 대하여 다음과 같은 이론이 알려져 있다.<sup>(8-10)</sup>

• 식 (2)의 변환행렬  $\mathbf{V}$ 의 각 열벡터(column vector)로 이루어진 모든 선형 결합들이 식 (17)의  $q$ 차 이차 크리로프 부공간을 구성(span)하면, 초기 이차 시스템 (12)와 축소시스템 (13)의 첫  $q$ 번째까지의 모멘트는 서로 일치한다.

그런데, 초기 이차 시스템에서 감쇠행렬이 아래의 식 (19) 및 (20)과 같이 표현되는 경우는 식 (2)의 변환행렬  $\mathbf{V}$ 가 단순히  $\mathcal{K}_q(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}) = \text{colspan}\{\mathbf{V}\}$ 의 관계만을 만족하더라도, 초기 이차 시스템과 축소시스템의 첫  $q$ 번째까지의 모멘트는 서로 일치한다.<sup>(13)</sup> 즉, 초기 시스템의 감쇠행렬이 식 (19)나 (20)으로 모델링된 경우는 변환행렬  $\mathbf{V}$ 를 구하는데 초기 시스템의 감쇠행렬의 정보없이 질량 및 강성행렬과 하중분배벡터의 정보만을 이용한다.

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (19)$$

$$\mathbf{C} = \beta_c \mathbf{K} \quad (20)$$

식 (19)는 감쇠행렬을 질량 및 강성행렬의 선형 조합으로 표현하는 비례감쇠(proportional damping) (일명 Rayleigh damping)로서 매개변수  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 각각 1/time과 time의 단위를 가진다. 식 (20)은 감쇠행렬이 강성행렬과 상수 감쇠비(damping ratio)  $\zeta$ 의 곱으로 나타나는 경우로서,  $\beta_c$ 는 감쇠비와  $\beta_c = \zeta/\pi f$ 의 관계를 가진다. 이때,  $f(\text{Hz})$ 는 주파수응답 해석에서의 가진주파수를 의미한다. 즉, 이차 시스템의 감쇠행렬이  $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ 로 주어지면, 축소시스템의 감쇠행렬은  $\mathbf{C}_r = \alpha \mathbf{M}_r + \beta \mathbf{K}_r$ 이고,  $\mathbf{C} = \beta_c \mathbf{K}$ 이면  $\mathbf{C}_r = \beta_c \mathbf{K}_r$ 이 된다. 따라서,  $\alpha$ 와  $\beta$  및  $\beta_c$ 는 축소모델에서도 매개변수로 유지됨을 알 수 있다.

일반적인 구조해석에서 감쇠행렬로 위의 두 경우가 많이 사용되므로, 본 논문에서는 위의 두 감쇠행렬의 경우를 고려한다. 따라서, 요구되는  $q$ 차 크리로프 부공간은

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}) \\ = \text{span}\{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}, (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}, \dots, (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^{q-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}\} \end{aligned} \quad (21)$$

이다. 다음 절에서는 변환행렬  $\mathbf{V}$ 의 열벡터를 구성하는 수치적인 방법인 아놀디 과정을 설명한다.

### 2.3 아놀디 과정

$q$ 차 크리로프 부공간  $\mathcal{K}_q(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b})$ 을 구성하는 열벡터  $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}, (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}, \dots, (-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^{q-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}$ 는 실제 수치계산에 있어서 작은  $q$ 값에도 서로 일차 종속(linearly dependent)이 되기 때문에, 실제 수치계산에서는 이 열벡터를 사용하지 않고 같은 크리로프 부공간을 구성하는 새로운 기저 열벡터들을 이용한다. 이러한 열벡터로 이루어진 변환행렬  $\mathbf{V}$

```

• Arnoldi process:

Given a nonzero starting vector  $\mathbf{r}$  and a matrix  $\mathbf{A}$ , this algorithm produces
orthonormal  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q$  such that
     $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{span}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}\}$  for  $k = 1, 2, \dots, q$ 

 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|_2$ 
for  $k = 1, 2, \dots, q-1$ 
     $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{v}_k$  (new vector generation)
    for  $j = 1, 2, \dots, k$  (orthogonalization)
         $h_{jk} \leftarrow \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_{k+1}$ 
         $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_{k+1} - \sum_{j=1}^k h_{jk} \mathbf{v}_j$ 
     $h_{k+1,k} \leftarrow \|\mathbf{v}_{k+1}\|_2$ 
    if  $h_{k+1,k} = 0$ 
        set flag (span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  is invariant under  $\mathbf{A}$ )
        exit
     $\mathbf{v}_{k+1} \leftarrow \mathbf{v}_{k+1} / h_{k+1,k}$  (normalization)
    
```

Fig. 1 Construction of Arnoldi bases for  $\mathcal{K}_q(\mathbf{A}, \mathbf{r})$

는 아놀디 과정(Arnoldi process)<sup>(3,14)</sup>을 통해 계산되며 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

$$\text{colspan}\{\mathbf{V}\} = \mathcal{K}_q(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}) \quad (22)$$

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_q$$

즉, 변환행렬  $\mathbf{V}$ 의 열벡터는 정규직교(orthonormal)하다. 여기서  $\mathbf{I}_q$ 는  $q$ 차의 단위행렬이다.

