다차원 토러스 네트워크의 고장지름과 서로소인 경로들

(Fault Diameter and Mutually Disjoint Paths in Multidimensional Torus Networks)

김 희 철 † 임 도 빈 †† 박 정 흠 †††
(Hee-Chul Kim) (Do-Bin Im) (Jung-Heum Park)

요 약 상호연결망은 그래프로 모델링 할 수 있다: 노드는 정점으로 대응시키고, 링크는 에지로 대응시킨다. 상호연결망(그래프)의 지름은 서로 다른 모든 두 정점 사이의 최단경로 길이 중 최대이다. 상호연결망의 고장지름이란 연결도-1 개 이하의 임의의 정점에 고장이 있을 경우, 이들 고장 정점들을 제거한 연결망에서 모든 두 정점사이의 최단경로 길이 중 최대이다. 지름이 3이상이고 연결도가 r인 $r-$정규(regular) 그래프의 고장지름은 지름+1이상이다. 이 논문에서는 $m,n \geq 3$인 2-차원 $m \times n$ 토러스에서 $m=3$ 혹은 $n=3$일 때 고장지름은 $\max(m,n)$이고, $m,n>3$일 때 고장지름은 지름+1임을 보인다. 그리고 $k_i \geq 3(1 \leq i \leq d)$이고 $d \geq 3$인 $d-$차원 $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_d$ 토러스에서 서로 다른 임의의 두 정점 사이에 길이가 지름+1이하인 서로소인 경로들이 $2d$ 개 존재함을 보인다. 두 정점 u와 v 사이의 서로소인 경로들이란, 공통의 정점들이 u와 v만 있는 경로들을 말한다. 이들 서로소인 경로들을 이용하여 $k_i \geq 3$ $(1 \leq i \leq d)$이고 $d \geq 3$인 $d-$차원 $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_d$ 토러스의 고장지름이 지름+1임을 보인다.

키워드 : 토러스 네트워크, 지름, 고장지름, 서로소인 경로들

Abstract An interconnection network can be represented as a graph where a vertex corresponds to a node and an edge corresponds to a link. The diameter of an interconnection network is the maximum length of the shortest paths between all pairs of vertices. The fault diameter of an interconnection network G is the maximum length of the shortest paths between all two fault-free vertices when there are $\kappa(G)-1$ or less faulty vertices, where $\kappa(G)$ is the connectivity of G. The fault diameter of an r-regular graph G with diameter of 3 or more and connectivity r is at least $diam(G)+1$ where $diam(G)$ is the diameter of G. We show that the fault diameter of a 2-dimensional $m \times n$ torus with $m,n \geq 3$ is $\max(m,n)$ if $m=3$ or $n=3$; otherwise, the fault diameter is equal to its diameter plus 1. We also show that in $d(\geq 3)$-dimensional $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_d$ torus with each $k_i \geq 3$, there are $2d$ mutually disjoint paths joining any two vertices such that the lengths of all these paths are at most diameter+1. The paths joining two vertices u and v are called to be mutually disjoint if the common vertices on these paths are u and v. Using these mutually disjoint paths, we show that the fault diameter of $d(\geq 3)$-dimensional $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_d$ torus with each $k_i \geq 3$ is equal to its diameter plus 1.

Key words : torus networks, diameter, fault diameter, mutually disjoint paths

1. 서 론

다중 컴퓨터시스템에 대한 상호연결망으로 하이퍼큐브, 메시, 토러스, 재귀원형군, 스타그래프 등의 여러 위상 구조가 제시되어 왔다. 상호연결망은 그래프로 모델링 할 수 있다: 정점은 노드를 나타내고, 에지는 통신 링크를 나타낸다. 상호연결망을 평가하는 척도 중의 하나로 연결도가 있다. 그래프 G의 연결도가 κ라는 것은 G에서 임의의 $\kappa-1$개 혹은 그 이하의 정점에 고장이

· 이 연구는 한국외국어대학교 교내학술연구비의 지원에 의하여 이루어진 것임

† 정 회 원 : 한국외국어대학교 컴퓨터및정보통신공학부 교수
hckim@hufs.ac.kr
†† 정 회 원 : 한국외국어대학교 컴퓨터및정보통신공학부
dobin@san.hufs.ac.kr
††† 종신회원 : 가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부 교수
j.h.park@catholic.ac.kr

논문접수 : 2005년 12월 21일
심사완료 : 2007년 3월 20일

발생하더라도 이 그래프가 분리되지 않으며, 또한 G가 연결되지 않도록 하는 κ개의 고장인 정점들의 집합이 있다는 것을 의미한다. 상호연결망을 평가하는 다른 척도로서, 두 정점 사이에 메시지 전달시간과 관련이 있는 지름이 있다. 상호연결망의 지름은 서로 다른 모든 두 정점사이의 최단경로 길이 중 최대 값을 말한다. 정점이나 에지에 고장이 있는 경우를 고려하는 연결망과 관련하여 고장지름[1-7], 길이가 긴 경로 및 사이클[8-10], 경로커버[11,12] 등의 연구가 있다. 상호연결망의 고장지름이란 연결도보다 적은 개수의 임의의 정점들에 고장이 났을 때, 이들 고장 정점들을 제거한 연결망에서 서로 다른 모든 두 정점사이의 최단경로 길이 중 최대이다. 고장지름과 관련한 주요한 연구는 고장지름이 지름에 비하여 얼마나 증가하는가를 분석하는 것이다. 길이가 긴 경로 및 사이클에 관한 연구는 고장인 원소(정점이나 에지)들을 제외한 연결망에서 두 정점 사이에 얼마나 긴 경로가 존재하는지, 얼마나 긴 사이클이 존재하는지, 해밀톤 연결성을 가지는지 등에 대하여 분석하는 것이다. 경로커버 연구는 정점이나, 에지에 고장이 있을 경우, 고장이 아닌 정점들을 여러 개의 경로로 커버하는 것에 관하여 분석하는 것이다. 이 논문에서는 고장지름에 대한 연구로서, 상호연결망 중의 하나인 토러스[13-15]의 고장지름을 분석한다.

지름이 3 이상이고 연결도가 r인 $r-$정규 그래프의 고장지름은 지름+1 이상인데, 하이퍼큐브, cube-connected cycle, 스타그래프, k-ary r-큐브, 재귀원형군 $G(2^m,4)$ 등의 고장지름은 지름+1이다[1-6]. 하이퍼큐브의 변형인 r-차원 twisted cube의 고장지름은 r의 값에 따라 지름+1 혹은 지름+2이다[7].

토러스와 관련한 고장지름에 관한 연구로 k-ary $n-$큐브가 있다. k-ary $n-$큐브는 토러스의 특수한 형태로서 각 차원의 크기가 모두 k인 $n-$차원 토러스 즉 $k\times k\times\ldots\times k$인 토러스로서, 고장지름은 지름+1로 알려져 있다[1]. 이 논문에서는 k-ary $n-$큐브를 확장하여 각 차원의 크기가 3이상인 임의의 자연수인 토러스의 고장지름을 분석한다. 두 정점 u,v 사이의 두 경로 P_1, P_2에 대하여 P_1과 P_2상에 공통으로 있는 정점들이 u와 v만 있을 때, 이들 두 경로는 서로 소라고 말한다. 연결도가 κ인 그래프의 고장지름이 l 이하임을 보이기 위하여, 임의의 두 정점사이에 길이가 l 이하인 서로 소인 경로들이 κ개 있음을 보이면 된다. 왜냐하면 두 정점 u, v 사이의 길이가 l 이하인 서로 소인 경로들이 κ개 있으면, $\kappa-1$ 개 이하의 정점들에 고장이 났을 경우 이들 경로 중 하나는 고장이 없고 이 경로의 길이는 l 이하가 되기 때문이다. $d(\ge 2)$-차원 토러스는 연결도가 $2d$로서, 고장지름을 보이기 위하여 임의의 두 정점 사이의 서로 소인 $2d$ 개의 경로들을 구성하고 이들 경로들의 길이를 분석한다.

2장에서는 표기와 용어를 소개하고 3장에서는 2-차원 토러스의 고장지름을 분석한다. 4장에서는 일반적인 d-차원 토러스에서 고장지름을 분석하고, 마지막으로 5장에서 결론을 기술한다.

2. 표기와 용어

d-차원 $k_1\times k_2\times\cdots\times k_d$ 토러스는 모든 k_i $(1\le i\le d)$가 3 이상으로, $k_1\times k_2\times\cdots\times k_d$개의 정점으로 구성되어 있으며, 각 정점은 $1\le i_j\le k_j(1\le j\le d)$인 $v_{i_1,i_2,\cdots,i_d}$로 나타낸다. 어떤 $p(1\le p\le d)$에 대하여 $i'_p=i_p(\mathrm{mod}\ k_p)+1$이고, p가 아닌 모든 $j(1\le j\ne p\le d)$에 대하여 $i'_j=i_j$이면, 두 정점$v_{i_1,i_2,\cdots,i_d}$와 $v_{i'_1,i'_2,\cdots,i'_d}$는 인접하다. d-차원 $k_1\times k_2\times\cdots\times k_d$ 토러스는 $2d$-정규 그래프로서 연결도가 $2d$이고, 지름은 $\sum_{i=1}^{d}\lfloor k_i/2\rfloor$이다. 앞으로 d-차원 $k_1\times k_2\times\cdots\times k_d$ 토러스는 $T(k_1,k_2,\cdots,k_d)$로 표기한다. 그림 1은 3-차원 토러스 $T(3,4,3)$를 보여준다.

