논문 2007-44SC-3-2

유연한 단일 링크 로봇의 제어기 설계에 대한 연구

(Study on the PID Controller Design for One-Link Robot)

강 신 천*, 박 용 운*, 고 정 호*

(Sin Cheon Kang, Yong Woon Park, and Jung Ho Ko)

요 약

대부분의 공학 시스템은 비선형 시스템이지만 비선형 요소가 어떤 바운드된 섹터 내에서만 존재할 때 이러한 비선형 시스템을 통상 Lure-Postnikov system이라 부르며 기계 시스템에서 자주 직면하게 된다. Lure-Postnikov system을 안정화 시키는 제어기를 해석하는 방법에 대해서는 그동안 상당한 연구가 이루어져 왔지만 PID 혹은 저차 제어기와 같은 고정된 구조를 갖는 제어기의 설계에 대한 연구는 아직 미미한 상태이다. 본 논문에서는 하나의 실수 다항식과 허수 다항식의 패밀리를 Hurwitz 다항식으로 만드는 제어 변수의 조합을 선형 부등식을 통하여 구하는 최근의 연구 결과를 이용하여 Lure-Postnikov system을 안정화 시키는 제어기를 체계적으로 설계하는 새로운 방법을 제시하고자 한다. 이 방법은 무기체계 시스템에서 흔히 쓰이는 유연한 단일 링크를 갖는 로봇 시스템에 적용하여 임의의 차수의 제어기를 체계적으로 설계할 수 있음을 보여준다.

Abstract

This Paper deals with the synthesis of absolutely stabilizing fixed order controllers for Lure-Postnikov systems. Lure-Postnikov systems are frequently encountered in mechanical engineering applications. Analytical tools for synthesizing stabilizing fixed structure controllers, such as the PID controllers examining the absolute stability of Lure-Postnikov systems, have recently been studied in the literature. However, tools for synthesizing controllers of arbitrary order have not been studied yet. We propose a systematic method for synthesizing absolutely stabilizing controllers of arbitrary order for the Lure-Postnikov systems. Our approach is based on recent results in the literature on approximation of the set of stabilizing controller parameters that render a family of real and complex polynomials Hurwitz. We provide an example of a robotic system to illustrate the procedure developed.

Keywords: Lure-Postnikov system, 단일링크 로봇, 절대 안정성, PID 제어기

I. 서 론

공학 시스템의 대부분은 비선형 시스템이지만 비선형 요소가 어떤 바운드된 섹터 내에서만 존재할 경우를 자주 직면하게 되고 이러한 비선형 시스템을 Lure-Postnikov system이라 부른다[1~2]. Lure-Post nikov system을 안정화 시키는 제어기에 대한 해석적인 방법에 대해서는 상당한 연구가 그동안 이루어 졌지만 PID 혹은 저차 제어기와 같은 고정된 구조를 갖는 제어기의 설계에 대한 연구는 아직 미미한 상태이다[3-5].

Lure -Postnikov system을 안정화 시키는 충분 조건 중의 하나는 Lure- Postnikov system의 선형요소를 나타내는 부분과 어떤 멀티플라이어 곱으로 나타나는 다항식의 SPR (Strict Postive Realness) 조건을 만족하는 것과 관련이 있다[6]. 최근에 하나의 실수 다항식과 허수 다항식의 패밀리를 Hurwitz polynomial로 만드는 제어기 변수의 조합을 선형 부등식을 이용하여 구하는 체계적인 방법이 제시되었다[7]. 이러한 방법은 Hurwitz polynomial이 다항식의 실수부와 허수부의 근이 서로 교차한다는 Hermite -Biehler Theorem을 이용한다. 특성 다항식의 실수부과 허수부를 분리하여 제어기의 변수들로 이루어진 LMI(Linear Matrix Inequality)를 구성하여 이 선형 프로그램을 만족하는 영역이 존재하면

* 국방과학연구소
(Agency for Defense Development)
접수일자: 2006년8월10일, 수정완료일: 2007년4월20일

다항식의 SPR 조건을 만족하는 제어기 변수들의 조합이 된다.

본 논문에서는 최근에 발표된 연구 결과를 이용하여 Lure -Postnikov system을 절대 안정화 시키는 제어기를 설계하는 새로운 방법을 제시하고, 무기체계 시스템에서 흔히 쓰이는 유연한 단일 링크를 갖는 로봇 시스템에 적용하여 임의의 차수의 제어기를 체계적으로 설계할 수 있음을 보여준다.

Ⅱ. 수학적 배경

1. Absolute Stability(절대 안정성)

먼저 그림 1과 같이 포화 비선형 요소를 갖는 SISO(Single Input Single Output) Lure-Postnikov 시스템을 고려하자.

