

# 끝단질량과 종동력을 가진 크랙 외팔 보의 안정성 해석

## Stability Analysis of Cracked Cantilever Beam with Tip Mass and Follower Force

손인수† · 윤한익\* · 안태수\*\*

In-Soo Son, Han-Ik Yoon and Tae-Su Ahn

(2007년 4월 10일 접수 ; 2007년 6월 8일 심사완료)

**Key Words** : Flutter Instability(플러터 불안정), Stability Analysis(안정성 해석), Follower Force(종동력), Cracked Cantilever Beam(크랙 외팔 보)

### ABSTRACT

In this paper a dynamic behavior(natural frequency) of a cracked cantilever beam subjected to follower force is presented. In addition, an analysis of the flutter and buckling instability of a cracked cantilever beam subjected to a follower compressive load is presented. Based on the Euler-Bernoulli beam theory, the equation of motion can be constructed by using the Lagrange's equation. The vibration analysis on such cracked beam is conducted to identify the critical follower force for flutter instability based on the variation of the first two resonant frequencies of the beam. Besides, the effect of the crack's intensity and location on the flutter follower force is studied. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments. The crack is assumed to be in the first mode of fracture and to be always opened during the vibrations.

### 1. 서 론

집중 종동력(concentrated follower force)을 받는 보의 동적 안정성에 대한 연구는 오랜 시간 많은 연구자들로부터 연구되어져 왔다. 이러한 종동력을 받는 보의 동적 안정성 해석은 비보존계의 안정성 문제로서 그 대표적인 예로 Beck<sup>(1)</sup>의 기동문제를 들 수 있다. 또, 구조손상의 하나인 크랙은 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시켜 구조물의 불안정 및 파괴를 유발하는 주요 원인이 된다. 따라서 보의 끝단에 집중 종동력을 받는 보에 크랙이 존재하는 시스템은 이러한 불안정을 일으키는 두 요소를 모두

포함하고 있으므로 이들의 연성관계에 의한 시스템의 동적특성 및 안정성 해석을 수행하는 것은 공학적으로 매우 흥미로운 문제가 된다. 크랙을 가지는 구조물의 동적특성을 파악하는 것은 구조물의 안전 진단 및 사고예방을 위해 중요한 문제라고 할 수 있다. 일반적으로 구조물에 크랙형태의 결함이 있는 경우 구조물의 강성이 저하되는 경향을 보인다. 크랙이 구조물의 동적특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 구조물에서 단지 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법<sup>(2)</sup>에서 출발하여, 최근에는 크랙에 의해서 부가되는 에너지를 파괴역학적 변수를 계산하여 유연행렬을 구하여 적용하는 해석방법을 주로 사용하고 있다<sup>(3)</sup>. 크랙과 종동력을 고려한 연구는 양단 자유 보를 티모셴코 보 이론을 적용하여 크랙이 동적 안정성에 미치는 영향에 대한 해석과 크랙의 위치에 따라 계의 불안정을 일으키는 플러터 하중을

† 교신저자 : 정희원, 동의대학교 기계공학과  
E-mail : isson92@deu.ac.kr  
Tel : (051) 890-2239, Fax : (051) 890-2232

\* 정희원, 동의대학교 기계공학과  
\*\* 동의대학교 대학원 기계공학과

계산하는 연구결과들이 발표되고 있다<sup>(4,5)</sup>. 또, Liu 등<sup>(6)</sup>은 파이프 형태의 중공 축에 크랙이 존재하는 경우 크랙의 크기에 따른 보의 동적특성을 연구하였으며, Wang<sup>(7)</sup>은 압축 종동력을 받는 탄성 지지된 외팔 보의 안정성에 미치는 크랙의 영향에 대하여 연구하기도 하였다. 최근 크랙을 가진 유체유동 파이프의 안정성 해석에 관한 연구결과도 발표되었다<sup>(8)</sup>. 끝단질량을 가진 크랙 보에 대한 연구는 Dado 등<sup>(9)</sup>에 의해 끝단질량 및 그 회전 관성모멘트가 크랙 외팔보의 횡방향 및 축방향 고유진동수에 미치는 영향에 대한 연구를 수행하였다. 하지만 이들의 연구들은 대부분 크랙의 영향에 의한 계의 고유진동수 변화 및 동적특성에 관한 연구들이었으며 크랙과 끝단질량이 계의 안정성에 미치는 영향에 대한 연구는 드문 실정이다. 따라서 이 연구에서는 집중 종동력을 받는 외팔 보에 크랙과 끝단질량이 존재할 때 크랙(크기 및 위치)과 끝단질량이 보의 횡방향 고유진동수 및 계의 불안정을 유발하는 임계 종동력에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 보의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였으며, 크랙은 비진전 개구형 크랙(open crack)이라고 가정하였다.