Fig. 1에 아놀디 과정을 통하여 변환행렬  $\mathbf{V}$ 의 열벡터를 생성하는 수치적 알고리즘을 설명하였다. 행렬  $\mathbf{A}$ 와 벡터  $\mathbf{r}$ 을 각각  $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$ 과  $\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}$ 라 할 때, 아놀디 과정을 설명한다.<sup>(14)</sup>

초기벡터  $\mathbf{r}$ 을 정규화하여  $\mathbf{v}_1$ 을 얻고, 다음 열벡터  $\mathbf{v}_{k+1}$ 는  $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_k$ 의 관계를 이용하여 다음 단계로 구한다.

- 1) Let  $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_k$  where  $\mathbf{A} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$
- 2) Multiply  $\mathbf{K}$  on both sides,  $\mathbf{K}\mathbf{v}_{k+1} = -\mathbf{M}\mathbf{v}_k$
- 3) Decompose  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{v}_{k+1} = -\mathbf{M}\mathbf{v}_k$
- 4) Solve for  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{L}\mathbf{w} = -\mathbf{M}\mathbf{v}_k$  where  $\mathbf{U}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{w}$
- 5) Solve for  $\mathbf{v}_{k+1}$ ,  $\mathbf{U}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{w}$

즉  $\mathbf{K}^{-1}$ 을 직접 계산하지 않고, 2)처럼 양변에  $\mathbf{K}$ 를 곱하여 행렬분해(matrix decomposition)을 수행한다. 이때, LU분해 및 Cholesky분해를 사용한다.<sup>(14)</sup> 이후에 2회의 연립방정식 풀이를 통해 열벡터  $\mathbf{v}_{k+1}$ 를 구한다. 따라서,  $\mathbf{v}_{k+1}$ 를 구하기 위해서는 행렬과 벡터의 곱( $\mathbf{M}\mathbf{v}_k$ ) 1회, 전방대입법(forward substitution) 1회 및 후방대입법(backward substitution) 1회의 계산이 필요하다. 또한, 생성되는  $\mathbf{V}$ 의 열벡터가 선형독립성을 가지도록 직교화(orthogonalization)을 수행한다. 대부분의 경우, 그람슈미트(Gram-Schmidt) 정규직교화 과정<sup>(14)</sup>이 이용된다. 고전적 그람슈미트 정규직교화 과정은 수치계산에서 발생하는 반

올림 오차로 인하여 수치적으로 불안정하므로, 수학적으로는 동등하나 수치적으로는 더 작은 오차를 포함하는 수정 그람슈미트 정규직교화 과정이 선호된다. 만약에 지정한  $q$ 개의 선형독립인 열벡터를 구하기 전에 열벡터가 선형종속이 되면, 선형독립인 열벡터까지만  $\mathbf{V}$ 의 열벡터로 취하게 된다. 따라서 최종적으로 구해진  $\mathbf{V}$ 의 열벡터는 식 (22)의 관계를 만족한다.

### 3. 모델차수축소법의 수치적 구현 과정

이 장에서는 앞 장에서 설명한 크리토프 부공간에 근거한 모멘트 일치법에 대하여 수치적으로 아놀디 과정을 적용하여 모델차수축소를 수행하는 전과정을 mor4fem<sup>(11)</sup>과 관련하여 설명한다.

먼저 주어진 문제에 대한 ANSYS<sup>(15)</sup> 유한요소모델링을 수행하여 식 (1)의 시스템 행렬을 얻는다. 앞 장에서 언급한 감쇠행렬만을 고려하므로, 아놀디 과정에 행렬  $\mathbf{M}$ 과  $\mathbf{K}$ 만이 필요하다. ANSYS에서 주파수응답 해석시, 각 가진주파수  $\Omega$ 에 대하여 시스템 행렬은 다음 선형연립방정식과 같이 수식화되므로

$$\mathbf{K}_c \mathbf{x}_c = \mathbf{F}_c \quad (23)$$

where  $\mathbf{K}_c = \mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} + i\mathbf{D}$

서로 다른 두 가진주파수  $\Omega_1$ 과  $\Omega_2$ 에 대하여 위의 정보를 FULL 파일로 출력하여 mor4fem의 입력으로 사용한다. 이 방법 외에 Matrix Market 형식<sup>(16)</sup>으로 된 시스템 행렬도 mor4fem의 입력으로 사용될 수 있다.