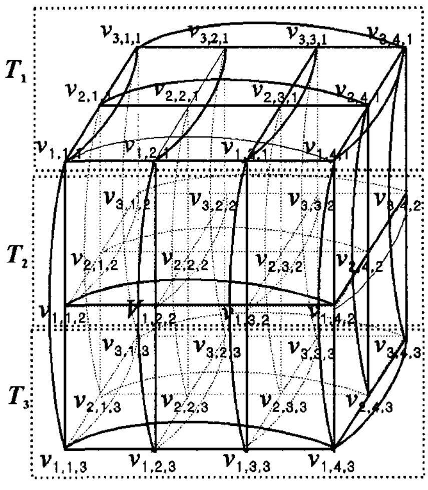

그림 1 $T(3,4,3)$

$d-$차원 토러스 $T(k_1,k_2,\cdots,k_d)$는, $d-1$-차원 토러스 $T(k_1,k_2,\cdots,k_{d-1})$와 길이가 k_d인 사이클 C_{k_d}의 그래프곱(graph product)인 $T(k_1,k_2,\cdots,k_{d-1})\times C_{k_d}$와 동형(isomorphic)이다. 즉, $T(k_1,k_2,\cdots,k_d)$는 $C_{k_1}\times C_{k_2}\times\ldots C_{k_d}$와 동형이다. 여기서 $C_{k_i}(1\le i\le k)$는 길이가 k_i 인 사

이클이다. 그리고, $k_1,k_2,...,k_d$의 임의의 순열 $k'_1,k'_2,...,k'_d$에 대하여, $T(k'_1,k'_2,...,k'_d)$는 $T(k_1,k_2,...,k_d)$와 동형이다. 또한 d-차원 토러스 $T(k_1,k_2,\cdots,k_d)$는 정점 대칭(vertex symmetric)이다. 토러스의 다른 대칭적 성질로 다음이 있다.

성질 1. $d \geq 2$이고 $k_i \geq 3(1 \leq i \leq d)$인 d-차원 토러스 $T(k_1,k_2,\cdots,k_d)$에서 정점들 사이에 다음과 같은 대칭적 성질이 있다: $2 \leq i_j \leq k_j(1 \leq j \leq d)$인 정점 $v_{i_1,i_2,\cdots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\cdots,i_d}$에 대하여, $\phi(v_{1,1,\ldots,1})=v_{1,1,\ldots,1}$이고 $\phi(v_{i_1,i_2,\cdots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\cdots,i_d})=v_{i_1,i_2,\cdots,i_{j-1},k_j-i_j+2,i_{j+1},\cdots,i_d}$인 automorphism ϕ가 존재한다.

위의 성질은 $v_{1,1,\ldots,1}$에 대하여, $2 \leq i_j \leq k_j$인 정점 $v_{i_1,i_2,\cdots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\cdots,i_d}$는 정점 $v_{i_1,i_2,\cdots,i_{j-1},k_j-i_j+2,i_{j+1},\cdots,i_d}$와 대칭적인 관계에 있음을 보여준다. 정점 $w=v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\ldots,i_d}$에서 $i_j(1 \leq j \leq d)$를 정점 w의 j-차원 인덱스라 부른다. j-차원 인덱스가 a인 정점들로 이루어진 토러스를 j-차원이 a인 토러스라 부른다. 다시 말하면, j-차원이 a인 토러스는 j차원 인덱스가 a인 정점들의 집합 $V_a=\{v_{i_1,i_2,\cdots,i_{j-1},a,i_{j+1},\cdots,i_d} \mid 1 \leq i_p \leq k_p, p \neq j$ 이고, $1 \leq p \leq d\}$에 의하여 유도(reduced)되는 부그래프로서 이는 $d-1$-차원 토러스 $T(k_1,k_2,...,k_{j-1},k_{j+1},...,k_d)$와 동형이다. 그래프 $G=(V,E)$에서, 정점들의 부분집합 V'에 의하여 유도되는 부그래프는 정점집합이 V'이고 에지집합 $E'=\{(v,w)\in E|v,w\in V'\}$인 그래프로 정의된다. 그림 1의 3차원 토러스 $T(3,4,3)$에서 T_1, T_2, T_3은 각각 3-차원 인덱스가 1, 2, 3인 토러스들로서 $T(3,4)$와 동형이다. 정점 $w=v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\ldots,i_d}$에 대하여, w를 j-차원의 인덱스가 a인 토러스에 w를 투사한 정점은 정점 $v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},a,i_{j+1},\ldots,i_d}$로 정의된다. 예를 들어, 그림 1의 3-차원 토러스 $T(3,4,3)$에서 $w=v_{1,3,3}$를 3-차원이 1인 토러스에 투사한 정점은 $v_{1,3,1}$이고 3-차원이 2인 토러스에 투사한 정점은 $v_{1,3,2}$이다.

$j(1 \leq j \leq d)$, $p(1 \leq p \leq k_j)$와 정점 $w=v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\ldots,i_d}$에 대하여, $p>i_j$일 경우 $P[w;j(p)]$는 w로부터 j-차원의 인덱스가 1씩 증가하여 j-차원 인덱스가 p인 정점까지 가는 경로를, $p<i_j$일 경우 $P[w;j(p)]$는 w로부터 j차원의 인덱스가 1씩 감소하여 j-차원 인덱스가 p인 정점까지 가는 경로를 나타낸다. 두 정점 사이의 경로를 이 경로 상에 있는 일련의 정점들로 나타낼 때,

$p>i_j$인 경우,

$P[w;j(p)]=(v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\ldots,i_d},v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},i_j+1,i_{j+1},\ldots,i_d},$ $v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},i_j+2,i_{j+1},\ldots,i_d},\ldots,v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},p,i_{j+1},\ldots,i_d})$이고 $p<i_j$인 경우,

$P[w;j(p)]=(v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},i_j,i_{j+1},\ldots,i_d},v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},i_j-1,i_{j+1},\ldots,i_d},$ $v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},i_j-2,i_{j+1},\ldots,i_d},\ldots,v_{i_1,i_2,\ldots,i_{j-1},p,i_{j+1},\ldots,i_d})$이다.

두 정점 u, v에 대하여, $dist(u,v)$는 u로부터 v까지의 최단경로의 길이를 나타낸다. 경로를 일련의 정점들로 나타낼 때, 같은 정점을 연속하여 나열하기도 한다. 경로의 표현에서, 같은 정점이 연속하여 나올 때 이들은 하나의 정점으로 간주한다. 예를 들어, 토러스 $T(10,9,8)$의 경로 $(v_{1,1,1},P[v_{10,1,1};1(8)],P[v_{8,1,1};3(4)],v_{8,2,4})$에서 $P[v_{10,1,1};1(8)]$의 마지막 정점은 $v_{8,1,1}$이고 $P[v_{8,1,1};3(4)]$의 시작정점도 $v_{8,1,1}$이다. 이 경로의 표현에서 $v_{8,1,1}$이 연속하여 나오는데, 이 경로는 $(v_{1,1,1},v_{10,1,1},v_{9,1,1},v_{8,1,1},v_{8,1,2},v_{8,1,3},v_{8,1,4},v_{8,2,4})$를 의미한다. 경로 P에 대하여 $|P|$는 경로 P의 길이, 즉 P상에 있는 에지들의 개수를 나타낸다. k개의 경로들 $P_1,P_2,...,P_k$에 대하여 $l(P_1,P_2,...,P_k)$는 이들 경로들 중 가장 긴 길이를 나타낸다. 즉, $l(P_1,P_2,...,P_k)=\max_{1 \leq i \leq k}|P_i|$이다. 토러스 $T(k_1,k_2,...,k_d)$의 지름은 $diam(T(k_1,k_2,\cdots,k_d))$로 표기한다. 특별히 정의되지 않는 용어는 [16]을 따른다.

3. 2-차원 토러스의 고장지름

2-차원 $m \times n$ 토러스는 연결도가 4이고 지름은 $\lfloor m/2 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor$이다. 2-차원 토러스의 고장지름을 분석하기 위하여 임의의 두 정점 u, v사이에 서로 소인 4개의 경로를 구하여 이들 경로의 최대 길이를 분석한다. 2-차원 토러스 $T(m,n)$의 고장지름은 m과 n중 하나가 3일 경우와, m과 n 모두 3보다 클 경우로 나누어 분석한다. 먼저 m과 n중 하나가 3일 경우 고장지름은 $\max(m,n)$임을 보인다.

정리 1. $m=3$ 혹은 $n=3$인 2-차원 토러스 $T(m,n)$의 고장지름은 $\max(m,n)$이다.