2. 시스템 모델링

Fig. 1은 이 연구에서 예제해석을 위하여 가정한 집중 종동력을 받는 크랙을 가진 외팔 보의 개략도를 나타낸 것이다. 여기서  $P$ 와  $L$ 은 각각 집중 종동력과 외팔 보의 전체 길이를 나타낸다.  $x_c$ ,  $b$ , 그

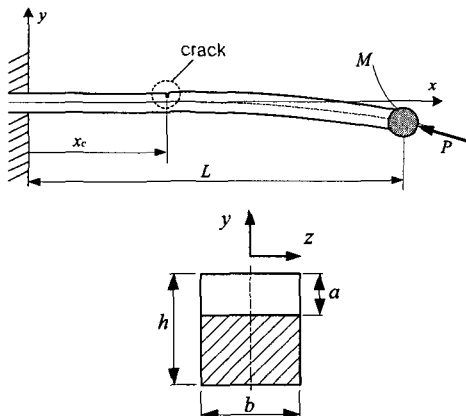


Fig. 1 Geometry of cracked beam subjected to follower force and cross section

리고  $a$ 는 각각 외팔 보 상에 존재하는 크랙의 위치, 크랙의 횡방향 길이, 그리고 전체 크랙의 크기를 의미한다. 또  $M$ 은 끝단질량이다.

2.1 크랙 모델링

탄형 탄성구간에서 크랙으로 인한 추가적인 변형에너지(additional strain energy)는 응력확대계수의 항에서 유도할 수 있는 유연행렬의 형식으로 구할 수 있다. 같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 발생하게 된다. Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 부가되는 추가 에너지는 다음과 같이 유연행렬을 이용하여 표현할 수 있다.

$$C_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[ \int_0^b \int_0^{a_c} J dy dz \right] \tag{1}$$

여기서  $P_i$ 는  $i$ 방향에서의 힘,  $J$ 는 변형률 에너지를 밀도함수로써 1과괴모드에 대하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J = \frac{1}{E^*} (K_{IM})^2 \tag{2}$$

여기서  $E^* = E/(1-\nu^2)$ 이고,  $K_{IM}$ 은 응력확대계수로써 다음과 같다.

$$K_{IM} = \frac{M}{2I} \sqrt{\alpha\pi} F_I(\alpha) \tag{3}$$

여기서  $I (= bh^3/12)$ 는 보의 단면 2차 모멘트이다. 따라서 식 (1)의 무차원의 유연행렬을 구해보면 다음과 같이 계산되어진다.

$$C = 6\pi(1-\nu^2)H \int_0^\alpha [\alpha F_I^2(\alpha)] d\alpha \tag{4}$$

식 (3), (4)에 사용된 무차원 매개변수와  $F_I(\alpha)$ 는 각각 다음과 같다.

$$H = \frac{h}{L}, \quad \alpha = \frac{a}{h},$$

$$F_I(\alpha) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left[ 0.923 + 0.1999 \left( 1 - \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)^4 \right]}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \tag{5}$$

해석에 필요한 회전 스프링 상수( $K_R$ )는 식 (4)의 역수, 즉  $K_R = C^{-1}$ 이다. 또 크랙위치에서 다음의 기울기 변화, 변위, 모멘트 및 전단력의 연속조건을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} \frac{dw_2(x_c)}{dx} - \frac{dw_1(x_c)}{dx} &= \frac{EI}{K_R} \frac{d^2w_2(x_c)}{dx^2}, \\ w_1(x_c) &= w_2(x_c), \quad \frac{d^2w_1(x_c)}{dx^2} = \frac{d^2w_2(x_c)}{dx^2}, \\ \frac{d^3w_1(x_c)}{dx^3} &= \frac{d^3w_2(x_c)}{dx^3} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $w_1(x)$ 와  $w_2(x)$ 는 크랙에 의해 분할되는 외팔 보의 각 분할구간의 횡변위를 나타내며  $E$ 는 영계수이다.