모델차수축소법 소프트웨어인 mor4fem은 크게 두 부분으로 나뉘는데, 첫째 부분은 위에서 설명

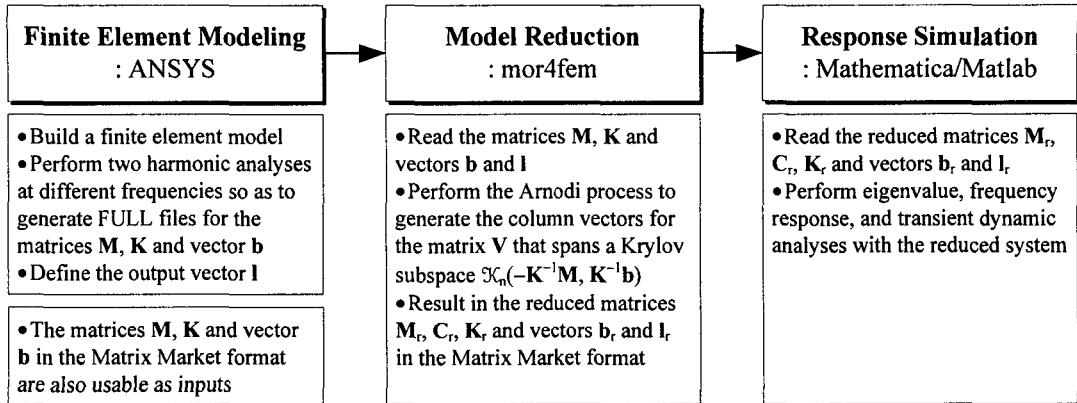


Fig. 2 Process of model order reduction using ANSYS and mor4fem

한 식 (23)의 정보를 포함한 ANSYS의 FULL 파일을 읽은 후,  $K_c$ 의 실수 부분만을 고려하여 주어진 시스템 (1)의 행렬  $M$ 과  $K$ 를 얻는다. 둘째 부분은 이 시스템 행렬에 아놀디 과정을 적용하여 식 (2)의 변환행렬  $V$ 를 생성한다. 이때, 주파수응답을 출력하고자 하는 절점과 자유도 정보를 포함한 벡터  $I$ 도 함께 읽어 드린다. 생성된 축소모델 (13)은 Matrix Market 형태로 출력되며, Mathematica<sup>(17)</sup>나 Matlab<sup>(19)</sup>을 이용하여 축소시스템에 대한 고유치, 주파수응답, 과도응답 등을 계산한다(Fig. 2 참고). 축소시스템은 그 자유도  $n$ 이 대략 100 미만인 경우에도 다양한 공학 문제에서 비교적 정확한 결과를 예측하기 때문에, 초기의 큰 자유도의 대형 유한요소모델의 주파수응답과 과도응답을 효율적으로 대체할 수 있다.

#### 4. HDD 용 구동부의 적용예

하드디스크 드라이브의 현가장치<sup>(12)</sup>는 일반적으로 트랙 검색 및 추종 방향으로는 구동부와 큰 강성을 가지도록 연결되고, 디스크의 수직 방향으로 에어 베어링으로 지지되는 헤드 부분이 디스크의 형태나 진동에 순응하도록 유연성을 가지도록 설계하는 것이 필요하다(Fig. 3 참고). 또한, 구동부는 신속한 데이터 검색을 위하여 가능한 경량화가 요구되며 연속적인 트랙 검색시에 발생하는 진동을 최소화하는 고유진동모드를 갖도록 설계한다. 따라서, 하드디스크 구동부의 servo 제어기 설계를 위해서는 구동부의 고유진동수 및 VCM 구동력에 대한 주파수응답 특성을 파악하는 것이 필요하다. 이때, servo 제어기는 20 khz의 샘플링 속도를 가진다고 가정하여 관심주파수를 20 khz까지로 선정하였다.

Fig. 3은 해석에 사용된 하드디스크 드라이브의 구동부를 나타낸다. 구동부의 축(shaft)은 직교좌표계에서 고정되어 있고, 그 축을 중심으로 구동부는 회전을 한다. 코일 부분은 알루미늄 본체에 접착되어 있고, 구동 전류가 자기장에 놓인 코일에 흐를 때에 VCM 구동력이 작용하여 구동부가 구동하게 된다. 현가장치는 초기에 헤드 부분이 디스크에 접촉되도록 수 그래프의 초기하중을 부여하여, 회전 중에는 에어 베어링의 상승력과 이 초기하중이 상쇄되어 수 마이크로미터의 간격을 유지하도록 한다. 따라서, 정지 중에는 초기 하중으로 인하여 헤드가 디스크에 접촉되어 있으므로 충격이나 진동에 의한 헤드와 디스크의 손상을 방지한다.<sup>(12)</sup>

##### 4.1 유한요소모델링

이 시스템의 ANSYS 유한요소모델은 3338개의 SOLID45 요소와 볼 베어링 부분의 모델링을 위한 8개의 COMBIN14 요소로 구성되었고, 총 절점수는 7336개이다(Fig. 4 참조). 구동부의 축과 볼 베어링의 안쪽 반지름 부분의 절점은 모두 구속되었고, 위/아래 슬라이드의 네 꼭지점은 Z방향으로 구속되었다. 주 운동 방향이 축에 대한 회전이므로, 직교좌표계를 대신하여 같은 원점을 가지는 원통좌표계를 기본좌표계로 사용하였다. Fig. 4처럼 코일에 작용하는 VCM 구동력은 코일 부분의 네 곳에 작용하고, 헤드 끝부분의 위/아래에서 이 구동력에 대한 시스템의 주파수응답을 관찰하였다.