증명. 일반성을 잃지 않고, $m=3$이라 가정하고 고장지름이 n임을 보이면 된다. 먼저 고장지름이 n 이상임을 보인다. 2-차원 토러스 $T(3,n)$는 연결도가 4이다. 고장 정점들이 $\{v_{1,2},v_{2,1},v_{3,1}\}$일 경우, $v_{1,1}$와 $v_{2,2}$사이의 최단경로는 $(v_{1,1},v_{1,n},v_{2,n},v_{2,n-1},v_{2,n-2},...,v_{2,3},v_{2,2})$이고 길이는 n이다. 그러므로 고장지름은 n이상이다. 이제 고장지름이 n이하임을 보이기 위하여 임의의 두 정점 u와 v사이에 길이가 n이하인 서로 소인 4 개의 경로 P_1, P_2, P_3, P_4를 구한다. 2-차원 토러스는 정점 대칭

적이므로, $u=v_{1,1}$이라 가정한다. $v=v_{i,j}(\neq u)$라 하자. 성질 1에 의하여 $i\leq 2$, $j\leq \lfloor n/2 \rfloor +1$인 경우만 고려하면 된다.

경우 1: $i=1$

$P_1=P[v_{1,1};2(j)]$, $P_2=(v_{1,1},P[v_{2,1};2(j)],v_{1,j})$,

$P_3=(v_{1,1},P[v_{1,n};2(j)])$, $P_4=(v_{1,1},P[v_{3,1};2(j)],v_{1,j})$.

경우 2: $i=2$이고 $j\neq 1$

$P_1=(P[v_{1,1};2(j)],v_{2,j})$, $P_2=(v_{1,1},P[v_{2,1};2(j)])$,

$P_3=(v_{1,1},v_{1,n},P[v_{2,n};2(j)]$, $P_4=(v_{1,1},P[v_{3,1};2(j)],v_{2,j})$.

경우 3: $i=2$이고 $j=1$

$P_1=(v_{1,1},v_{1,2},v_{2,2},v_{2,1})$, $P_2=(v_{1,1},v_{2,1})$,

$P_3=(v_{1,1},v_{1,n},v_{2,n},v_{2,1})$, $P_4=(v_{1,1},v_{3,1},v_{2,1})$.

위의 각 경우에 대하여 $l(P_1,P_2,P_3,P_4)\leq n$이다. □

이제 각 차원의 크기가 4 이상인 2-차원 토러스에 대하여 고장지름이 지름+1임을 보인다. 지름이 3 이상이고 연결도가 r인 $r-$정규 그래프의 고장지름은 지름+1 이상이다. 각 차원의 크기가 4 이상인 2-차원 토러스는 지름이 3이상이고 연결도가 4인 4-정규그래프이므로 고장지름이 지름+1 이상이다. 따라서 토러스의 고장지름이 지름+1과 같음을 보이기위해서 고장지름이 지름+1이하임을 보이면 된다. 이를 위하여 두 가지 방법을 고려할 수 있다. 하나의 방법은 임의의 두 정점 u, v 사이에 길이가 지름+1 이하인 서로소인 4개의 경로들을 찾는 것이고, 다른 방법은 3개 이하의 정점들에 고장이 있는 모든 경우에 대하여 u와 v사이에 길이가 지름+1 이하인 경로 하나를 직접 찾는 것이다. 여기서는 주로 전자의 방법을 이용하고, 이 방법을 사용하는 것이 가능하지 않을 경우에 (u와 v의 위치에 따라) 후자의 방법을 이용한다.

정리 2. $m,n\geq 4$인 2-차원 토러스 $T(m,n)$의 고장지름은 $diam(T(m,n))+1$이다.

증명. 고장인 정점이 3개 이하인 경우, 임의의 고장이 아닌 서로 다른 두 정점 u, v 사이에 길이가 지름+1이하인 고장이 아닌 경로가 존재함을 보인다. 일반성을 잃지 않고, $m\leq n$이고 $u=v_{1,1}$이라 가정한다. $v=v_{i,j}(\neq u)$라 하자. 성질 1에 의하여 $i\leq \lfloor m/2 \rfloor +1$, $j\leq \lfloor n/2 \rfloor +1$이라 가정한다. 다음의 경우 1부터 경우 5까지 및 경우 6-1에 대해서는 u 와 v사이에 $l(P_1,P_2,P_3,P_4)\leq diam(T(m,n))+1$인 서로소인 4 개의 경로 P_1,P_2,P_3,P_4가 존재함을 보이고, 경우 6-2에 대해서는 3개 이하의 임의의 정점에 고장이 있을 경우 u와 v사이에 길이가 $diam(T(m,n))+1$이하인 (고장이 아닌) 경로 하나가 존재함을 직접 보인다.

경우 1: $i=\lfloor m/2 \rfloor +1, j=\lfloor n/2 \rfloor +1$ 혹은 $i=\lfloor m/2 \rfloor, j=\lfloor n/2 \rfloor$ (그림 2(a) 참조)

$P_1=(P[v_{1,1};2(j)],P[v_{1,j};1(i)])$,

$P_2=(P[v_{1,1};1(i)],P[v_{i,1};2(j)])$,

$P_3=(v_{1,1},P[v_{1,n};1(i)],P[v_{i,n};2(j)])$,

$P_4=(v_{1,1},P[v_{m,1};2(j)],P[v_{m,j};1(i)])$.

$|P_1|=|P_2|=dist(v_{1,1},v_{i,j})$이다. $i=\lfloor m/2 \rfloor +1$, $j=\lfloor n/2 \rfloor +1$이면 $|P_3|,|P_4|\leq dist(v_{1,1},v_{i,j})+1$이다. $i=\lfloor m/2 \rfloor, j=\lfloor n/2 \rfloor$ 이면 $|P_3|,|P_4|\leq dist(v_{1,1},v_{i,j})+3$인데, $dist(v_{1,1},v_{i,j})=diam(T(m,n))-2$이다. 따라서 $l(P_1,P_2,P_3,P_4)\leq diam(T(m,n))+1$이다.

경우 2: $i=\lfloor m/2 \rfloor +1$, $1<j\leq \lfloor n/2 \rfloor$ (그림 2(b) 참조)

$m,n\geq 4$이므로 $i\geq 3$, $j+1<n$이다.

$P_1=(P[v_{1,1};2(j+1)],P[v_{1,j+1};1(i)],v_{i,j})$,

$P_2=(v_{1,1},P[v_{2,1};2(j)],P[v_{2,j};1(i)])$,

$P_3=(v_{1,1},P[v_{1,n};1(i)],P[v_{i,1};2(j)])$,

$P_4=(v_{1,1},P[v_{m,1};2(j)],P[v_{m,j};1(i)])$.

$i\geq 3$이고 $j+1<n$이므로, 이들 4개의 경로는 서로소이다.

$|P_2|=dist(v_{1,1},v_{i,j})=i+j$이고,

$|P_1|=|P_3|=dist(v_{1,1},v_{i,j})+2$,

$|P_4|=dist(v_{1,1},v_{i,j})+odd(m)$이다. 여기서, m이 짝수이면 $odd(m)=0$이고, m이 홀수이면 $odd(m)=1$이다. $dist(v_{1,1},v_{i,j})\leq diam(T(m,n))-1$이므로,

$l(P_1,P_2,P_3,P_4)\leq diam(T(m,n))+1$이다.

경우 3: $1<i\leq \lfloor m/2 \rfloor$, $j=\lfloor n/2 \rfloor +1$ (그림 2(c) 참조)

이 경우, $i+1<m$, $j\geq 3$이다.

$P_1=(P[v_{1,1};2(j-1)],P[v_{1,j-1};1(i)],v_{i,j})$,

$P_2=(P[v_{1,1};1(i+1)],P[v_{i+1,1};2(j)],v_{i,j})$,

$P_3=(v_{1,1},P[v_{1,n};1(i)],P[v_{i,n};2(j)])$,

$P_4=(v_{1,1},P[v_{m,1};2(j)],P[v_{1,j};1(i)])$.

$j-1>1$, $i+1<m$이므로 이들 4 경로는 서로 소이다. $|P_1|=dist(v_{1,1},v_{i,j})$이고, $|P_2|=|P_4|=dist(v_{1,1},v_{i,j})+2$, $|P_3|=dist(v_{1,1},v_{i,j})+odd(n)$이다. 여기서, n이 짝수이면 $odd(n)=0$이고, n이 홀수이면 $odd(n)=1$이다. $dist(v_{1,1},v_{i,j})\leq diam(T(m,n))-1$이므로, $l(P_1,P_2,P_3,P_4)\leq diam(T(m,n))+1$이다.