### 2.2 종동력을 받는 외팔 보

크랙과 끝단질량을 가진 외팔 보의 안정성 해석을 위하여 먼저 축 압축하중 즉, 종동력을 받는 외팔 보를 고려하였다. 자유진동에 대하여 외팔 보의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>(10)</sup>.

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

여기서  $P$ 는 집중 종동력(follower force),  $m$ 은 보의 단위 길이당 질량이다. 보의 횡변위는 변수분리법을 이용하여  $y(x,t) = w(x)e^{i\omega_j t}$ 와 같이 표현할 수 있으며, 여기서  $\omega_j$ 는 보의 고유진동수를 나타내며,  $w(x)$ 는 크랙에 의하여 분할되는 보의 각 구간에 대하여 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} w_1(x) &= A_1 \cos(\lambda_1 x) + A_2 \sin(\lambda_1 x) + A_3 \cosh(\lambda_2 x) \\ &\quad + A_4 \sinh(\lambda_2 x) \quad ; (0 \leq x \leq x_c), \\ w_2(x) &= B_1 \cos(\lambda_1 x) + B_2 \sin(\lambda_1 x) + B_3 \cosh(\lambda_2 x) \\ &\quad + B_4 \sinh(\lambda_2 x) \quad ; (x_c \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서

$$\lambda_1 = \left( \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \beta^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_2 = \left( -\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \beta^2} \right)^{1/2} \quad (9)$$

이고,  $\lambda = \frac{P}{EI}$ ,  $\beta^2 = \frac{m\omega_j^2}{EI}$ 이다. 또 끝단질량을 가진 외팔 보의 끝단 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{at } x=0; \quad y(x,t) &= 0, \quad \frac{dy(x,t)}{dx} = 0, \\ \text{at } x=L; \quad \frac{d^2y(x,t)}{dx^2} &= 0, \quad \frac{EI}{dx^3} \frac{d^3y(x,t)}{dx^3} = -M \frac{d^2y(x,t)}{dx^2} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (8)의 미지수들은 식 (6)의 연속조건과 식 (10)의 경계조건을 이용하여 각각 구할 수 있다. 따라서 크랙 위치에 따른 계의 무차원 운동방정식을 각각 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_1'''' + p\eta_1'' + \ddot{\eta}_1 &= 0 \quad (0 \leq \xi \leq \xi_c), \\ \eta_2'''' + p\eta_2'' + \ddot{\eta}_2 &= 0 \quad (\xi_c \leq \xi \leq 1) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 ( $'$ )과 ( $\ddot{\phantom{x}}$ )는 각각 무차원 변위  $\xi$ 와 시간  $\tau$ 에 대한 미분이며, 외팔 보의 무차원 횡변위  $\eta_{1,2}$ 는 일반화 좌표 ( $q_i(\tau)$ )와 식 (8)에 나타낸 보의 고유함수의 조합으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_1(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} w_{1i}(\xi) q_i(\tau), \\ \eta_2(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^{\infty} w_{2i}(\xi) q_i(\tau) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (11), (12)에 사용된 무차원 매개변수는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} t, \quad p = \frac{PL^2}{EI}, \quad \Omega = \frac{\omega_j}{\sqrt{EI/mL^4}}, \\ \eta &= \frac{y}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad \mu = \frac{M}{mL} \end{aligned} \quad (13)$$

또 계의 고유진동수는 식 (11)의 운동방정식을 다음과 같은 고유치의 기본 형태로 변환하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\Lambda \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad |\Lambda| = 0 \quad (14)$$