##### 4.2 고유치 해석

식 (1)에서 비감쇠 시스템의 고유치 문제는 다음처럼 고유치(eigenvalue)  $\omega^2$ 와 그 고유치에 대한 고유벡터(eigenvector)  $\phi$ 를 구하는 문제로 주어진다.<sup>(18)</sup>

$$K\phi = \omega^2 M\phi \tag{24}$$

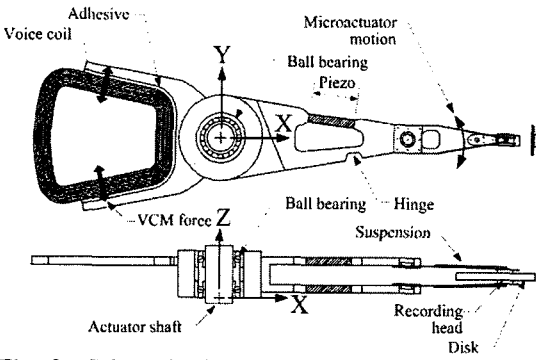


Fig. 3 Schematic drawing of an HDD actuator and suspension system<sup>(12)</sup>

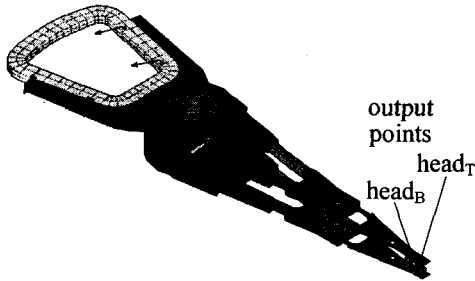


Fig. 4 ANSYS finite element mesh of the actuator and suspension model. The actuation VCM forces are applied at four points of the voice coil. The responses are observed at two output points of the head

이와 마찬가지로 축소시스템 (3)에 대한 고유치 문제도 아래의 관계로 주어질 수 있다.

$$K_r \phi_r = \omega_r^2 M_r \phi_r \quad (25)$$

$$\phi \equiv V \phi_r \quad \text{where } \phi \in \mathcal{R}^N, \phi_r \in \mathcal{R}^n$$

이때,  $\omega_r^2$ 과  $\phi_r$ 은 각각 축소시스템의 고유치와 그에 해당하는 고유벡터이다. 따라서, n차 축소모델에서 n개의 고유진동수를 얻을 수 있고, 식 (2)와 같이 변환행렬 V를 이용하여 축소시스템의 고유벡터에서 초기 시스템의 고유벡터를 구할 수 있다. 일반적으로 큰 자유도의 대형 시스템에서도 설계 및 해석을 위하여 처음 몇 개의 고유치와 고유벡터만이 필요한 경우가 대부분이기 때문에, 자유도 N의 초기 시스템보다 자유도 n인 축소모델을 이용하는 것이 보다 효율적이다.

Fig. 5는 초기 ANSYS 유한요소모델(N=21203)과 축소모델(n=50~80)로 계산한 초기 50개의 고유진동수를 함께 비교하여 도시한 것이다. ANSYS에서는 block Lanczos법<sup>(15)</sup>을 이용하여 고유진동수를 계산하였다. 첫 번째 고유진동모드는 원주 방향으로 발생하는 강체운동모드이고 고유진동수는 0 hz이다. 관심주파수가 20 khz까지 이므로 이 대역에 해당되는 50번째 고유진동

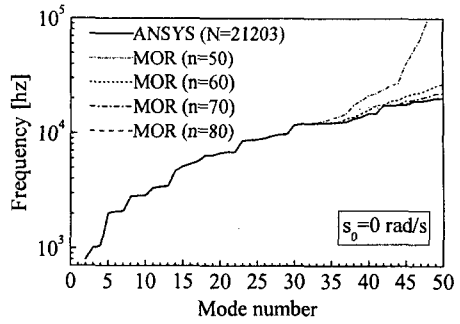


Fig. 5 Comparison of natural frequencies between the full ANSYS model and reduced models