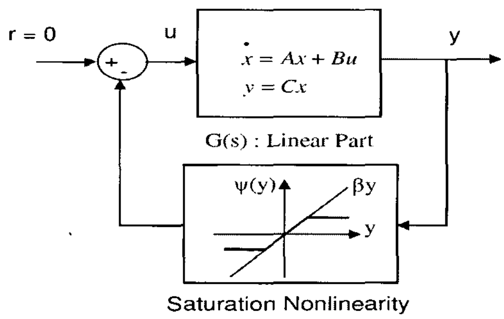


그림 1. Lure-Postnikov 구조
Fig. 1. Lure-Postnikov system.

이때, 비선형 스칼라 함수 $\psi(y)$가 섹터 바운드를 만족하면$(0 \le y\psi(y) \le \beta y^2)$, Lure-Postnikov system을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax+Bu \\ y &= Cx+Du \\ u &= -\psi(y) \\ G(s) &= C(sI-A)^{-1}B+D \end{aligned} \tag{1}$$

Lure-Postnikov 시스템에 대한 Absolute Stability(절대 안정 성)은 다음과 같이 정의될 수 있다[1,2].

Definition 2.1 Absolute Stability(절대 안정성)

섹터 바운드를 만족하는 모든 비선형 시스템에 대해서 평형점이 점근 안정하면 Lure-Postnikov system은 절대 안정하다.

절대 안정성 문제에서 야기되는 중요한 조건중의 하나는 전달함수의 SPR(Strictly Positive Realness) 특성이다.

Definition 2.2 SPR(Strictly Positive Realness)

A proper, rational, scalar, transfer function $G(s)$ is SPR if

1. $G(s)$의 모든 근의 실수부는 음의 값이다.
2. $Re[G(jw)] > 0, \quad \forall w \in (-\infty, +\infty)$

Lure-Postnikov 시스템의 절대 안정성에 대한 충분 조건중의 하나는 Popov Criterion 이다[3].

Theorem 2.1 Popov Criterion

Lure-Postnikov의 선형 부분을 다음과 같이 전달함수 $G(s)$로 나타낼 수 있고,

$$G(s) = \frac{d}{s} + c(sI-A)^{-1}B, \tag{2}$$

$d > 0, \ A \ Hurwitz, \ (A,B,c) \ is \ minimal$

전달함수 $M(s)G_{cl}(s) = (\gamma_1 s + \gamma_0)(G(s) + \frac{1}{\beta})$가 SPR이면 Lure-Postnikov의 평형점은 점근 안정 하다.

여기서, $\gamma_0 > 0, \ \gamma_1 \ge 0$인 임의의 실수이고 $M(s) = (\gamma_1 s + \gamma_0)$를 하나의 멀티플라이어라 한다. 따라서, Lure -Postnikov 시스템의 제어기 설계 문제는 그림 2와 같이 블록 다이어그램으로 나타낼 수 있고 절대 안정성을 위해 Popov Criterion을 적용하기 위해서는 임의의 전달함수 $M(s)G_{cl}(s)$가 SPR인지 여부를 조사하면 된다. 여기서 $G_{cl}(s)$는 플랜트의 함수와 제어기로 이루어지는 폐루프이며 $G_{cl}(s)$의 분자 및 분모의 상수들은 제어기 상수들($K = k_1, k_2, k_3, \cdots$)이 선형적으로 조합되어 있다.

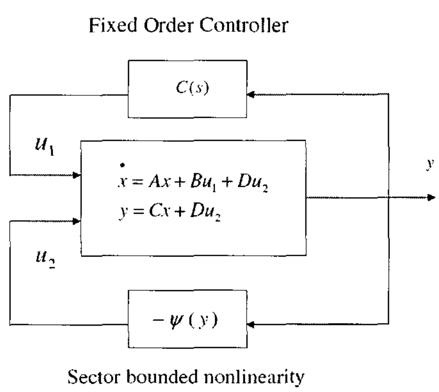


그림 2. 제어기 시스템 구조
Fig. 2. Controller Synthesis.

$M(s)G_{cl}(s)$의 SPR 여부를 조사하기 위한 하나의 방법으로 SPR 함수의 다음과 같은 특성을 이용한다.