여기서  $\Lambda$ 는 식 (6)과 식 (10)의 연속조건 및 경계조건을 대입하여 얻은 각각의 식을 행렬형태로 표현한 것이다. 또  $|\Lambda|$ 는  $\Lambda$ 의 행렬식을 나타내고 있으며,  $\mathbf{X}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{X} = [A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4]^T \quad (15)$$

### 3. 수치해석결과 및 고찰

이 연구에서는 수치해석에서 유도된 운동방정식을 이용하여 중동력의 임계값(Euler의 좌굴 임계하중 / 플러터 임계하중) 및 크랙의 영향에 의한 외팔 보의 고유진동수 변화를 수치해석을 통해 비교, 고찰하였다. 수치해석은 Matlab (6.1) 및 Mathematica (5.0)를 이용하여 계산을 수행하였다. 일반적으로 중동력을 받는 외팔 보에서 중동력이 증가할수록 1차 모드 고유진동수는 서서히 증가하고, 2차 모드 고유진동수는 감소하는데 두 모드의 고유진동수가 일치하는 점의 중동력 값이 바로 그 계의 플러터 불안정을 유발하는 임계 중동력( $p_{cr}$ ) 값이다.

Fig. 2는 집중 중동력을 받는 단순지지 보의 경우 크랙의 영향에 의한 보의 불안정(좌굴)을 일으키는 임계 중동력 및 1차 진동모드의 고유진동수 변화를 도시한 것이다. 이때 크랙의 위치  $\xi_c = 0.3$ 이다. 크랙의 존재 유무에 관계없이 좌굴 임계값은  $p_{cr} = \pi^2$ 로 항상 일정한 값을 가짐을 알 수 있다. 이 임계값은 크랙이 없는 경우, 중동력이 작용하는 단순지지 보에 불안정을 유발하는 임계 중동력 값과 동일한 값<sup>(11)</sup>으로써 이 연구에서 사용한 수치해석 과정과 방법이 타당함을 간접적으로 판단할 수 있다. 크랙을 가진 보 구조물의 일반적인 결과와 마찬가지로 크랙의 크기와 고유진동수는 서로 반비례하는 경향을 보이고 있다.

Fig. 3은 끝단질량이 없는 경우 크랙의 영향 즉, 크랙의 크기와 위치의 변화에 따른 계의 임계 중동력 값의 변화를 나타낸 것이다. 여기서 크랙이 없는 경우 무차원 임계 중동력  $p_{cr} = 20.05$ 로 다른 연구결과와 완전히 일치한다<sup>(1,7)</sup>. Fig. 3(a)의 결과를 보면 크랙의 크기가 0.5이고 그 위치가 보의 0.4인 곳에 존재할 때 가장 높은 임계 중동력을 가지며, Fig. 3(b)에서 크랙의 크기가 0.5인 경우 보 위에 크랙이 위치하는 범위가  $0.12 < \xi_c < 0.6$ 일 때는 크랙이 존재하지 않는 경우의 임계유속 값(20.05)에 비하여 큰 임계 중동력 값을 가지지만 그 이외의 위치에 존재하는 경우는 더 작은 임계유속 값을 가짐을 알 수 있다. 즉, 크랙이 존재하는 위치에 따라 완전히 상이한 결과를 초래할 수 있음을 알 수 있다. 이러한 현상은

집중 중동력이 작용하는 경우 외팔 보의 모드형상과 곡률 모양의 영향에 의한 결과임을 알 수 있다<sup>(7)</sup>.