경우 4: $1<i\leq \lfloor m/2 \rfloor$, $1<j\leq \lfloor n/2 \rfloor$ (단, $i=\lfloor m/2 \rfloor, j=\lfloor n/2 \rfloor$는 제외) (그림 2(d) 참조)

$P_1=(P[v_{1,1};2(j)],P[v_{1,j};1(i)])$,

$P_2=(P[v_{1,1};1(i)],P[v_{i,1};2(j)])$,

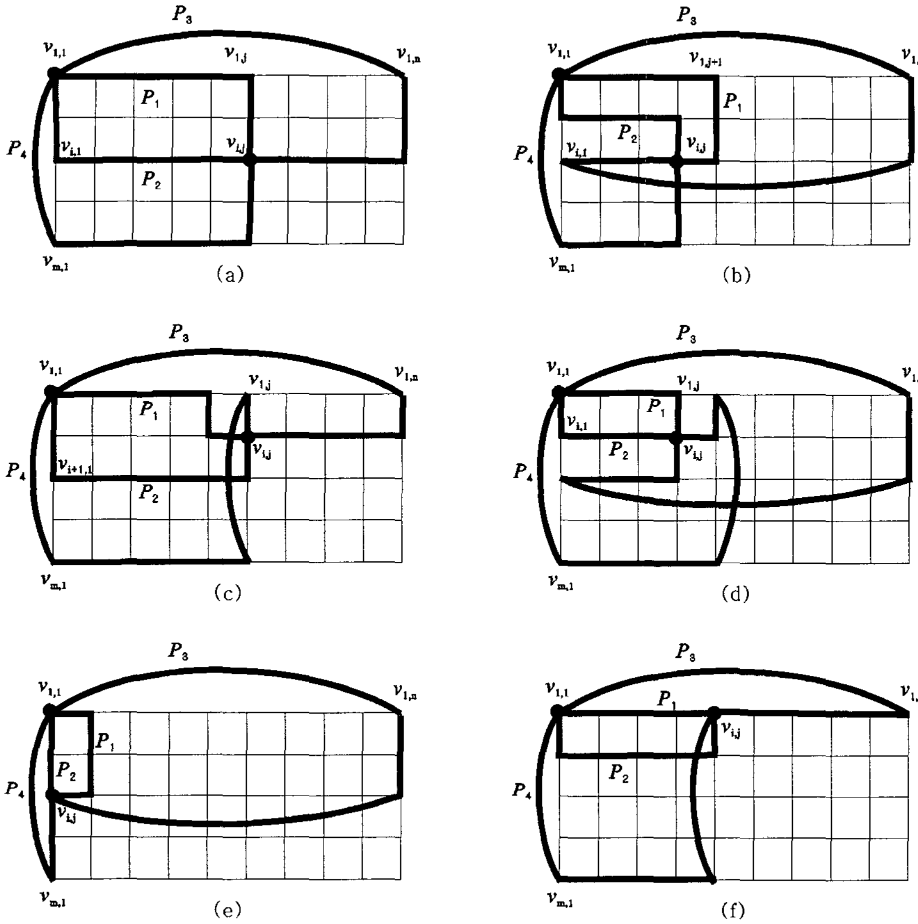

그림 2 2-차원 토러스에서 $v_{1,1}$와 $v_{i,j}$사이의 서로소인 4개의 경로

$P_3 = (v_{1,1}, P[v_{1,n};1(i+1)], P[v_{i+1,1};2(j)], v_{i,j})$,

$P_4 = (v_{1,1}, P[v_{m,1};2(j+1)], P[v_{1,j+1};1(i)], v_{i,j})$.

$i+1<m$, $j+1<n$이므로, 이들 4 경로는 서로 소이다. $|P_1|=|P_2|=dist(v_{1,1},v_{i,j})$이고, $|P_3|=|P_4|=dist(v_{1,1},v_{i,j})+4$이다. $dist(v_{1,1},v_{i,j}) \le diam(T(m,n))-3$이므로, $l(P_1,P_2,P_3,P_4) \le diam(T(m,n))+1$이다.

경우 5: $1<i\le \lfloor m/2\rfloor+1$, $j=1$ (그림 2(e) 참조)

$P_1=(v_{1,1},P[v_{1,2};1(i)],v_{i,1})$, $P_2 = P[v_{1,1},1(i)]$,

$P_3=(v_{1,1},P[v_{1,n};1(i)],v_{i,1})$, $P_4=(v_{1,1},P[v_{m,1};1(i)])$.

$|P_2|=i-1$이고, $|P_1|=|P_3|=i+1$이고, $|P_4|=m-i+1$이다. $1<i\le\lfloor m/2\rfloor+1$이므로 $|P_4|\le m-1$이다. 또한, $m\le n$ 이므로 $diam(T(m,n))=\lfloor m/2\rfloor+\lfloor n/2\rfloor \ge m-1$이다. 따라서 $|P_4|\le diam(T(m,n))$이다. $l(P_1,P_2,P_3,P_4)\le diam(T(m,n))$이다.

경우 6: $i=1$, $1<j\le\lfloor n/2\rfloor+1$

경우 6-1: $\lfloor n/2\rfloor - \lfloor m/2\rfloor +1 \le j \le \lfloor n/2\rfloor+1$인 경우 (그림 2(f) 참조)

$P_1=P[v_{1,1};2(j)]$, $P_2=(v_{1,1},P[v_{2,1};2(j)],v_{1,j})$,

$P_3=(v_{1,1},P[v_{1,n};2(j)])$, $P_4=(v_{1,1},P[v_{m,1};2(j)],v_{1,j})$.

$|P_1|=j-1$이고, $|P_2|=|P_4|=j+1$이고, $|P_3|=n-j+1 \le n-(\lfloor n/2\rfloor-\lfloor m/2\rfloor+1)+1=\lfloor n/2\rfloor+\lfloor m/2\rfloor+odd(n)$. 여기서, n이 홀수이면 $odd(n)=1$이고, n이 짝수이면 $odd(n)=0$이다. 따라서 $l(P_1,P_2,P_3,P_4)\le diam(T(m,n))+1$이다.

경우 6-2: $1<j\le\lfloor n/2\rfloor-\lfloor m/2\rfloor$

이 경우에는 $v_{1,1}$과 $v_{1,j}$사이에 길이가 $diam(T(m,n))+1$ 이하의 서로소인 경로가 4개 존재하지 않을 수도 있다. 따라서 고장인 정점이 3개 이하일 때, 길이가 $diam(T)+1$이하로서 고장인 정점을 지나지 않는 경로가 하나 존재함을 보인다. 이를 위하여, 먼저 다음의 3 경로를 고려한다.

$P_1 = P[v_{1,1};2(j)]$,
$P_2 = (v_{1,1}, P[v_{2,1};2(j)], v_{1,j})$,
$P_3 = (v_{1,1}, P[v_{m,1};2(j)], v_{1,j})$.

이들은 $v_{1,1}$와 $v_{1,j}$사이에 서로소인 경로들로서. $|P_1| = j-1$이고, $|P_2| = |P_3| = j+1$이므로 P_1, P_2, P_3의 길이는 각각 $diam(T)$이하이다. 이들 경로 중 고장인 정점을 지나지 않는 경로가 있다면, 이것이 $v_{1,1}$와 $v_{1,j}$사이에 조건을 만족하는 경로이다. 그렇지 않다면 세 개의 고장이 정점이 P_1, P_2, P_3상에 각각 하나씩 존재한다. 단, $v_{1,1}$와 $v_{1,j}$는 고장이 아니다.

경우 6-2-1: $\{v_{2,1}, v_{m,1}\}$ 중 하나가 고장이 아닌 경우

일반성을 잃지 않고 $v_{2,1}$이 고장이 아니라고 가정한다. $P_4 = (v_{1,1}, v_{2,1}, P[v_{3,1};2(j+1)], v_{2,j+1}, v_{1,j+1}, v_{1,j})$는 고장이 없는 경로이다. $m \ge 4$이므로, $|P_4| = j+5 \le \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor m/2 \rfloor + 5 \le \lfloor n/2 \rfloor + 3 \le diam(T(m,n)) + 1$이다.

경우 6-2-2: $\{v_{2,1}, v_{m,1}\}$가 모두 고장인 경우

P_2에는 고장인 정점이 하나 있고, 이것이 바로 $v_{2,1}$이므로 $v_{2,j}$는 고장이 아닌 정점이다. 따라서 $P_4 = (v_{1,1}, v_{1,n}, v_{2,n}, v_{3,n}, P[v_{3,1};2(j)], v_{2,j}, v_{1,j})$는 고장이 없는 경로이다.

$|P_4| = j+5 \le \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor m/2 \rfloor + 5 \le \lfloor n/2 \rfloor + 3 \le diam(T(m,n)) + 1$이다. □

정리 3. $3 \le m,\ n \le 5$ (단 $\{m,n\} \ne \{3,5\}$)이거나 혹은 $m,\ n \ge 6$인 2-차원 토러스 $T(m,n)$에서 서로 다른 임의의 두 정점 u, v 사이에 길이가 $diam(T(m,n))+1$ 이하의 서로소인 경로가 4개 존재한다.

증명. 일반성을 잃지 않고, $m \le n$이라 가정한다. 또한 $u = v_{1,1}$, $v = v_{i,j}$ $(i \le \lfloor m/2 \rfloor + 1,\ j \le \lfloor n/2 \rfloor + 1)$이라 가정한다.

경우 1: $m=3$

$n=3$일 경우에 $diam(T(m,n)) = 2$이고, $n=4$일 경우에 $diam(T(m,n)) = 3$이다. 정리 1의 증명으로부터, 서로 다른 모든 두 정점 u,v사이에 길이가 $diam(T(m,n))+1$ 이하인 서로소인 경로가 4개 존재함을 쉽게 알 수 있다.