Theorem 2.2 SPR(Strictly Positive Realness)

$$G_{T(s,K)} = \frac{N_{T(s,K)}}{D_{T(s,K)}} \quad is\ SPR \text{ if } and\ only \text{ if}$$

(1) $G_{T(0,K)} > 0,$
(2) $N_{T(s,K)}$ *is Hurwitz*, and
(3) $\Delta(\alpha,s,K) = D_{T(s,K)} + j\alpha N_{T(s,K)}$ *is Hurwitz* $\forall \alpha \in Re$

2. Hermite−Biehler Theorem

실수 및 허수 다항식에 대한 Hermite-Biehler Theorem은 다항식이 Hurwitz일 때의 특성을 제공 한다. $N(s,K)$가 n차 다항식일 때 $N(jw,K)$는 $N_e(w^2,K) + jwN_o(w^2,K)$로 표현될 수 있고, $w_{e,i}$ 와 $w_{o,i}$ 를 각각 N_e 및 N_o의 i번째 양의 실수근이라 하면 Hermite -Biehler Theorem을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

Theorem 2.2

Hermite-Biehler Theorem for real polynomial

$N(s)$는 다음의 두 조건을 만족하면 Hurwitz 이다.

(1) $N_e(w^2,K)$와 $N_o(w^2,K)$의 상수는 같은 부호이다.

(2) $N_e(w^2,K)$와 $N_o(w^2,K)$의 모든 근은 서로 다른 실근 이고, 양의 실근은 다음과 같이 교차한다

가. n : 짝수일 경우: $n_e = \frac{n}{2}$, $n_o = n_{e-1}$

$$0 < w_{e,1} < w_{o,1} < \cdots < w_{o,n_e-1} < w_{e,n_e}$$

나. n : 홀수일 경우: $n_e = n_o = \frac{n-1}{2}$

$$0 < w_{e,1} < w_{o,1} < \cdots < w_{e,n_e} < w_{o,n_e}$$

허수 다항식에 대한 Hermite-Biehler Theorem도 위와 유사 하게 나타낼 수 있다[7].

III. 제어기 설계

Hermite-Biehler Theorem을 이용하여 Lure-Postnikov system을 절대 안정화 시키는 제어기를 설계하는 한가지 방법은 임의의 $(n-1)$개의 주파수를 선택하여 $N(s,K)$를 Hurwitz로 만드는 제어 벡터 $(K = k_1, k_2, k_3, \cdots)$를 찾는 것이다.

$$\begin{aligned} N(s,K) &= N_0(s) + k_1 N_1(s) + \cdots + k_l N_l(s) \\ &= n_n(K)s^n + n_{n-1}(K)s^{n-1} + \cdots + n_0(K) \end{aligned}$$

Theorem 3.1

$$C_k \begin{bmatrix} N_e(0,K) \\ N_e(w_1^2,K) \\ \vdots \\ N_e(w_{n-1}^2,K) \end{bmatrix} > 0 \text{ and } C_k \begin{bmatrix} N_o(0,K) \\ N_o(w_1^2,K) \\ \vdots \\ N_o(w_{n-1}^2,K) \end{bmatrix} > 0 \quad (3)$$

$k=1$ 과 $k=3$인 경우에 위의 선형 프로그램중 하나를 만족 하는 $(n-1)$개의 주파수(w_i)가 존재하면 실수 다항식, $N(s,K)$을 Hurwitz로 만드는 제어 벡터 $K = (k_1, k_2, \cdots, k_l)$가 존재한다. C_k, $S_k (k = 1,2,3,4)$는 n차의 대각선 행렬이고, C_k, S_k의 $(m+1)$번째 대각선 요소이 값들은 각각 $\cos((2k-1)\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2})$와 $\sin((2k-1)\frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2})$이다.

IV. 예 제

Lure-Postnikov 시스템의 한 예로써 유연한 단일 링크를 갖는 로봇을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &I\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 + mgL\sin\theta_1 + k(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ &J\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_2 - k(\theta_1 - \theta_2) = \tau \end{aligned} \quad (4)$$

PID 제어기를 고려하면

$$\begin{aligned} &C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \\ &u = k_p(r-y) + k_d(\dot{r} - \dot{y}) + k_i w \\ &\dot{w} = r - y \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $C(s)$는 PID 제어기, w는 적분 에러, r은 입력이다. 그림 4는 섹터 바운드 비선형성을 갖는 단일링

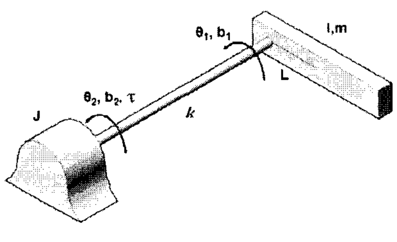


그림 3. 유연 구조의 단일링크 로봇
Fig. 3. One-Link Robot with a Flexible Joint.

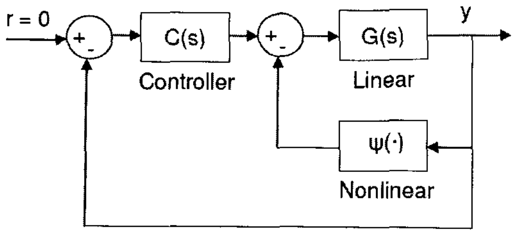


그림 4. 단일 링크 로봇의 제어 구조
Fig. 4 Control Structure of One-Link Robot.