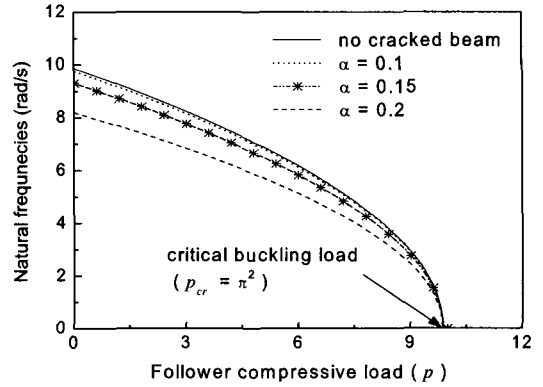
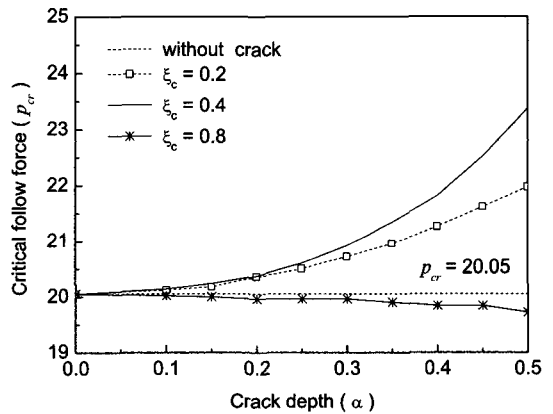
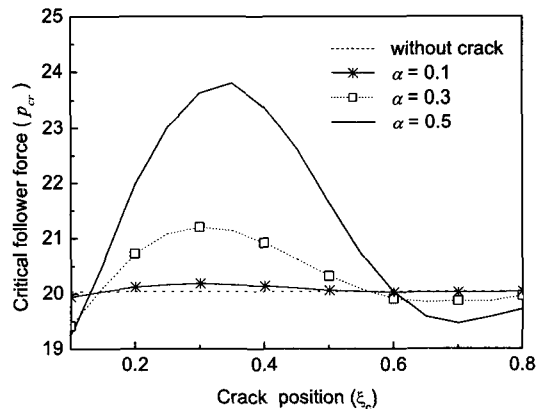


Fig. 2 Natural frequency of cracked simply supported beam under follower force(first mode)