Table 1 Natural frequencies and errors

Mode	ANSYS (N=21203)	MOR (n=50)		MOR (n=80)	
		Frequency (hz)	Error (%)	Frequency (hz)	Error (%)
1	-	-	-	-	-
2	797.8	797.8	0.000	797.8	0.000
3	1004.5	1004.5	0.000	1004.5	0.000
4	1055.4	1055.4	0.001	1055.4	0.001
5	2026.6	2026.6	0.000	2026.6	0.000
6	2085.3	2085.3	0.001	2085.3	0.001
7	2113.8	2113.9	0.005	2113.9	0.005
8	2823.0	2823.0	0.000	2823.0	0.000
9	2866.9	2868.7	0.061	2868.7	0.061
10	2885.9	2885.9	0.000	2885.9	0.000
11	3340.0	3340.0	0.000	3340.0	0.000
12	3414.6	3414.7	0.001	3414.7	0.001
13	3479.3	3479.9	0.017	3479.9	0.017
14	4700.5	4700.5	0.000	4700.5	0.000
15	5140.7	5140.8	0.002	5140.8	0.002
16	5386.6	5388.1	0.027	5388.0	0.027
17	5663.9	5663.9	0.001	5663.9	0.001
18	6376.4	6376.7	0.005	6376.7	0.005
19	6379.9	6380.3	0.006	6380.3	0.006
20	6687.1	6687.2	0.000	6687.2	0.000
21	6821.7	6821.7	0.001	6821.7	0.001
22	6849.9	6849.9	0.001	6849.9	0.001
23	8580.8	8582.5	0.020	8582.5	0.020
24	8721.9	8723.2	0.014	8723.2	0.014
25	8822.5	8824.4	0.021	8824.4	0.021
26	9050.4	9051.5	0.012	9051.5	0.012
27	9461.1	9461.2	0.002	9461.2	0.002
28	9782.3	9784.4	0.021	9784.3	0.021
29	9876.3	9876.9	0.006	9876.9	0.006
30	11803.5	11803.8	0.002	11803.7	0.002
31	12077.4	12140.0	0.518	12080.8	0.028
32	12078.7	12272.1	1.601	12092.0	0.110
33	12266.1	12486.0	1.792	12266.5	0.003
34	12336.3	12792.8	3.701	12339.8	0.029
35	12338.1	13550.0	9.823	12345.5	0.060
36	12478.4	14043.4	12.541	12484.5	0.049
37	12666.2	14989.5	18.342	12666.8	0.005
38	13487.9	17682.9	31.102	13488.2	0.003
39	14039.3	19331.4	37.695	14039.5	0.001
40	14973.6	21346.6	42.562	14975.8	0.015
41	14974.5	22433.7	49.813	14984.9	0.070
42	17500.3	24201.1	38.289	17502.4	0.012
43	17501.7	26328.4	50.433	17511.8	0.057
44	17729.2	27290.8	53.932	17734.1	0.028
45	17729.4	39801.8	124.496	17742.4	0.073
46	19073.7	51962.0	172.427	19075.9	0.011
47	19083.8	65903.0	245.335	19117.5	0.177
48	19477.3	102385.2	425.664	19477.3	0.000
49	20187.1	156040.1	672.970	20250.4	0.313
50	20204.6	648214.3	3108.245	20485.4	1.389

수( $f_{s0}=20.2$  kHz)까지를 고려하였다. 축소모델의 자유도가  $n=50$ 인 경우, 30번째 고유진동수까지 약 0.06 % 오차 이내로 정확히 예측할 수 있으며,  $n=80$ 인 축소모델은 초기 유한요소모델의 49번째 고유진동수까지 약 0.3 % 오차 이내로 예측할 수 있다(Table 1 참조). 이때, 오차는 다음 식으로 계산되었다.

$$\text{Error (\%)} = \frac{f_{\text{MOR}} - f_{\text{ANSYS}}}{f_{\text{ANSYS}}} \times 100 \quad (26)$$

축소모델의 자유도를 점점 높임으로써 좀더 고차 고유진동수까지 일치하는데, 이것은 테일러 급수 전개점(현재 축소모델의 경우,  $s_0=0$  rad/s)에서부터 관심주파수 영역이 멀어지면 축소모델과 초기 유한요소모델 사이의 오차가 커지지만 축소모델의 자유도를 높이면 더 높은 주파수 영역까지 응답이 일치하는 모멘트 일치법의 특징을 잘 나타내고 있다. 또한, 설계 및 해석시 요구되는 고유진동수의 차수( $k$ )보다 축소모델의 자유도( $n$ )를 크게 선정해야 함을 해석 결과에서 알 수 있는데, 이 문제에서는  $n \approx 2k$ 이면 충분한 정확도를 기대할 수 있었다. Table 1에서 축소모델로 계산된 9, 13 및 16번째 고유진동수는 근처의 다른 고유진동수보다 상대적으로 더 큰 오차를 가지는데 이때, 이들의 고유진동모드는 대부분 하드디스크 드라이브 현가장치의 고차 비틀림 또는 측면으로 흔들리는 형상의 고유진동모드이다.

