

선택적 이동평균(S-MA) 관리도의 ARL

임 태 진**

* 숭실대학교 산업·정보시스템공학과

The ARL of a Selectively Moving Average Control Chart

Tae-Jin Lim**

* Dept. of Industrial & Information Systems Engineering, Soongsil University

Key Words : Moving Average, CUSUM, ARL, Control Chart, Adaptive Scheme, Markov Chain

Abstract

This paper investigates the average run length (ARL) of a selectively moving average (S-MA) control chart. The S-MA chart is designed to detect shifts in the process mean. The basic idea of the S-MA chart is to accumulate previous samples selectively in order to increase the sensitivity. The ARL of the S-MA chart was shown to be monotone decreasing with respect to the decision length in a previous research[3]. This paper derives the steady-state ARL in a closed-form and shows that the monotone property is resulted from head-start assumption. The steady-state ARL is shown to be a sum of head-start ARL and an additional term. The statistical design procedure for the S-MA chart is revised according to this result. Sensitivity study shows that the steady-state ARL performance is still better than the CUSUM chart or the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) chart.

1. 서 론

관리도의 통계적 성능은 공정평균이나 공정산포의 변화를 일으키는 공정의 이상상태를 얼마나 신속하게 감지하는가에 따라 평가된다. 가장 많이 사용되는 슈하트(Shewhart) 관리도는 공정평균의 큰 변화는 민감하게 감지하지만, 작은 변화에는 둔감한 것으로 알려져 있다. 누적합(CUSUM) 관리도[1, 5]와 지수이동평균(EWMA) 관리도[4]는 공정평균의 작은 변화에도 민감한 것으로 인정받아왔다. 최근에는 가변 표본크기나 샘플링간격을 사용하는 적응형(adaptive) 관리도[2, 6]가 개발되어 기존 관리도의 성능을 더욱 향상시키게 되었다.

선택적 누적합(S-CUSUM) 관리도[3]는 누적형 관리도와 적응형 관리도의 착안점을 모두 이용하여 개

발된 것으로서, 임계한계(threshold limit)를 설정하여 현재 관리통계량의 상태를 기준으로 다음 관리통계량의 누적여부를 결정한다. 적응형 관리도와는 달리 표본크기나 샘플링 간격은 일정하게 유지하면서, 단지 관리통계량의 계산방식만을 바꾸기 때문에 관리도의 운용이 간편한 장점이 있다. 선행연구[3]에서 제시된 평균런길이(ARL) 성능은 head-start 가정 하에서 계산된 결과로서, 실제 상황보다 ARL이 짧게 계산되어 낙관적인 결과를 초래한다. 본 연구에서는 관리통계량의 형태상 누적합보다는 이동평균(moving average)에 보다 가까우므로 S-CUSUM 관리도 대신 선택적 이동평균(S-MA) 관리도로 명명하고, S-MA 관리도의 정상(stationary) ARL 식을 유도하여 그 통계적 특성을 규명하고자 한다. 편의상 본 연구에서는 정상 ARL을 ARL이라 명명한다.

제 2장에서는 S-MA 관리도의 운용방법을 설명하고, 샘플링 프로세스를 마코프(Markov) 연쇄로 모형화한다. 제 3장에서는 공정에 이상이 발생한 상황에

† 교신저자 tjlim@ssu.ac.kr

* 본 연구는 2006년도 숭실대학교 연구비 지원으로 수행되었음.

서 ARL 식을 유도한다. 제 4장에서는 ARL 특성을 분석하여 S-MA 관리도의 통계적 설계 절차를 제시하고, 제 5장에서는 현실적인 S-MA 관리도의 운용방안을 제시하고 민감도를 분석한다.

2. S-MA 관리도

2.1 S-MA 관리도의 운용

S-MA 관리도는 표준화된 관리통계량을 사용하며, 관리한계 k , 임계한계 w , 관리길이 L 등 세 가지의 설계모수를 갖는다. 표준크기는 일반적 슈하트 \bar{X} 관리도와 동일하게 n_0 로 설정한다. 표준화된 통계량을 계산하여 관리하며, 관리통계량이 관리한계 k 를 벗어나거나 L 개의 연속된 관리통계량이 임계한계 w 를 벗어나면 이상신호를 발생한다. 따라서 관리길이 $L=1$ 인 경우에는 슈하트 \bar{X} 관리도와 동일하며 $w=k_0$ 로 설정된다.