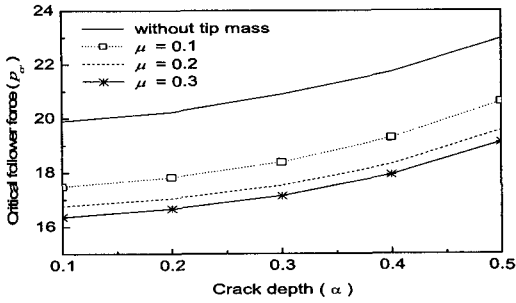


(a) Effect of crack depth

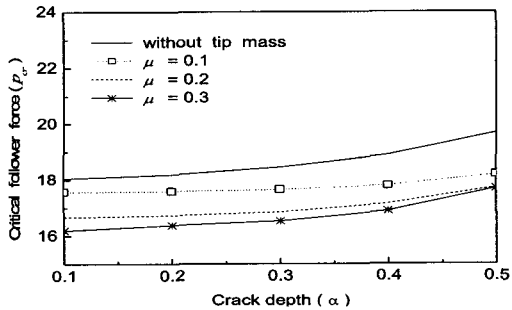


(b) Effect of crack position

Fig. 3 Critical follower force versus crack effects for without tip mass

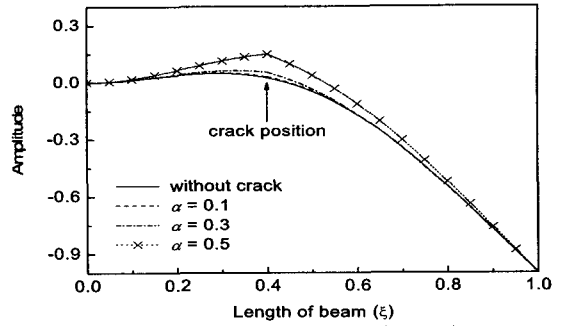


(a)  $\xi_c = 0.4$

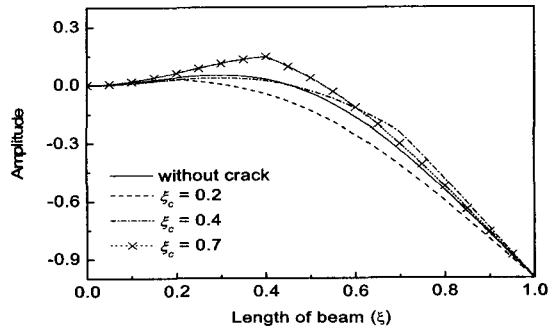


(b)  $\xi_c = 0.6$

Fig. 4 Critical follower force versus crack effects for with tip mass

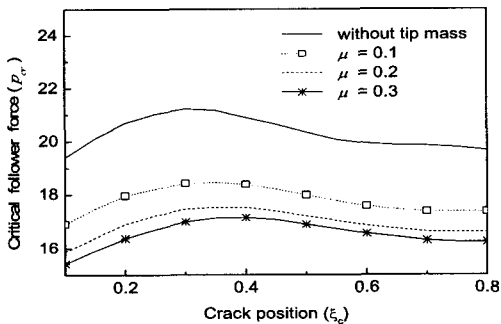


(a) Effect of crack depth ( $\xi_c = 0.4$ )

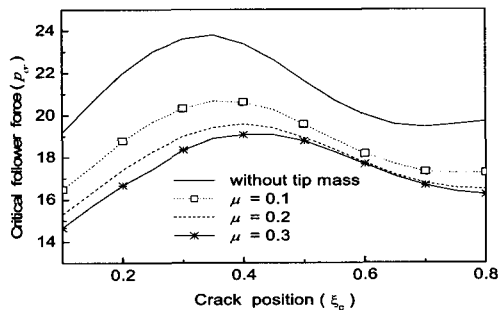


(b) Effect of crack position ( $\alpha = 0.5$ )

Fig. 6 First mode shape of cantilever beam without tip mass at value of critical follower force



(a)  $\alpha = 0.3$



(b)  $\alpha = 0.5$

Fig. 5 Critical follower force versus crack effects for with tip mass

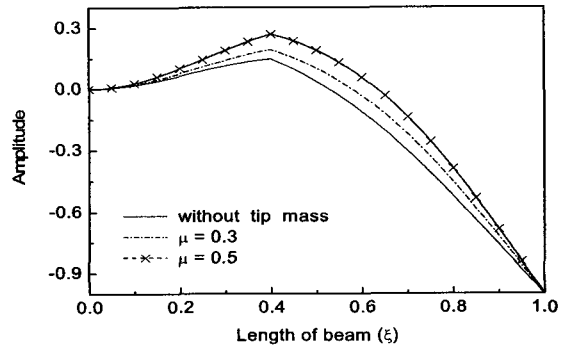


Fig. 7 First mode shape of cantilever beam with tip mass ( $\xi_c = 0.4, \alpha = 0.5$ )

Fig. 4는 끝단질량이 존재하는 경우 크랙의 깊이  
에 따른 임계 중동력의 변화를 보여주고 있다. Fig.  
4(a)는 크랙의 위치가 보의 0.4인 위치에 있을 때,  
그리고 Fig. 4(b)는 0.6인 위치에 크랙이 존재할 때  
의 결과이다. 전반적으로 크랙의 위치와 끝단질량의  
크기에 무관하게 크랙의 크기와 임계 중동력 값은  
서로 비례적인 경향을 보인다. 또 끝단 질량의 존재  
는 보의 임계 중동력 값을 낮아지게 하는 역할을 한

다. Fig. 4(b)의 크랙의 위치가 보의 0.6인 지점에 위치하는 경우 무차원 끝단질량의 크기가 0.3일 때 끝단 질량이 존재하지 않는 경우에 비하여 임계 종동력은 약 10.4% 정도 낮아진다.

Fig. 5는 끝단질량이 존재하는 경우 크랙의 위치에 따른 임계 종동력의 변화를 도시하고 있다. Fig. 5(a)와 (b)는 각각 크랙의 크기가 0.3, 0.5인 경우의 임계 종동력이다. 크랙의 크기에 관계없이, 끝단질량이 클수록 최고 임계 종동력 값을 나타내는 크랙의 위치가 보의 오른쪽으로 이동되어 짐을 알 수 있다. 또 임계 종동력과 끝단질량은 서로 반비례적인 경향을 보인다.