변환행렬  $V$ 의 생성시에 하중벡터  $b$ 가 포함되므로 하중벡터에 따라서 축소모델에 근소한 차이가 발생하지만 초기 모델의 자유도가 21203개인 것을 감안할 때, 본 모델차수축소법으로 생성한 축소모델은 대형 시스템의 고유진동수를 매우 효율적인 계산할 수 있음을 알 수 있다. 향후, 요구되는 고유진동수의 차수( $k$ )에 따른 축소모델의 자유도( $n$ )의 선정 및 하중벡터  $b$ 의 영향에 대한 추가적인 연구가 필요하다고 판단된다.

#### 4.3 주파수응답 해석

코일에 작용하는 총 1 mN 크기의 VCM 구동력에 대하여 헤드의 위/아래 출력점( $head_T$  및  $head_B$ )에서 주파수응답을 살펴보았다(Fig. 4 참조). Fig. 6은 가진주파수 20 kHz까지 출력점  $head_T$ 의 반경(X), 원주(Y) 및 축(Z) 방향의 주파수응답을 도시한 것이다. 이때, 기준이 되는 ANSYS의 주파수응답은 각 가진주파수에 대하여 식 (23)을 선형연립방정식 풀이법으로 계산하는 방법(일명 full method)을 이용하였고, MOR은 mor4fem에서 자유도  $n=80$ 에 해당하는 축소모델을 생성한 후, Mathematica를 이용하여 축소시스템에 대한 주파수응답을 계산하였

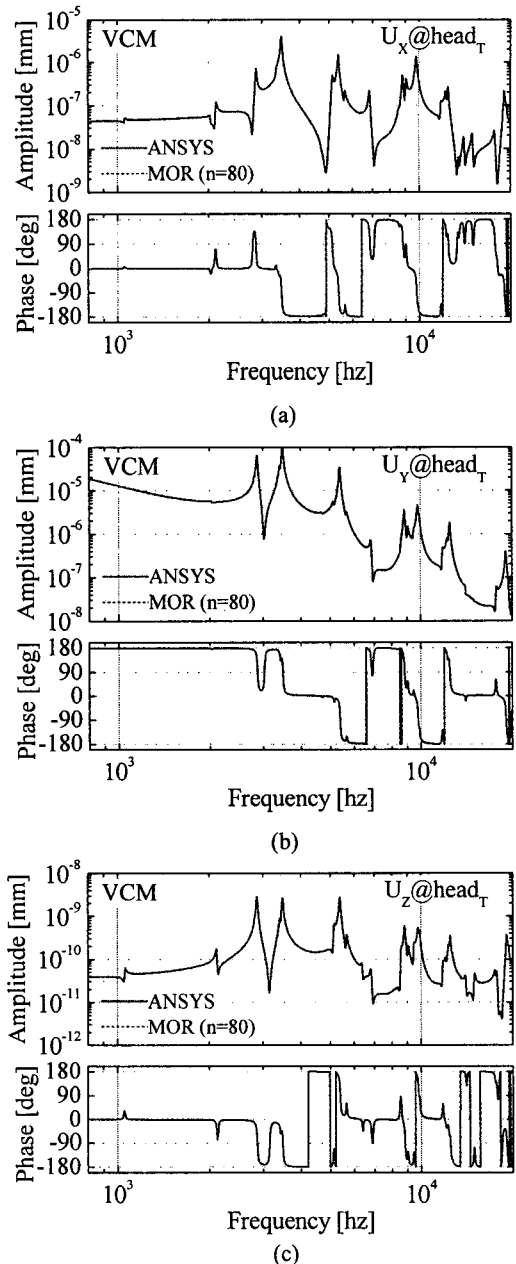


Fig. 6 Frequency responses for VCM forces at the top of reading heads: (a) radial (X) direction; (b) circumferential (Y) direction; (c) vertical (Z) direction

다. 주파수응답 해석시, 각 시스템의 감쇠는 상수 감쇠비가  $\zeta=0.5$  %인 식 (20)으로 가정하였다.

디스크에 정보를 쓰고 읽는 하드디스크의 작동을 고려할 때, 구동부와 현가장치의 원주(Y) 방향으로의 주파수응답이 특히 중요한데 약 3.4 kHz 부

근에서 이 방향으로 최고값이 발생하며 위상이 반전되는 것을 확인할 수 있다. 다른 방향에서도 주파수응답의 최고점은 약 3 khz 이상에서 발생하지만 그 크기는 원주 방향의 크기에 비해 1/10 미만으로, 상대적으로 중요도가 낮음을 알 수 있다(Fig. 6 참조). 참고로 헤드의 위/아래 출력점에서 거의 유사한 주파수응답을 보이며 단지 아래쪽 출력점에서 위상응답의 변화가 더 심하였다. Fig. 6에서 보는 바와 같이 21203개의 자유도로 구성된 초기 유한요소모델의 주파수응답을 80개의 자유도를 가진 축소모델로 20 khz의 고주파수 영역까지 그래프상에서 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확하게 계산할 수 있었다.