주어진 관리한계 k 와 임계한계 w 에 대하여, 관리통계량 Z_i 의 영역을 다음과 같이 상호 배타적이고 포괄적인(mutually exclusive and exhaustive) 세 영역으로 구분할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_1 &= \{Z_i; |Z_i| \leq w\}, \\ I_2 &= \{Z_i; w < |Z_i| \leq k\}, \\ I_3 &= \{Z_i; |Z_i| > k\} \end{aligned} \quad (1)$$

영역 I_1 , I_2 , 및 I_3 을 각각 일치영역, 의심영역, 불일치영역이라 하자. S-MA 관리도는 관리통계량이 의심영역 I_2 에 속하면 표본을 누적하여 관리통계량을 계산한다. 반면 관리통계량이 일치영역 I_1 에 속하면 다음번의 표본만으로 관리통계량을 계산한다.

공정의 목표값을 μ_0 , 표준편차를 σ 라 하면, 표준화된 i 번째 관리통계량 Z_i 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_i &= \sqrt{n_0} (\bar{X}_i - \mu_0) / \sigma, \quad (i \geq 2) \\ Z_i &= \begin{cases} \sqrt{n_0} (\bar{X}_i - \mu_0) / \sigma, & \text{if } Z_{i-1} \in I_1; \\ \sqrt{jn_0} (\sum_{m=i-j+1}^i \bar{X}_m / j - \mu_0) / \sigma, & \text{if } Z_{i-j} \in I_1, Z_{i-j+1}, \dots, Z_{i-1} \in I_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

공정특성치는 정규분포를 따르고, 공정은 관리상태 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 에서 시작하며, 이상원인이 발생하면 공정평균이 $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma / \sqrt{n_0}$ 으로 이동한다고 가정하자. 관리통계량에 j 회의 표본이 누적되어 전체 표본크기가 $n = jn_0$ 라면, 관리통계량이 영역 I_1 , I_2 , I_3 에 각각 속

할 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1(j, \delta) &= \Phi(w - \delta\sqrt{j}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{j}), \\ p_3(j, \delta) &= 1 - \Phi(k - \delta\sqrt{j}) + \Phi(-k - \delta\sqrt{j}), \\ p_2(j, \delta) &= 1 - p_1(j, \delta) - p_3(j, \delta), \end{aligned} \quad (3)$$

단, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2) dz$ 로서 표준정규누적분포함수를 나타낸다.

2.2 마코프 모형

다음으로 S-MA 관리도의 통계적 특성을 규명하기 위하여 상태를 정의하고, 마코프 모형을 구성한다. 한 번의 샘플링을 행할 때 발생할 수 있는 다음과 같은 네 가지의 경우를 고려한다.

- : 관리통계량이 일치영역 I_1 에 속함
- △ : 공정은 관리상태이며 관리통계량은 의심영역 I_2 에 속함
- ▲ : 공정은 이상상태이며 관리통계량은 의심영역 I_2 에 속함
- ★ : 관리통계량이 불일치 영역 I_3 에 속함

관리통계량이 불일치영역에 속하면 이상신호가 발생하므로 흡수(absorbing)상태가 된다. 또한 L 개의 연속된 관리통계량이 의심영역에 속하면 이상신호를 발생하므로 흡수상태가 된다. 따라서 가장 최근의 $L-1$ 개 관리통계량 $Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1}$ 이 주어지면 다음 통계량 Z_i 가 결정된다. 관리통계량이 일단 일치영역에 속하게 되면 그 이전의 표본은 더 이상 사용하지 않으므로 경우를 고려할 필요 없이 $\ast = \circ \cup \triangle \cup \blacktriangle$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 i 번째 샘플링 시점에서 <표 1>과 같이 총 $M \equiv L(L+1)/2$ 개의 과도(transient) 상태와 하나의 흡수상태가 형성되며, Z_i 의 위치에 따라 다음 상태가 결정된다. 일례로서 $L=3$ 인 경우의 상태 전이도는 <그림 1>과 같다.