경우 2: $m \ge 4$

정점 $v_{1,1}$로부터 $i=1$, $1 < j \le \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor m/2 \rfloor$인 경우(정리 2 증명의 경우 6-2)를 제외한 임의의 정점 $v_{i,j}$까지 길이가 $diam(T(m,n))+1$이하의 서로소인 경로들이 4개 존재함은 정리 2의 증명에서 보였다. 이제 $i=1$, $1 < j \le \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor m/2 \rfloor$인 경우를 고려한다. $4 \le m,\ n \le 5$일 때, $1 < j \le \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor m/2 \rfloor = 0$가 된다. 이 조건을 만족하는 j가 존재하지 않으므로 따름정리가 성립한다. $m,\ n \ge 6$인 경우, 다음과 같이 서로소인 4 경로 P_1, P_2, P_3, P_4를 구한다.

$P_1 = P[v_{1,1};2(j)]$, $P_2 = (v_{1,1}, P[v_{2,1};2(j)], v_{1,j})$,
$P_3 = (v_{1,1}, v_{1,n}, v_{2,n}, v_{3,n}, P[v_{3,1};2(j+1)], v_{2,j+1}, v_{1,j+1}, v_{1,j})$,
$P_4 = (v_{1,1}, P[v_{m,1};2(j)], v_{1,j})$.

$j+1 < m$이므로, 이들은 u와 v사이의 서로소인 경로들이다. $|P_1| = j-1$이고, $|P_2| = |P_4| = j+1$이므로 P_1, P_2, P_4의 길이는 각각 $diam(T(m,n))$이하이다. $m \ge 6$이므로, $|P_3| = j+7 \le \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor m/2 \rfloor + 7 \le \lfloor n/2 \rfloor + 4 \le \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor m/2 \rfloor + 1$이다. 따라서 P_3의 길이는 $diam(T(m,n))+1$이하이다. □

관찰 1. 2-차원 토러스 $T(3,5)$에서 서로 다른 두 정점 $u = v_{1,1}$와 $v = v_{i,j} (1 \le i \le 2, 1 \le j \le 3)$ 사이에 다음의 경로들이 존재한다.

(a) $i=2$, $j=2$가 아니면, 길이가 $diam(T(3,5))+1(=4)$ 이하의 서로소인 4 개의 경로가 존재한다.

(b) $i=2$, $j=2$이면, 서로소인 4개의 경로들로서 길이가 $diam(T(3,5))-1$인 경로가 2개, 길이가 $diam(T(3,5))$인 경로가 하나, 길이가 $diam(T(3,5))+2$인 경로가 하나 존재한다.

4. 다차원 토러스의 고장지름

$d(\ge 2)$-차원 $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_d$ 토러스 $T(k_1, k_2, \ldots, k_d)$는 연결도가 $2d$이다. 이제 d-차원 $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_d$ 토러스 $T(k_1, k_2, \cdots, k_d)$의 고장지름을 분석한다. 앞서 언급하였듯이 $T(k_1, k_2, \cdots, k_d)$은 $T(k_1, k_2, \ldots, k_{d-1}) \times C_{k_d}$과 동형이다.

보조정리 1. $d \ge 3$이고 모든 $1 \le i \le d$에 대하여 $k_i \ge 3$이라 하자. $(d-1)$-차원 $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_{d-1}$ 토러스 $T(k_1, k_2, \cdots, k_{d-1})$에서 서로 다른 임의의 두 정점 사이에 길이가 $diam(T(k_1, k_2, \ldots, k_{d-1}))+1$이하인 서로소인 $2(d-1)$개의 경로들이 존재한다고 가정하자. 그러면, d-차원 $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_d$ 토러스 $T(k_1, k_2, \cdots, k_d)$에서 서로 다른 임의의 두 정점 사이에 길이가 $diam(T(k_1, k_2, \ldots, k_d))+1$ 이하인 서로소인 $2d$개의 경로들이 존재한다.

증명. 각 차원의 크기는 3 이상이므로, $T(k_1, k_2, \cdots, k_{d-1})$의 지름은 2 이상이다. 따라서 $diam(T(k_1, k_2 \ldots, k_d)) = diam(T(k_1, k_2, \cdots, k_{d-1})) + \lfloor k_d/2 \rfloor \ge \lfloor k_d/2 \rfloor + 2$ 이다. 앞으로 $T(k_1, k_2, \cdots, k_d)$의 지름은 $diam(T)$로 표기한다. $T(k_1, k_2, \cdots, k_d)$의 임의의 서로 다른 두 정점을 u, v라

하자. 토러스 $T(k_1, k_2, \cdots, k_d)$는 정점 대칭이므로 일반성을 잃지 않고 $u = v_{1,1,\ldots,1}$이라 가정한다. $v = v_{i_1, i_2, \ldots, i_d}$라 하자. u에 대한 v의 대칭적 성질(성질 1)에 의하여 $i_d \le \lfloor k_d/2 \rfloor + 1$이라 가정한다. u와 v사이에 길이가 $diam(T)+1$이하의 서로소인 $2d$개의 경로들 $P_1, P_2, \ldots, P_{2d}$가 존재함을 보인다. $1 \le j \le k_d$에 대하여, $V_j = \{v_{x_1, x_2, \ldots, x_d} | x_d = j$이고, $1 \le p \le d-1$에 대하여 $1 \le x_p \le k_p\}$라 하고, V_j에 의하여 유도되는 부그래프를 T_j라 하자. 그러면 T_j는 $d-1$차원 $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_{d-1}$ 토러스와 동형이다. 정점 $v = v_{i_1, i_2, \ldots, i_{d-1}, i_d}$를 T_j에 투사한 정점은 $v = v_{i_1, i_2, \ldots, i_{d-1}, j}$이 된다. $u = v_{1,1,\ldots,1}$는 T_1의 정점이다.

경우 1: $i_d = 1$ (그림 3(a) 참조)

u와 v는 T_1의 정점이다. 가정에 의하여 T_1에서 u와 v사이에 길이가 각각 $diam(T_1)+1$ 이하의 서로소인 $2(d-1)$개의 경로들 $P_1, P_2, \cdots, P_{2(d-1)}$가 존재한다. 나머지 2 경로는 다음과 같이 구한다:

$P_{2d-1} = (u, P', v)$, 여기서 P'는 T_2에서 $v_{1,1,\ldots 1,2}$와 $v_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{d-1}, 2}$사이의 최단경로이다.

$P_{2d} = (u, P'', v)$, 여기서 P''는 T_{k_d}에서 $v_{1,1,\ldots,1,k_d}$와 $v_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{d-1}, k_d}$사이의 최단경로이다.

$|P_{2d-1}|, |P_{2d}| \le diam(T(k_1, k_2, \ldots, k_{d-1})) + 2 \le diam(T)+1$이다. 이들 $2d$ 개의 경로들은 모두 길이가 $diam(T)+1$ 이하인 서로 소인 경로들이다.

경우 2: $1 < i_d \le \lfloor k_d/2 \rfloor + 1$

경우 2.1 $dist(v_{1,1,\ldots,1,1}, v_{i_1 i_2 \ldots, i_{d-1}, 1}) = 0$

(즉, $i_1 = i_2 = \ldots = i_{d-1} = 1$)

u와 인접한 T_1의 정점들의 집합 $N_1(u) = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_{2d-2}\}$라 하자.

경우 2.1.1 $1 < i_d \le \lfloor k_d/2 \rfloor - 2$ (그림 3 (b) 참조)

이 경우에는 $k_d \ge 8$이다.

$1 \le j \le 2d-3$에 대하여, $P_j = (u, P[u'_j; d(i_d)], v)$. 이들 P_j는 길이가 i_d+1로서 $diam(T)$이하이다. 나머지 3 경로는 다음과 같이 구한다. u_{2d-2}의 인접한 T_1의 정점들로서 $N_1(u) \cup \{u\}$에 속하지 않는 두 정점을 x, y라 하자. T_1에서 u_{2d-2}의 분지수가 4이상이므로, 이들 두 정점 x, y가 존재하는 것은 쉽게 알 수 있다. u, u_{2d-2}를 토러스 T_{i_d+1}에 투사한 정점들을 각각 w, z라 하자.

$P_{2d-2} = (u, u'_{2d-2}, P[x; d(i_d+1)], z, w, v)$,

$P_{2d-1} = P[u; d(i_d)]$.

여기서 경로 $P[x; d(i_d+1)]$의 마지막 정점과 z는 인접하다. u'_{2d-2}를 T_{i_d}에 투사한 정점들을 v'라 하자. v'은 T_{i_d}의 정점으로 v와 인접하다. u, u'_{2d-2}, y를 T_{k_d}에 투사한 정점들을 각각 u'', v'', y''이라 하자.

$P_{2d} = (u, u'', v'', y'', P[y; d(i_d)], v', v)$.

경로 쌍 (P_{2d-2}, P_{2d})를 제외한 모든 두 경로가 서로 소임은 명백하다. P_{2d-2}와 P_{2d}가 서로 소가 됨을 보이기 위해서는 $i_d+1 < k_d$임을 보이면 된다. $1 < i_d \le \lfloor k_d/2 \rfloor - 2$이고 $k_d \ge 8$이므로, $i_d+1 < k_d$이다. 이제 경로들의 길이를 분석한다. $1 \le i \le 2d-3$에 대하여 $|P_i| = i_d+1$이다. $|P_{2d-2}| = i_d+5$, $|P_{2d-1}| = i_d-1$, $|P_{2d}| = i_d+5$이다. $d \ge 3$이고, $j(1 \le j \le d)$에 대하여 $\lfloor k_j/2 \rfloor \ge 1$이다. $i_d+5 \le \lfloor k_d/2 \rfloor + 3$이므로 P_{2d-2}, P_{2d-1}, P_{2d}의 길이는 모두 $diam(T)+1$이하이다.