축소시스템의 차수에 따른 원주 방향의 주파수응답을 Fig. 7에 도시하였다. 자유도 n=50인 축소모델의 주파수응답 결과는 20 khz의 주파수 영역까지 n=80인 축소모델의 결과와 거의 일치하였고, n=20인 축소모델로는 약 6 khz의 주파수 영역까지 거의 일치하는 결과를 얻었다.

4.4 오차분석

고유치 및 주파수응답 해석에서 설계에 필요한 높은 정확도를 가지면서 가장 최소인 축소모델의 차수(n)를 결정하는 것은 해석의 정확도와 경제적인 측면에서 중요한 문제이다. 이러한 축소모델의 차수를 공학적 관점에서 자동적으로 결정할 수 있도록 주파수응답에 대한 오차지표(error indicator)<sup>(7)</sup>를 계산하여 진오차(true error)와 비교하였다. 축소모델의 차수가 n일 때, 특정한 주파수에 대한 주파수응답의 진오차( $E_n$ )와 오차지표( $e_n$ )는 각각

$$E_n(s) = \frac{\|\hat{H}_n(s) - H(s)\|}{\|H(s)\|} \quad (27)$$

$$e_n(s) = \frac{\|\hat{H}_n(s) - \hat{H}_{n+1}(s)\|}{\|\hat{H}_{n+1}(s)\|} \quad (28)$$

로 정의되며, 여기서  $H(s)$ 와  $\hat{H}_n(s)$ 는 각각 초기 유한요소모델과 n차 축소모델의 전달함수를 의미한다. 따라서, 진오차  $E_n(s)$ 와 오차지표  $e_n(s)$ 는 각각 n차 축소모델로 계산한 전달함수의 초기 유한요소모델과 n+1차 축소모델의 전달함수와의 오차를 의미한다. 오차 계산시, 모든 출력점의 주파수응답을 고려하여 그들의 노름(norm)을 계산하였다. 실제로 넓은 주파수 영역에서 수치적으로 다음과 같은 관계가 성립됨이 관찰되었다<sup>(7)</sup>.

$$E_n(s) \approx e_n(s) \quad (29)$$

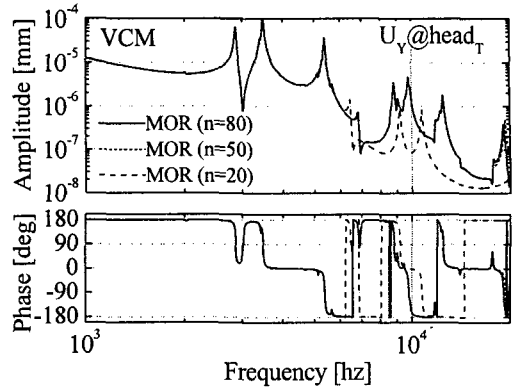


Fig. 7 Frequency responses in the circumferential direction for VCM forces at the top of reading heads according to the order of the reduced models

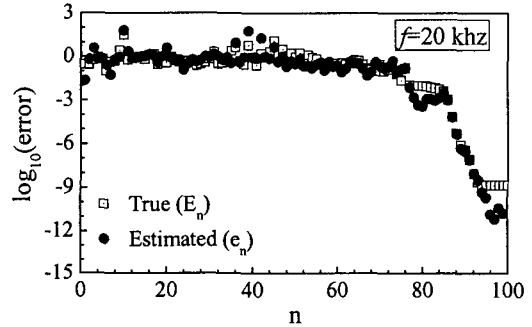


Fig. 8 Comparison of true errors between MOR and ANSYS results and error indicators between two successive reduced models at f=20 khz according to the order of reduced models

일레로 주파수 f=20 khz에서 출력점 head\_T와 head\_B에서의 원주 방향의 주파수응답에 대하여 축소모델의 차수(n)에 따른 두 오차를 Fig. 8에 비교하여 도시하였다. 축소모델의 차수가 n=80 이후에 두 오차는 모두 급격히 줄어들며, 이 주파수에서도 식 (29)의 관계가 성립함을 확인할 수 있다. 따라서 식 (29)를 이용하면 원하는 주파수에 대하여 설계 및 해석에 요구되는 정확도를 지닌 축소모델의 차수 n을 결정하기 위해서, 진오차를 직접 계산하지 않고 오차지표를 사용하여 지정한 오차 수준에 해당되는 축소모델의 차수를 어느 정도 자동적으로 구할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 모멘트 일치법과 크리토프 부공



간에 근거한 모델차수축소법을 제시하고, 이를 이용하여 하드디스크 구동부의 고유진동수 및 주파수응답을 정확하면서도 매우 효율적으로 계산할 수 있음을 보였다. 본 논문을 통하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

(1) 21203개의 자유도를 가지는 하드디스크 구동부의 유한요소모델에서 계산한 초기 50개의 고유진동수를 축소모델의 결과와 비교하였을 때, 축소모델의 자유도가  $n=50$ 인 경우는 30번째 고유진동수까지 약 0.06 % 오차 이내로 예측할 수 있었으며,  $n=80$ 인 축소모델은 초기 유한요소모델의 49번째 고유진동수까지 약 0.3 % 오차 이내로 예측할 수 있었다. 그러나, 요구되는 고유진동수의 차수( $k$ )에 따른 축소모델의 자유도( $n$ )의 선정 및 하중 벡터  $b$ 의 영향에 대한 추가적인 연구가 필요하다.