이상의 상태 정의에 따라 아래의 $(M+1) \times (M+1)$ 전이행렬을 갖는 마코프 연쇄로 S-MA 관리도의 샘플링 프로세스를 설명할 수 있다.

$$P_i = \begin{pmatrix} Q_i & (I - Q_i)1 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix},$$

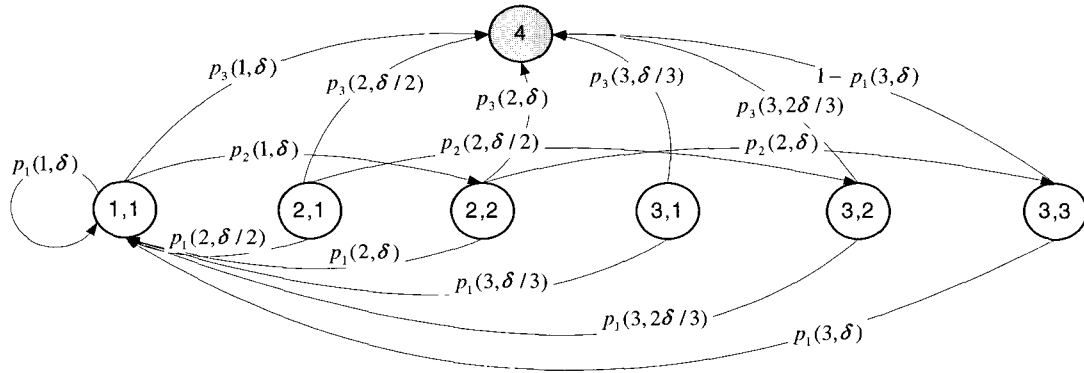
단, Q_i 는 과도상태에 대한 $M \times M$ 전이행렬을 나타내며, <표 1>로부터 그 원소는 다음과 같다.

$$q_{(j,k)(1,1)} = p_1(j, k\delta/j), \quad (1 \leq k \leq j \leq L) \quad (4a) \quad \text{위의 경우를 제외한 나머지 상태전이율은 모두 0이}$$

$$q_{(j,k)(j+1,k+1)} = p_2(j, k\delta/j), \quad (1 \leq k \leq j \leq L-1) \quad (4b) \quad \text{된다.}$$