경우 2.1.2 $\lfloor k_d/2 \rfloor - 1 \le i_d \le \lfloor k_d/2 \rfloor + 1$ (그림 3(c) 참조)

$1 \le j \le 2d-2$에 대하여, $P_j = (u, P[u'_j; d(i_d)], v)$. 이들 P_j는 길이가 i_d+1으로서 $diam(T)$이하이다. 나머지 2 경로는 다음과 같이 구한다.

$P_{2d-1} = P[u; d(i_d)]$, $P_{2d} = (u, P[v_{1,1,\ldots,1,k_d}; d(i_d)])$.

P_{2d-1}의 길이는 i_d-1이고 P_{2d}의 길이는 $k_d - i_d + 1 \le \lfloor k_d/2 \rfloor + 3 \le diam(T)+1$이다. 이들 경로들이 서로 소임은 명백하다.

경우 2.2 $dist(v_{1,1,\ldots,1,1}, v_{i_1, i_2, \ldots, i_{d-1}, 1}) = 1$

v를 T_1에 투사한 정점을 v'이라 하자. T_1에서 정점 v'은 u와 인접하다. 가정에 의하여 T_1에서 u와 v'사이에 길이가 $diam(T_1)+1$이하의 서로소인 경로들이 $2d-2$개 존재한다. 이들 경로를 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2d-1}, Q_{2d-2}$라 하자. 이 중 하나는 (u, v')인데, 일반성을 잃지 않고 $Q_{2d-2} = (u, v')$라 한다. 또한 이들 $2d-2$ 개의 경로들 중, 길이가 3 이상인 경로가 존재하는데, $|Q_{2d-3}| \ge 3$이라 하자. 모든 $1 \le j \le 2d-3$에 대하여, u로부터 v'까지의 경로인 Q_j에서 마지막 정점인 v'를 제외한 경로를 Q'_j라 하고, Q'_j의 마지막 정점을 u_j라 하자.

경우 2.2.1 $1 < i_d \le \lfloor k_d/2 \rfloor - 1$ (그림 3(d) 참조)

이 경우에는 $k_d \ge 6$이다. $1 \le j \le 2d-4$에 대하여, $P_j = (Q'_j, P[u_j; d(i_d)], v)$. 이제 나머지 4 경로를 구한다. Q_{2d-3}에서 u 바로 다음의 정점을 u'_{2d-3}이라 하자. $|Q_{2d-3}| \ge 3$이므로, $u_{2d-3} \ne u'_{2d-3}$이다.

$P_{2d-3} = (u, P[u'_{2d-3}; d(i_d+1)], P', v)$, 여기서 P'는 u'_{2d-3}과 v를 T_{i_d+1}에 투사한 두 정점사이에 T_{i_d+1}에서

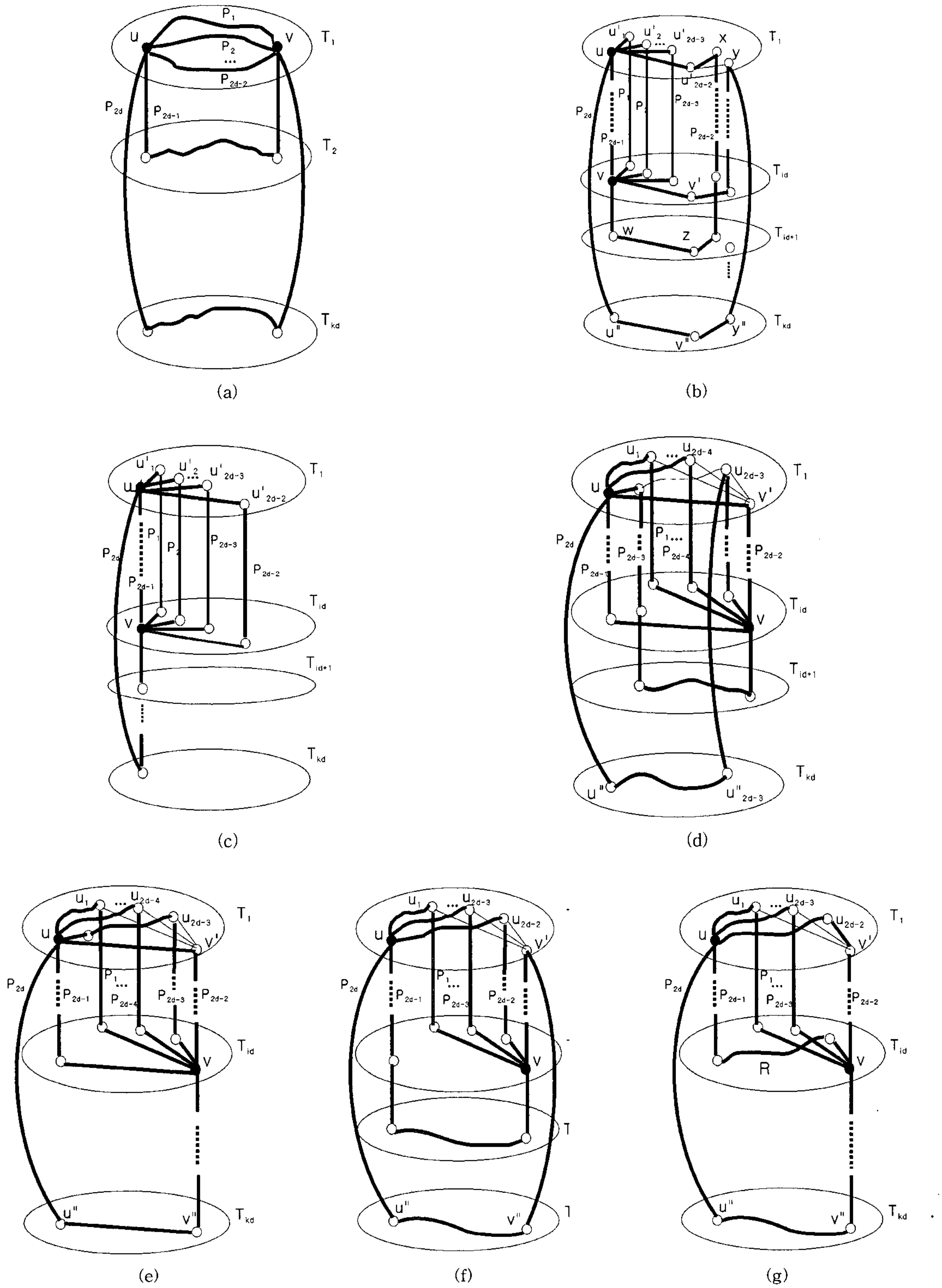

그림 3 d-차원 토러스에서 서로소인 $2d$ 개의 경로들

의 최단경로이다.

$P_{2d-2}=(u,P[v';d(i_d)])$, $P_{2d-1}=(P[u;d(i_d)],v)$.

나머지 하나의 경로는 다음과 같이 구한다. u, u_{2d-3}를 T_{k_d}에 투사한 정점을 각각 u'',u''_{2d-3}이라 하자.

$P_{2d}=(u,P',P[u_{2d-3};d(i_d)],v)$, 여기서 P'는 T_{k_d}에서 u''와 u''_{2d-3}사이의 최단경로이다.

위의 $2d$ 개의 경로들 중, 경로 쌍 (P_{2d-3},P_{2d})를 제외한 모든 두 경로가 서로 소임은 명백하다. $|Q_{2d-3}|\geq 3$이므로, $u_{2d-3}\neq u'_{2d-3}$이다. 따라서 P_{2d-3}와 P_{2d}가 서로 소가 됨을 보이기 위해서는 $i_d+1<k_d$임을 보이면 된다. $1<i_d\leq \lfloor k_d/2 \rfloor -1$이고 $k_d\geq 6$이므로, $i_d+1<k_d$이다. 다음에서 경로들의 길이를 분석한다. $P_j(1\leq j\leq 2d-4)$의 길이 $|P_j|\leq diam(T_1)+i_d \leq diam(T_1)+\lfloor k_d/2\rfloor -1<diam(T)$이다. $|P_{2d-3}|\leq diam(T_{i_d+1})+i_d+2\leq diam(T_{i_d+1})+\lfloor k_d/2\rfloor +1 \leq diam(T)+1$이다. P_{2d-2}, P_{2d-1}의 길이는 각각 i_d로서 $diam(T)$ 이하이다. $|P_{2d}|=diam(T_{k_d})+i_d+2 \leq diam(T_{k_d})+\lfloor k_d/2\rfloor +1\leq diam(T)+1$이다.