Fig. 6과 Fig. 7은 임계하중이 작용하는 경우 크랙과 끝단질량의 영향에 의한 1차 모드의 모드형상을 도시한 것이다. 진폭은 모두 1로 정규화 하였다. 크랙이 존재하는 보의 위치에서 약간의 모드형상의 변화가 생기는 것을 확인할 수 있다. 이러한 현상은 크랙의 위치가 보의 앞부분에 존재할수록, 크랙의 크기가 클수록 더욱 확연히 나타난다.

#### 4. 결 론

단순지지 및 외팔 보 형태의 크랙을 가진 보에 종동력과 끝단질량이 존재하는 경우 보 시스템의 안정성, 즉 임계 종동력(좌굴/ 플러터)의 변화에 미치는 크랙의 영향과 끝단질량의 영향에 대하여 수치해석 하였다. 또 임계하중이 작용하는 경우 크랙 및 끝단질량의 영향에 의한 1차 모드형상을 도시하였다. 집중 종동력이 작용하는 단순 지지보에 크랙이 존재하는 경우, 임계하중은 크랙과 관계없이 항상 일정한 임계 값을 가짐을 확인 할 수 있었다. 또한 종동력을 받는 외팔 보의 경우 크랙의 위치가 크랙이 파이프의 일정범위에 존재하는 경우(약  $0.12 < \xi_c < 0.6$ )는 크랙의 영향으로 인하여 임계 종동력이 커지며, 다른 범위에서는 오히려 임계 종동력이 작아진다. 이것은 크랙의 존재 시 그 존재하는 위치가 계의 안정성에 매우 중요한 인자로 작용함을 판단할 수 있다. 또 끝단질량의 존재는 임계 종동력을 낮아지게 하는 역할을 하며 크랙의 크기가 작을수록 임계 종동력은 작은 값을 가진다.

앞으로 끝단질량 및 크랙이 존재하는 외팔 보의 안정성에 관한 실험적 연구를 진행할 것이다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Beck, M., 1952, "Die Knicklast des Einseitig Eingespannten Tangential Gedrückten Stabes", ZAMP, Vol. 3, pp. 225~228.
- (2) Datta, P. K. and Lal, M. K., 1992, "Parametric Instability of a Non-prismatic Bar with Localized Damage Subjected to an Intermediate Periodic Axial Load", Computer and Structures, Vol. 4, No. 6 pp. 1199~1202.
- (3) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., 1996, "Harmonic Analysis of The Vibrations of a Cantilevered Beam with a Closing Crack", Computers and Structures, Vol. 61, No. 6, pp. 1057~1074.
- (4) Takahashi, I., 1997, "Vibration and Stability of a Cracked Shaft Simultaneously Subjected to a Follower Force with an Axial Force", Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 35, No. 23, pp.3071~3080.
- (5) Takahashi, I., 1999, "Vibration and Stability of Non-uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force", Computers and Structures, Vol. 71, pp. 585~591.
- (6) Liu, D., Gurgenci, H. and Veidt, M., 2003, "Crack Detection in Hollow Section Structures Through Coupled Response Measurements", Journal of Sound and Vibration, Vol. 261, pp.17~29.
- (7) Wang, Q., 2004, "A Comprehensive Stability Analysis of a Cracked Beam Subjected to Follower Compression", Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp. 4875~4888.
- (8) Dado, M. H. F. and Abuzeid, O., 2003, "Coupled Transverse and Axial Vibration Behaviour of Cracked Beam with End Mass and Rotary Inertia", Journal of Sound and Vibration, Vol. 261, pp. 675~696.
- (9) Yoon, H. K, Son, I. S. and Ahn, T. S., 2007, "Stability Analysis of Pipe Conveying Fluid with Crack", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 1, pp. 10~16.
- (10) Paidoussis, M. P., 1998, Fluid-structure Interactions (Volume 1), Academic Press.
- (11) Igor, A. K. and Olga, I. L. 2001, Formulas Structural Dynamics, Mc-Graw Hill, New York.