<표 1> 공정 이상상태 하에서 상태 벡터와 상태 전이

상태	$(Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1})$	$n(Z_i)$	$E Z_i $	Z_i 의 위치	다음 상태	(Z_{i-L+2}, \dots, Z_i)	전이확률
(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	n_0	δ	I_1	(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	$p_1(1, \delta)$
				I_2	(2, 2)	$(\star, \dots, \star, \circ, \blacktriangle)$	$p_2(1, \delta)$
				I_3	흡수	이상신호 발생	$p_3(1, \delta)$
(2, 1)	$(\star, \dots, \star, \circ, \triangle)$	$2n_0$	$\delta/\sqrt{2}$	I_1	(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	$p_1(2, \delta/2)$
				I_2	(3, 2)	$(\star, \dots, \star, \circ, \triangle, \blacktriangle)$	$p_2(2, \delta/2)$
				I_3	흡수	이상신호 발생	$p_3(2, \delta/2)$
(2, 2)	$(\star, \dots, \star, \circ, \blacktriangle)$	$2n_0$	$\sqrt{2}\delta$	I_1	(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	$p_1(2, \delta)$
				I_2	(3, 3)	$(\star, \dots, \star, \circ, \blacktriangle, \blacktriangle)$	$p_2(2, \delta)$
				I_3	흡수	이상신호 발생	$p_3(2, \delta)$
(3, 1)	$(\star, \dots, \star, \circ, \triangle, \triangle)$	$3n_0$	$\delta/\sqrt{3}$	I_1	(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	$p_1(3, \delta/3)$
				I_2	(4, 2)	$(\dots, \star, \circ, \triangle, \triangle, \blacktriangle)$	$p_2(3, \delta/3)$
				I_3	흡수	이상신호 발생	$p_3(3, \delta/3)$
(3, 2)	$(\star, \dots, \star, \circ, \triangle, \blacktriangle)$	$3n_0$	$2\delta/\sqrt{3}$	I_1	(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	$p_1(3, 2\delta/3)$
				I_2	(4, 3)	$(\dots, \star, \circ, \triangle, \blacktriangle, \blacktriangle)$	$p_2(3, 2\delta/3)$
				I_3	흡수	이상신호 발생	$p_3(3, 2\delta/3)$
(3, 3)	$(\star, \dots, \star, \circ, \blacktriangle, \blacktriangle)$	$3n_0$	$\sqrt{3}\delta$	I_1	(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	$p_1(3, \delta)$
				I_2	(4, 4)	$(\dots, \star, \circ, \blacktriangle, \blacktriangle, \blacktriangle)$	$p_2(3, \delta)$
				I_3	흡수	이상신호 발생	$p_3(3, \delta)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(L, 1)	$(\triangle, \triangle, \dots, \triangle)$	Ln_0	δ/\sqrt{L}	I_1	(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	$p_1(L, \delta/L)$
				I_2	흡수	이상신호 발생	$p_2(L, \delta/L)$
				I_3	흡수	이상신호 발생	$p_3(L, \delta/L)$
(L, 2)	$(\triangle, \triangle, \dots, \triangle, \blacktriangle)$	Ln_0	$2\delta/\sqrt{L}$	I_1	(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	$p_1(L, 2\delta/L)$
				I_2	흡수	이상신호 발생	$p_2(L, 2\delta/L)$
				I_3	흡수	이상신호 발생	$p_3(L, 2\delta/L)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(L, L)	$(\blacktriangle, \blacktriangle, \dots, \blacktriangle)$	Ln_0	$\sqrt{L}\delta$	I_1	(1, 1)	$(\star, \star, \dots, \star, \circ)$	$p_1(L, \delta)$
				I_2	흡수	이상신호 발생	$p_2(L, \delta)$
				I_3	흡수	이상신호 발생	$p_3(L, \delta)$
(L+1)	(흡수상태) : 이상신호 발생. 즉, 관리통계량이 불일치영역 I_3 에 속하거나, 연속된 L 개의 관리통계량이 의심영역 I_2 에 속함.						



<그림 1> S-MA 관리도의 상태전이도(L= 3)

2.3 관리상태 하에서의 ARL

초기상태확률은 공정이 관리상태를 오랫동안 지속해왔다는 전제 하에서 정상 확률로서 정의하므로 초기상태는 (1, 1), (2, 1), ..., (L, 1) 등 L개의 상태만이 고려된다. 관리상태에서는 평균이동이 발생하지 않으므로($\delta=0$) 사용된 표본크기가 식 (4a)와 식 (4b)의 계산에 영향을 미치지 않는다. 따라서 관리상태 하에서 과도상태 간의 전이확률은 다음과 같으며, 그 전이행렬을 Q_0 이라 명명한다.

$$q_{0(j,1)(j,1)} = p_1(\cdot, 0) \equiv p_1(0), (1 \leq j \leq L) \quad (5a)$$

$$q_{0(j,1)(j+1,1)} = p_2(\cdot, 0) \equiv p_2(0), (1 \leq j \leq L-1) \quad (5b)$$

위의 경우를 제외한 나머지 상태전이율은 모두 0이 된다. 초기상태확률벡터는 관리상태 하의 정상(stationary) 확률벡터로서, 다음 연립식의 해를 구하여 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (\pi_{(1,1)}, \pi_{(2,1)}, \dots, \pi_{(L,1)})^T \\ \pi_0^T Q_M &= \pi_0^T, \quad \pi_0^T \mathbf{1}_L = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

단, $\mathbf{1}_L = (1, \dots, 1)^T$ 이며, 행렬 Q_M 은 이상신호가 발생하지 않았다는 조건 하의 전이행렬을 나타내며 다음과 같은 원소로 구성된다.

$$q_{M(j,1)(j,1)} = \frac{p_1(0)}{p_1(0) + p_2(0)}, (1 \leq j \leq L) \quad (7a)$$

$$q_{M(j,1)(j+1,1)} = \frac{p_2(0)}{p_1(0) + p_2(0)}, (1 \leq j \leq L-1) \quad (7b)$$

선행연구[3] 결과에 의하여 관리상태 하에서의 ARL은 다음과 같이 계산된다.