경우 2.2.2 $\lfloor k_d/2\rfloor \leq i_d \leq \lfloor k_d/2\rfloor +1$ (그림 3(e) 참조)

$1\leq j\leq 2d-3$에 대하여, $P_j=(Q'_j,P[u_j;d(i_d)],v)$. 이 때, P_j의 길이 $|P_j|=diam(T_1)+i_d\leq diam(T_1)+\lfloor k_d/2\rfloor +1 \leq diam(T)+1$이다. $P_{2d-2}=(u,P[v';d(i_d)])$, $P_{2d-1}=(P[u;d(i_d)],v)$. P_{2d-2}, P_{2d-1}의 길이는 i_d로 $diam(T)$이하이다. 나머지 하나의 경로는 다음과 같이 구한다. u, v를 T_{k_d}에 투사한 정점을 각각 u'',v''라 하자. $dist(v_{1,1,\ldots,1,1},v_{i_1,i_2,\ldots,i_{d-1},1})=1$이므로, T_{k_d}에서 u''과 v''은 인접하다. $P_{2d}=(u,u'',v'',P[v'';d(i_d)])$. 경로 P_{2d}의 길이 $|P_{2d}|=k_d-i_d+2\leq \lfloor k_d/2\rfloor +3\leq diam(T)+1$이다. 이들 $2d$개의 경로들이 서로 소임은 명백하다.

경우 2.3 $dist(v_{1,1,\ldots,1},v_{i_1,i_2,\ldots,i_{d-1},1})\geq 2$

v를 T_1에 투사한 정점을 v'라 하자. 가정에 의하여 T_1에서 u와 v'사이에 길이가 $diam(T_1)+1$이하의 서로소인 경로들이 $2d-2$개 존재한다. 이들 경로를 $Q_1,Q_2,\ldots,Q_{2d-1},Q_{2d-2}$라 하자. 모든 $1\leq j\leq 2d-2$에 대하여, u로부터 v'까지의 경로인 Q_j에서 마지막 정점인 v'를 제외한 경로를 Q'_j라 하고, Q'_j의 마지막 정점을 u_j라 하자.

경우 2.3.1 $1<i_d\leq \lfloor k_d/2\rfloor$ (그림 3(f) 참조)

이 경우에는 $k_d\geq 4$이다.

$1\leq j\leq 2d-2$에 대하여, $P_j=(Q'_j,P[u_j;d(i_d)],v)$.

$P_{2d-1}=(P[u;d(i_d+1)],P',v)$, 여기서 P'는 u와 v를 T_{i_d+1}에 투사한 두 정점 사이에 T_{i_d+1}에서의 최단경로이다.

나머지 하나의 경로는 다음과 같이 구한다. u, v를 T_{k_d}에 투사한 정점을 각각 u'',v''라 하자.

$P_{2d}=(u,P',v',P[v';d(i_d)])$, 여기서 P'는 T_{k_d}에서 u''와 v''사이의 최단경로이다.

v'은 T_1의 정점이고, v'과 v''은 인접하며, $P[v';d(i_d)]$의 마지막 정점이 v임에 유의하라.

경로 쌍 (P_{2d-1}, P_{2d})를 제외한 모든 두 경로가 서로 소임은 명백하다. P_{2d-1}과 P_{2d}가 서로 소가 됨을 보이기 위해서는 $i_d+1<k_d$임을 보이면 된다. $1<i_d\leq \lfloor k_d/2\rfloor$이고 $k_d\geq 4$이므로, $i_d+1<k_d$이다. 이제 경로들의 길이를 분석한다. $1\leq j\leq 2d-2$에 대하여, $|P_j|\leq diam(T_1)+i_d\leq diam(T_1)+\lfloor k_d/2\rfloor =diam(T)$이다.

$|P_{2d-1}|\leq diam(T_{i_d+1})+i_d+1\leq diam(T_{i_d+1})+\lfloor k_d/2\rfloor +1=diam(T)+1$이다.

$|P_{2d}|\leq diam(T_{k_d})+i_d+1\leq diam(T_{k_d})+\lfloor k_d/2\rfloor +1=diam(T)+1$이다.

경우 2.3.2 $i_d=\lfloor k_d/2\rfloor +1$ (그림 3(g) 참조)

$1\leq j\leq 2d-3$에 대하여, $P_j=(Q'_j,P[u_j;d(i_d)],v)$.

$P_{2d-2}=(Q_{2d-2},P[v';d(i_d)])$.

Q_{2d-2}의 정점들을 T_{i_d}에 투사한 정점들에 의한 경로를 R이라 하자.

$P_{2d-1}=(P[u;d(i_d)],R)$.

나머지 하나의 경로는 다음과 같이 구한다. u, v를 T_{k_d}에 투사한 정점을 각각 u'',v''라 하자.

$P_{2d}=(u,P',P[v'';d(i_d)])$, 여기서 P'는 T_{k_d}에서 u''와 v''사이의 최단경로이다.

각 경로의 길이를 분석한다. $1\leq j\leq 2d-1$에 대하여, $|P_j|\leq diam(T_1)+i_d=diam(T_1)+\lfloor k_d/2\rfloor +1 =diam(T)+1$이다. $|P_{2d}|\leq diam(T_{k_d})+k_d-i_d+1 \leq diam(T_{k_d})+\lfloor k_d/2\rfloor +1=diam(T)+1$이다. □

이제 $d\geq 3$인 d-차원 토러스 $T(k_1,k_2,\ldots,k_d)$에서 두 정점 사이의 서로소인 $2d$개의 경로들을 분석한다. 먼저 $n\geq 6$인 3-차원 토러스 $T(3,5,n)$에 대하여 분석한다.

보조정리 2. $n\geq 6$인 3-차원 토러스 $T(3,5,n)$에서 서로 다른 모든 두 정점 사이에 길이가 $diam(T(3,5,n))+1$ 이하인 서로소인 6개의 경로들이 존재한다.

증명. 보조정리 1의 증명과정의 각 경우에 기술한 것

과 같은 방법으로 $u=v_{1,1,1}$와 $v=v_{p,q,r}$사이에 길이가 $diam(T(3,5,n))+1$ 이하의 서로소인 6 개의 경로들 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6을 구성한다. (보조정리 1의 증명과정을 이용함에 있어서, $d=3$, $k_1=3$, $k_2=5$, $k_3=n$, $i_d=r$이다.) $1 \le j \le n$에 대하여, $V_j=\{v_{p,q,j} | 1 \le p \le 3, 1 \le q \le 5\}$에 의하여 유도되는 부그래프를 T_j라 하자. 각 T_j는 2-차원 토러스 $T(3,5)$와 동형이다. 다음에서 v를 T_1에 투사한 정점인 $v_{p,q,1}$을 이용하여 증명한다.

경우 1: $r=1$

v는 T_1의 정점이다. 관찰 1에 의하여 T_1에서 $u=v_{1,1,1}$와 $v=v_{p,q,1}$사이에 길이가 $diam(T_1)+2=5$이하의 서로소인 4개의 경로들이 존재한다. 이들을 P_1, P_2, P_3, P_4라 하자. $P_5=(v_{1,1,1}, P', v_{p,q,1})$, 여기서 P'는 T_2에서 $v_{1,1,2}$과 $v_{p,q,2}$ 사이의 최단경로이다. $P_6=(v_{1,1,1}, P', v_{p,q,1})$, P'는 T_n에서 $v_{1,1,n}$과 $v_{p,q,n}$ 사이의 최단경로이다. 이들 경로의 길이를 분석한다. $|P_5|, |P_6| \le diam(T(3,5))+2=3+2=5$이다.

$diam(T(3,5,n))=\lfloor 3/2 \rfloor+\lfloor 5/2 \rfloor+\lfloor n/2 \rfloor$ $=3+\lfloor n/2 \rfloor \ge 6$이므로, 이들 6 개 경로들의 길이는 $diam(T(3,5,n))$이하이다.

경우 2: $1<r \le \lfloor n/2 \rfloor+1$

경우 2.1 $dist(v_{1,1,1}, v_{p,q,1})=0$ (즉, $p=q=1$)

이 경우에는 보조정리 1 증명의 경우 2.1에서 기술된 방법으로 6개의 경로들 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6을 구할 수 있다.

경우 2.2 $dist(v_{1,1,1}, v_{p,q,1}) \ge 1$

$p=q=2$가 아닌 경우는, T_1에서 u와 $v_{p,q,1}$(=v를 T_1에 투사한 정점)사이에 $diam(T_1)+1$이하인 4 개의 서로소인 경로들이 존재하므로 보조정리 1의 증명(경우 2.2와 경우 2.3)에서와 같이 성립한다. 이제 $p=q=2$인 경우($dist(v_{1,1,1}, v_{p,q,1})=2$)를 고려한다. 관찰 1에 의하여, T_1에서 u와 $v_{p,q,1}$사이에 서로소인 4 개의 경로들로서 길이가 $diam(T(3,5))+1$ 이하인 것이 3개, $diam(T(3,5))+2$인 것이 하나 존재한다. 이들 경로를 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4라 하고 Q_1의 길이가 가장 길다고 하자. 즉, $|Q_1|=diam(T(3,5))+2$이고 $|Q_2|, |Q_3|, |Q_4| \le diam(T(3,5))+1$이다. 모든 $1 \le j \le 4$에 대하여 경로 Q_j에서 마지막 정점인 $v_{p,q,1}$을 제외한 경로를 Q'_j라 하고, Q'_j의 마지막 정점을 u_j라 하자.