(2) 초기 유한요소모델의 주파수응답을 80개의 자유도를 가진 축소모델로 20 khz의 고주파수 대역까지 그래프상에서 차이를 확인할 수 없을 정도로 정확하게 계산할 수 있었다.

(3) 설계 및 해석에 요구되는 정확도를 지닌 축소모델의 차수  $n$ 을 결정하기 위해서는 오차지표를 이용하여 지정한 오차 수준에 해당되는 축소모델의 차수를 어느 정도 자동적으로 구할 수 있음을 확인하였다.

끝으로, 서론에서 언급한 바와 같이 초기 대형 유한요소모델로부터 작은 자유도의 축소모델을 생성하여 수치계산의 효율성을 극대화하는 모델차수 축소법은 구조해석 및 시스템 제어 분야에 공히 효율적으로 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

## 후 기

이 논문은 "2006년도 안동대학교 특성화 추진 지원사업"에 의하여 연구되었음. The author would like to thank Dr. Evgenii Rudnyi for his valuable comments on this work.

## 참고문헌

- (1) Han, J. S., 2006, "Efficient Vibration Simulation Using Model Order Reduction," *Transactions of the KSME A*, Vol. 30, No. 3, pp. 310~317.
- (2) Su, T. J. and Craig, Jr. R. R., 1991, "Krylov Model Reduction Algorithm for Undamped Structural Dynamics Systems," *J. Guid. Control Dyn.*, Vol. 14, pp.

- 1311~1313.
- (3) Freund, R. W., 2000, "Krylov-Subspace Methods for Reduced-Order Modeling in Circuit Simulation," *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 123, pp. 395~421.
- (4) Han, J. S., Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G., 2005, "Efficient Optimization of Transient Dynamic Problems in MEMS Devices Using Model Order Reduction," *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 15, pp. 822~832.
- (5) Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G., 2002, "Automatic Model Reduction for Transient Simulation of MEMS-Based Devices," *Sensors Update*, Vol. 11, pp. 3~33.
- (6) Bechtold, T., Rudnyi, E. B., Korvink, J. G., Graf, M. and Hierlemann, A., 2005, "Connecting Heat Transfer Macromodels for Array MEMS Structures," *J. Micromech. Microeng.* Vol. 15, pp. 1205~1214.
- (7) Bechtold, T., Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G., 2005, "Error Indicators for Fully Automatic Extraction of Heat-Transfer Macromodels for MEMS," *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 15, pp. 1205~1214.
- (8) Villemagne, C. D. and Skelton, R. E., 1987, "Model Reduction Using a Projection Formulation," *Int. J. Control*, Vol. 46, pp. 2141~2169.
- (9) Salimbahrami, B. and Lohmann, B., 2006, "Order Reduction of Large Scale Second-Order Systems Using Krylov Subspace Methods," *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 415, pp. 385~405.
- (10) Bai, Z., Meerbergen, K. and Su, Y., 2005, "Arnoldi Methods for Structure-Preserving Dimension Reduction of Second-Order Dynamical Systems," *Springer Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 45, pp.173~189.
- (11) Rudnyi, E. and Korvink, J., 2006, "Model Order Reduction for Large Scale Engineering Models Developed in ANSYS," *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 3732, pp. 349~356.
- (12) Hatch, M., 2001, "Vibration Simulation Using Matlab and ANSYS," Chapman & Hall/CRC.
- (13) Salimbahrami, B., Lohmann, B. and Eid, R., 2006, "Order Reduction of Second Order Systems with Proportional Damping," *Book of Abstracts for the Joint GAMM-SIAM Conference on Applied Linear Algebra*, July 24-27, Düsseldorf, Germany, pp. 168.
- (14) Watkins, D. S., 2002, "Fundamentals of Matrix Computations," John Wiley & Sons, Inc.
- (15) ANSYS, 2004, *ANSYS Theory Reference 9.0*, SAS IP, Inc.
- (16) Matrix Market, <http://math.nist.gov/MatrixMarket/>, 2007.
- (17) Wolfram Research, Inc., <http://www.wolfram.com>, 2007.
- (18) Bathe, K. J., 1996, "Finite Element Procedures," Prentice-Hall, Inc.
- (19) The MathWorks, Inc., <http://www.mathworks.com>, 2007.