[보조정리 1] 관리상태 하의 L개 상태에 대한 ARL 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} ARL_0 &\equiv (I - Q_0)^{-1} \mathbf{1}_L \\ &= (a_{(1,1)}, a_{(2,1)}, \dots, a_{(L,1)})^T, \end{aligned}$$

$$\text{단, } a_{(i,1)} = \sum_{j=0}^{L-i} p_2(\cdot, 0)^j / D_0, \quad (8)$$

$$D_0 = |I - Q_R| = 1 - p_1(\cdot, 0) \sum_{j=0}^{L-1} p_2(\cdot, 0)^j. \quad (9)$$

[보조정리 2] 식 (6)으로부터 계산된 정상 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \pi_{(i,1)} &= \frac{[p_2(\cdot, 0)/p_1(\cdot, 0) + p_2(\cdot, 0)]^{i-1}}{\sum_{j=1}^L [p_2(\cdot, 0)/p_1(\cdot, 0) + p_2(\cdot, 0)]^{j-1}} \\ \text{for } i &= 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (10)$$

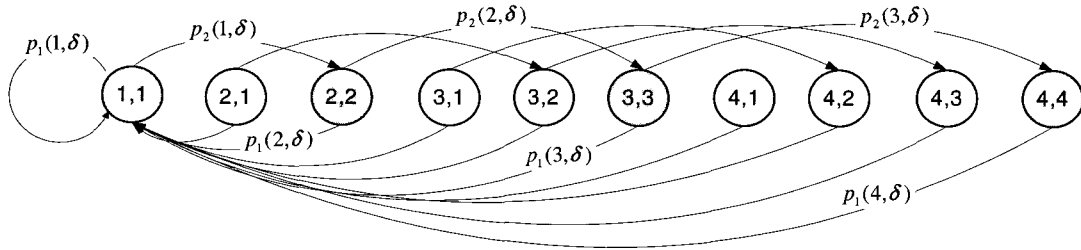
위의 결과를 대입하여 공정이 관리상태를 유지하는 경우의 ARL은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$ARL_0 = \sum_{i=1}^L \pi_{(i,1)} a_{(i,1)} \quad (11)$$

3. S-MA 관리도의 ARL 계산

본 절에서는 공정에 이상원인이 발생한 이후의 ARL을 유도한다. 이상상태 하에서는 L개의 초기상태 뿐 아니라 모든 과도상태를 고려해야 하므로 식 (10)으로부터 구한 해를 대입하여 전체 과도상태에 대한 $M \times 1$ 초기상태확률 벡터를 다음과 같이 설정한다.

$$\pi = (\pi_{(1,1)}, \pi_{(2,1)}, 0, \pi_{(3,1)}, 0, \dots, \pi_{(L,1)}, 0, \dots, 0)^T \quad (12)$$



<그림 2> 과도상태 중 유효상태 간의 상태전이도(L=4)

<표 2> 상태 (1, 1)에서 시작하는 주기 확률 계산

주 기	확 률
(1, 1) ⇒ (1, 1)	$p_1(1, \delta)$
(1, 1) ⇒ (2, 2) ⇒ (1, 1)	$p_2(1, \delta)p_1(2, \delta)$
(1, 1) ⇒ (2, 2) ⇒ (3, 3) ⇒ (1, 1)	$p_2(1, \delta)p_2(2, \delta)p_1(3, \delta)$
⋮	⋮
(1, 1) ⇒ (2, 2) ⇒ (3, 3) ⇒ ⋯ ⇒ (L, L) ⇒ (1, 1)	$p_2(1, \delta)p_2(2, \delta) \cdots p_2(L-1, \delta)p_1(L, \delta)$
계	$\sum_{i=1}^L \left[p_1(i, \delta) \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta) \right]$

따라서 공정에 이상원인이 발생한 이후의 ARL은 다음과 같이 계산된다.

$$ARL_{\delta} = \pi^T(I - Q_{\delta})^{-1} \mathbf{1}_M, \quad (13)$$

단, $\mathbf{1}_M = (1, 1, \dots, 1)^T$ 인 $M \times 1$ 단위 벡터를 나타낸다.