경우 2.2.1 $1<r \le \lfloor n/2 \rfloor$

보조정리 1. 증명의 경우 2.3.1에 있는 방법으로 6개의 경로들 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6을 구한다. 그러면 $|P_1| \le diam(T(3,5,n))+1$이고, $|P_2|, |P_3|, |P_4| \le diam(T(3,5,n))$이다. $|P_5|, |P_6| \le diam(T(3,5,n))+1$이다.

경우 2.2.2 $r=\lfloor n/2 \rfloor+1$

$P_1=(v_{1,1,1}, v_{2,1,1}, P[v_{2,2,1};3(r)]),$

$P_2=(v_{1,1,1}, v_{3,1,1}, P[v_{3,2,1};3(r)], v_{2,2,r}),$

$P_3=(v_{1,1,1}, v_{1,2,1}, P[v_{1,3,1};3(r)], v_{2,3,r}, v_{2,2,r}),$

$P_4=(v_{1,1,1}, P[v_{1,5,1};3(r)], v_{2,5,r}, v_{2,1,r}, v_{2,2,r}),$

$P_5=(P[v_{1,1,1};3(r)], v_{1,2,r}, v_{2,2,r}),$

$P_6=(v_{1,1,1}, v_{1,1,n}, v_{1,2,n}, P[v_{2,2,n};3(r)].$

$|P_1|=r+1=\lfloor n/2 \rfloor+2$, $|P_2|=r+2=\lfloor n/2 \rfloor+3$, $|P_3|, |P_4|=r+3=\lfloor n/2 \rfloor+4$, $|P_5|=r+1=\lfloor n/2 \rfloor+2$, $|P_6|=n-r+3=n-\lfloor n/2 \rfloor+2 \le \lfloor n/2 \rfloor+3$이다. $\lfloor n/2 \rfloor+4 \le diam(T(3,5))+\lfloor n/2 \rfloor+1$이므로, 이들 경로들은 모두 $diam(T(3,5,n))+1$이하이다. □

정리 3, 보조정리 1과 보조정리 2를 이용하여, 다음 정리에서 일반적인 토러스 $T(k_1, k_2, \cdots, k_d)$의 고장지름이 $diam(T(k_1, k_2, ..., k_d))+1$임을 보인다.

정리 4. $d \ge 3$이고 $k_i \ge 3 (1 \le i \le d)$인 d-차원 $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_d$ 토러스 $T(k_1, k_2, \cdots, k_d)$에서 서로 다른 모든 두 정점 사이에 길이가 $diam(T(k_1, k_2, ..., k_d))+1$이하인 서로소인 $2d$ 개의 경로들이 존재한다.

증명. d에 관한 수학적 귀납법으로 증명한다. 먼저 기본적 경우로서, $d=3$인 경우를 증명한다. 일반성을 잃지 않고 $k_1 \le k_2 \le k_3$라 가정한다. k_1, k_2, k_3 중 (i) $k_i, k_j \le 5$이면서 $\{k_i, k_j\} \ne \{3,5\}$이든지 혹은 (ii) $k_i, k_j \ge 6$인 $k_i, k_j (1 \le i \ne j \le 3)$가 존재하면, 정리 3에 의하여 2-차원 토러스 $T(k_i, k_j)$에서 임의의 두 정점사이에 길이가 $diam(T(k_i, k_j))+1$이하의 서로소인 경로들이 4개 존재한다. 이러한 사실과 보조정리 1로부터 $T(k_1, k_2, k_3)$에서 서로 다른 임의의 두 정점 사이에 길이가 $diam(T(k_1, k_2, k_3))+1$이하인 서로소인 6 개의 경로들이 존재한다. 위의 (i)과 (ii)가 아닌 경우는 $k_1=3$, $k_2=5$, $k_3 \ge 6$이다. 이때에는 보조정리 2로부터 서로 다른 임의의 두 정점 사이에 길이가 $diam(T(k_1, k_2, k_3))+1$이하인 서로소인 6 개의 경로들이 존재한다. $d \ge 4$인 경우는 귀납법 가정과 보조정리 1에 의하여 성립한다. □

따름정리 3. $d \ge 3$인 d-차원 $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_d$ 토러스 $T(k_1, k_2, \cdots, k_d)$의 고장지름은 $diam(T(k_1, k_2, \cdots, k_d))+1$이다.

5. 결 론

이 논문에서는 토러스의 고장지름을 규명하였다.

$m,n \ge 3$인 2-차원 $m \times n$ 토러스에서 $m=3$ 혹은 $n=3$일 때 고장지름이 $\max(m,n)$임을 보였다. 그리고 $m,n > 3$인 경우 $T(m,n)$의 고장지름이 $diam(T(m,n))+1$임을 보였다. 또한 $k_i \ge 3(1 \le i \le d)$이고 $d \ge 3$인 d-차원 $k_1 \times k_2 \times ... \times k_d$ 토러스에서 서로 다른 임의의 두 정점 사이에 길이가 지름+1 이하인 $2d$개의 서로소인 경로들을 설계함으로서 고장지름이 지름+1임을 보였다.

참 고 문 헌

[1] K. Day and A. E. Al-Ayyoub, "Fault diameter of k-ary n-cube networks," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems,* **8**(9), pp. 903-907, 1997.

[2] M. S. Krishnamoorthy and B. Krishnamurthy, "Fault diameter of interconnection networks," *Computing Mathematical Applications,* **13**, pp. 577-582, 1987.

[3] S. Latifi, "Combinatorial analysis of the fault-diameter of the n-cube," *IEEE Trans. Computers,* **42**(1), pp. 27-33, 1993.

[4] Y. Rouskov and P. K. Srimani, "Fault diameter of star graphs," *Information Processing Letters,* **48**(5), pp. 243-251, 1993.

[5] J.-J. Sheu and L.-H Hsu, "Fault diameter for subcubes," *Parallel Processing Letters,* **9**(1), pp. 21-30, 1999.

[6] C.-P. Chang, J.-N. Wang, L.-H. Hsu, "Topological properties of twisted cube," *Information Sciences,* **113**, pp. 147-167, 1999.

[7] 김희철, 김상범, 좌경룡, "$G(2^m,4)$의 고장지름", 한국정보과학회 가을 학술발표회, **21**(2), pp. 663-666, 1994.

[8] H.-C. Hsu, T.-K. Li, J.J.M. Tan, and L.-H. Hsu, "Fault hamiltonicity and fault hamiltonian connectivity of the arrangement graphs," *IEEE Trans. Computers,* **53**(1), pp. 39-53, 2004.

[9] J.-H. Park and H.-C. Kim, "Longest paths and cycles in faulty star graphs," *J. Parallel and Distrib. Comput,* **64**, pp. 1286-1296, 2004.

[10] C.-H. Tsai, "Linear array and ring embedding in conditional faulty hypercubes," *Theoretical Computer Science,* **314**, pp. 431-443, 2004.

[11] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems,* **17**(3), pp. 227-240, 2006.

[12] C.-H. Chang, C.-K. Lin, H.-M. Huang, and L.-H. Hsu, "The super laceability of the hypercubes," *Information Processing Letters,* **92**, pp. 15-21, 2004.

[13] P. Fragopoulou and S. G. Akl, "Spanning subgraphs with applications to communication on the multidimensional torus networks," *Parallel Computing,* **22**, pp. 991-1015, 1996.

[14] S. Latifi and S. Q. Zheng, "On link-disjoint hamiltonian cycles of torus networks," *International Journal of Computers & Electrical Engineering,* **23**(1), pp. 25-32, 1997.

[15] H. Tamaki, "Construction of the meshes and torus tolerating a large number of faults," *Journal of Computer and System Sciences,* **53**, pp. 371-379, 1996.

[16] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications,* American Elsevier Publishing Co. Inc., 1976.

김 희 철

1980년 서울대학교 계산통계학과 학사
1982년 한국과학기술원 전산학과 석사
1987년 한국과학기술원 전산학과 박사
1987년~현재 한국외국어대학교 컴퓨터및정보통신공학부 교수. 1997년 8월~1998년 8월 미국 Michigan State University 방문교수. 관심분야는 알고리즘, 그래프이론, 생물정보학

임 도 빈

1983년 한양대학교 영어영문학과(학사)
1987년 한국외국어대학교 경영정보대학원(석사). 1988년 5월~1991년 12월 (주)한국경제신문사 전산실. 1992년 1월~1997년 3월 (주)한국PC통신 전산운영팀장. 2000년 5월~2005년 6월 (주)씨네티아 수석연구원. 2001년 한국외국어대학교 컴퓨터및정보통신공학과 박사수료. 관심분야는 알고리즘, 상호연결망

박 정 흠

1981년 3월~1985년 2월 서울대학교 계산통계학과(학사). 1985년 3월~1987년 2월 한국과학기술원 전산학과(석사). 1987년 3월~1992년 2월 한국과학기술원 전산학과(박사). 1992년 3월~1993년 9월 한국과학기술원 정보전자연구소 연수연구원. 1993년 10월~1996년 8월 한국전자통신연구소 부호기술연구부 선임연구원. 1996년 9월~현재 가톨릭대학교 컴퓨터정보공학부 교수. 관심분야는 알고리즘 설계, 그래프 이론