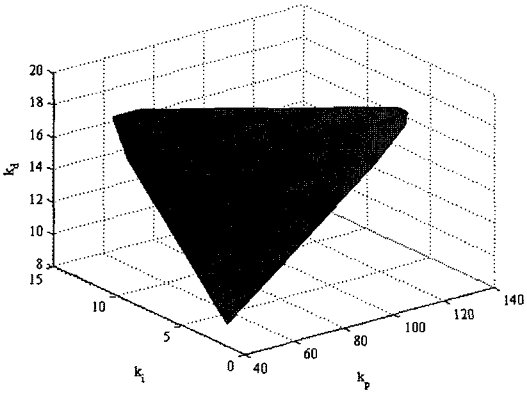


그림 5. 절대 안정 PID 제어기
Fig. 5. Absolutely Stabilizing PID Controllers.

크 로봇의 제어 구조를 보여준다.

전체 시스템을 다음과 같이 확장된 상태 방정식으로 나타낼 수 있다

$$\dot{z}= Az - B\psi(y)$$
$$y = Cz, \quad where \ z = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad x = \left[\theta_1 \dot{\theta}_1 \theta_2 \dot{\theta}_2\right] \tag{6}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{I} & -\frac{b_1}{I} & -\frac{k}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k}{J} - k_p & -k_d & -\frac{k}{J} & \frac{b_2}{J} & k_i \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$C = [1\,0\,0\,0\,0], \quad \psi(y) = \frac{mgL}{I} sin(y) \tag{8}$$

그림 5는 유연한 단일링크 시스템의 임의의 주어진 물리적 값에 대해 절대 안정한 PID 제어기의 영역을 보여준다.

V. 결 론

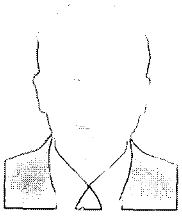
본 연구에서는 최근에 발표된 연구 결과를 이용하여 공학 시스템에서 흔히 직면할 수 있는 중요한 비선형 시스템의 일종인 Lure-Postnikov system을 안정화 시키는 제어기를 설계하는 새로운 방법을 제시하고, 무기체계 시스템에서 흔히 쓰이는 유연한 단일 링크를 갖는 로봇 시스템에 적용하여 PID 제어기를 체계적으로 설계할 수 있음을 보여준다.

제안된 방법의 장점은 임의의 차수의 제어기 설계에도 적용이 가능하며, 특히 LMI를 확장함으로써 안정성뿐만 아니라 H_∞, 이득 마진, 위상 마진 등 강인제어와 관련된 조건들을 쉽게 추가할 있어 Lure-Postnikov system의 강인 제어기 설계에도 응용이 가능하다.

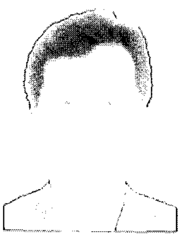
참 고 문 헌

[1] H. K. Khalil, “Nonlinear systems”, Prentice Hall, NJ, 1996.
[2] G. Zames, “On the input-output stability of time- varying nonlinear feedback systems--Part II: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities”, IEEE Trans. on Automatic Con- trol, vol. 11, pp. 465- 476, 1966.
[3] V. M. Popov, “Absolute stability of nonlinear systems of automatic control”, Automation and Remote Control, Vol.22, pp. 857-875, 1962.
[4] K. S. Narendra and J.H. Taylor, “Frequency Domain Criteria for Absolute stability”, Academic Press, New York, 1973.
[5] G. Zames and P. Falb, “On the stability of systems with monotone and odd monotone nonlinearities”, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 12, pp. 221 - 223, 1967.
[6] D. D. Siljak, “A positive realness test for interval plants”, Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, vol. 3, pp. 1916 - 1918, 1989.
[7] S. Darbha, S. Pargaonkar and S.P. Bhattacharya, “linear programming approach to the synthesis of fixed structure controllers”, American Control Con- ference, vol. 6, pp.3942- 3949, 2004.

저 자 소 개



강 신 천
1991년 ~ 현재 국방과학연구소 선임 연구원
2005년 Texas A&M University 기계공학과 박사 졸업.
<주관심분야 : 자율시스템, 최적 및 비선형제어, 통합주행제어>



고 정 호
1978년 ~ 현재 국방과학연구소 책임연구원
1992년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사 졸업
<주관심분야 : 구동제어, 전력변환, 자율제어, 무인시스템>

박 용 운
1982년 ~ 현재 국방과학연구소 책임 연구원
1994년 University of Utah 기계공학과 박사 졸업.
<주관심분야 : 경로계획, 아키텍처, 미들웨어, 영상항법>