식 (13)으로 표현된 이상상태 하의 ARL은 관리길이 L 이 커지면 역행렬 계산이 불가하여 해를 구할 수 없으므로, 이를 계산하는 과정을 살펴본다. <그림 2>에 예시된 바와 같이 전체 $M = L(L+1)/2$ 개의 상태 중 자기 자신으로 돌아올 수 있는 상태는 (1, 1), (1, 2) ..., (L, L) 등 L 개 뿐이다. 이들을 ‘유효상태(effective state)’라 명명한다. 이들 유효상태는 초기상태로부터 상태 (1, 1)을 거쳐야 도달할 수 있다. 이에 착안하여 전이행렬 Q_{δ} 를 다음과 같이 두 부분으로 나눈다: ① 초기상태로부터 상태 (1, 1)까지의 전이 ② 유효상태 간의 전이.

다음의 정리들은 이상상태 하의 ARL을 계산하는 알고리즘의 기초를 제공한다.

[정리 1] 유효상태 간의 전이행렬을 $Q_{E, \delta}$ 라 하면

$$D_{\delta} = |I - Q_{\delta}| = |I - Q_{E, \delta}| = 1 - \sum_{i=1}^L \left[p_1(i, \delta) \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta) \right]. \quad (14)$$

단, $\prod_{j=1}^0 (\cdot) \equiv 1$ 로 정의한다.

[증명] <그림 2>를 참고로 하여 상태 (1, 1)에서 시작하여 상태 (1, 1)로 돌아오는 주기(cycle)와 그 확률을 계산하면 <표 2>와 같다. 따라서 주기의 확률은 $\sum_{i=1}^L \left[p_1(i, \delta) \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta) \right]$ 이다. 행렬값 D_{δ} 는 상태 (1, 1)에서 시작하여 상태 (1, 1)로 돌아오지 않고 흡수상태로 전이하는 확률을 나타내므로 1에서 주기확률을 제외한 값이 되며, 유효상태 외에는 무관하다. ■

[정리 2] 이상상태 하에서의 ARL 벡터는 다음과 같다.

$$ARL_{\delta} = (I - Q_{\delta})^{-1} \mathbf{1}_M = (a_{1,1}(\delta), a_{2,1}(\delta), a_{2,2}(\delta), \dots, a_{L,L}(\delta))^T$$

$$\text{단, } a_{1,1}(\delta) = \sum_{i=1}^L u_i(\delta) / D_{\delta}, \quad (15)$$

$$a_{i,1}(\delta) = v_i(\delta) a_{1,1}(\delta) + e_i(\delta), \quad (2 \leq i \leq L) \quad (16)$$

$$u_1(\delta) = 1, \quad u_i(\delta) = \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta), \quad (2 \leq i \leq L) \quad (17)$$

$$v_1(\delta) = 1, \quad v_i(\delta) = \sum_{j=1}^{L-i+1} \left[p_1(i+j-1, \frac{j\delta}{i+j-1}) \times \prod_{m=1}^{i-1} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}) \right] \quad (18)$$

$$e_1(\delta) = 0, \quad e_i(\delta) = \sum_{j=1}^{L-i+1} \left[\prod_{m=1}^{i-1} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}) \right] \quad (19)$$

단, $\prod_{j=1}^0 (\cdot) \equiv 1$ 로 정의한다.

[증명] <그림 3>에 나타난 바와 같이 $u_i(\delta)$ 는 한 주기에서 상태 (1,1)로부터 유효상태 (i, i) 까지 도달하는 확률을 나타내므로 식 (17)과 같다. 즉, $u_1(\delta) = 1$, $u_2(\delta) = p_2(1, \delta)$, $u_3(\delta) = p_2(1, \delta) p_2(2, \delta)$, ..., $u_L(\delta) = p_2(1, \delta) p_2(2, \delta) \dots p_2(L-1, \delta)$. 이들의 합은 한 주기에서 상태 (1,1)로부터 시작하여 과도상태에 머물 확률이 된다. 따라서 상태 (1,1)에서 시작하여 흡수상태로 들어가기까지의 기대 전이회수 $a_{1,1}(\delta)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$a_{1,1}(\delta) = \frac{\text{한 주기에서 상태 (1,1)로부터 시작하여 과도상태에 머물 확률}}{\text{주기 이탈 확률}} = \frac{\sum_{i=1}^L u_i(\delta)}{D_\delta}$$

다음으로 $v_i(\delta)$ 는 초기상태 $(i, 1)$ 로부터 상태 (1,1)까지 도달하는 확률을 나타내며, <그림 4>를 참조하여 <표 3>과 같이 분석할 수 있다. 따라서

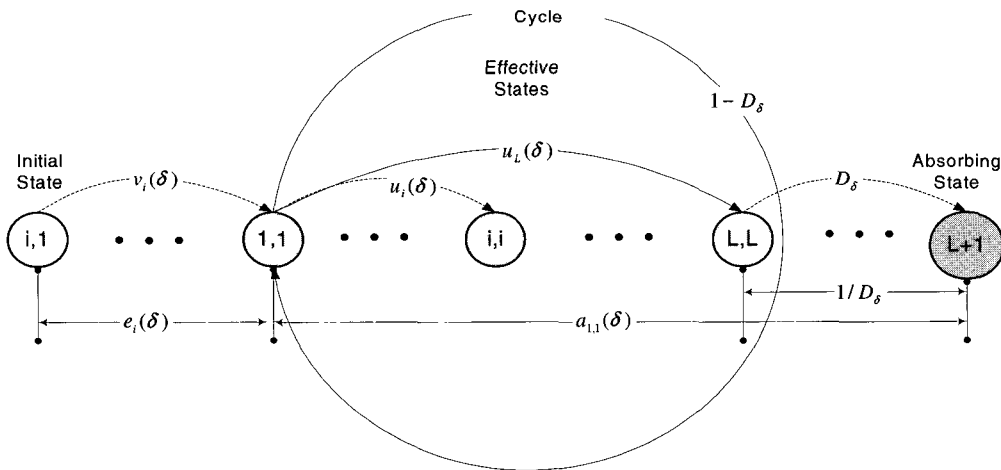
$$v_i(\delta) = \sum_{x=i}^L p_1(x, \frac{(x-i+1)\delta}{x}) \prod_{y=i}^{x-1} p_2(y, \frac{(y-i+1)\delta}{y})$$

위 식에서 $x-i+1=j$, $y-i+1=m$ 으로 치환하면 식 (16)을 얻는다. $e_i(\delta)$ 는 초기상태 $(i, 1)$ 로부터 상태 (1,1)까지 도달하지 않고 흡수상태로 전이되기 직전 상태까지의 ARL을 나타낸다. 이들은 <그림 4>를 참조하여 <표 4>와 같이 분석할 수 있다. 따라서

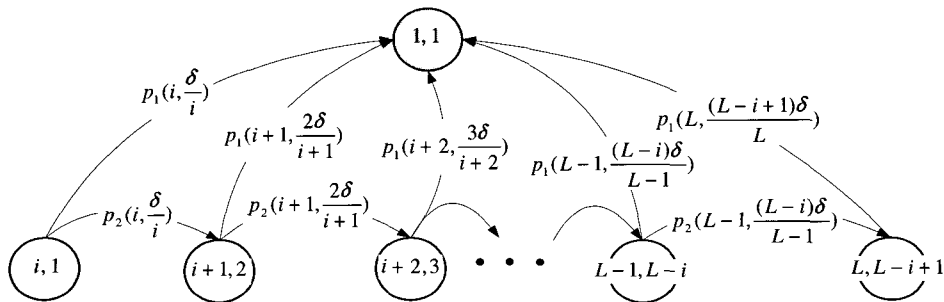
$$e_i(\delta) = \sum_{r=i}^L \prod_{y=i}^{r-1} p_2(y, \frac{(y-i+1)\delta}{y})$$

위 식에서 $x-i+1=j$, $y-i+1=m$ 으로 치환하면 식 (19)를 얻는다. ■

선행연구[3]에서는 head-start 가정 하에서 ARL을 계산하였는데, 이는 낙관적인 결과를 초래한다. 즉, 공정이 관리상태에서 이상상태로 전환하게 되면 초기상태는 $(i,1)$ 임에도 불구하고, 상태 (i,i) 로부터의 ARL을 계산함으로써 실제 상황보다 짧은 값을 얻게 되는 것이다.



<그림 3> 초기상태 $(i,1)$ 로부터 흡수상태까지 도달하는 경로 분석



<그림 4> 초기상태 $(i, 1)$ 로부터 상태 (1,1)까지 도달하는 경로 분석

<표 3> 상태 (i, 1)로부터 상태 (1, 1)까지 도달하는 확률 계산

경로	확률
(1, 1)	1
(i, 1)⇒(1, 1)	$p_1(i, \delta/i)$
(i, 1)⇒(i+1, 2)⇒(1, 1)	$p_2(i, \frac{\delta}{i})p_1(i+1, \frac{2\delta}{i+1})$
⋮	⋮
(i, 1)⇒⋯⇒(L, L-i+1)⇒(1, 1)	$p_1(L, \frac{(L-i+1)\delta}{L}) \prod_{x=i}^{L-1} p_2(x, \frac{(x-i+1)\delta}{x})$
계	$\sum_{x=i}^L p_1(x, \frac{(x-i+1)\delta}{x}) \prod_{y=i}^{x-1} p_2(y, \frac{(y-i+1)\delta}{y})$

<표 4> 상태 (i, 1)로부터 상태 (1, 1)까지 도달하지 않고 흡수되기 전까지의 ARL 계산

경로	ARL
(1, 1)⇒(L+1)	0 (불가능)
(i, 1)⇒(L+1)	1
(i, 1)⇒(i+1, 2)⇒(L+1)	$p_2(i, \frac{\delta}{i})$
⋮	⋮
(i, 1)⇒⋯⇒(L, L-i+1)⇒(L+1)	$\prod_{x=i}^{L-1} p_2(x, \frac{(x-i+1)\delta}{x})$
계	$\sum_{x=i}^L \prod_{y=i}^{x-1} p_2(y, \frac{(y-i+1)\delta}{y})$

4. S-MA 관리도의 통계적 설계

4.1 예비 실험

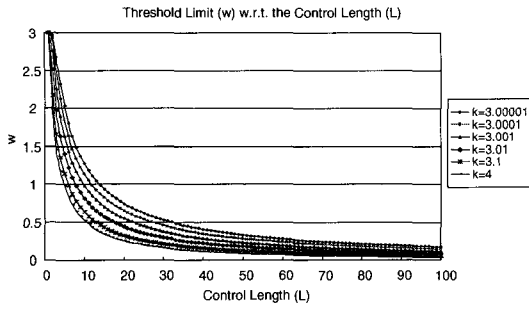
앞에서 도출한 통계적 특성을 이용하여 S-MA 관리도의 통계적 설계 절차를 제안한다. 먼저 유의수준 α 를 지정하면, 관리상태 하의 ARL은 다음과 같이 결정된다.

$$ARL_0 = \pi^T(I - Q_0)^{-1} \mathbf{1}_M = \sum_{i=1}^L \pi_{(i,1)} \alpha_{(i,1)} \equiv 1/\alpha, \quad (20)$$

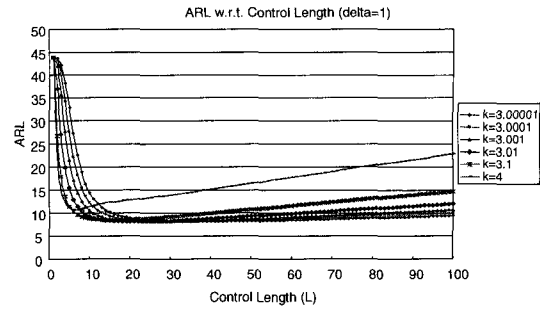
정규분포를 따르는 경우, 관리한계 k_0 인 일반적 슈하트 \bar{X} 관리도에서는 $\alpha = 2\Phi(-k_0)$ 와 같다. 여기서 $\pi_{(i,1)}$ 과 $\alpha_{(i,1)}$ 은 L, k, w 만의 함수이다. 따라서 L 과 k 가 정해지면, 식 (20)으로부터 임계한계 w 를 결정할 수 있다. 슈하트 \bar{X} 관리도의 관리한계 $k_0 = 3$ 인 경우에 대하여 계산한 결과는 <그림 5>와 같다. 먼저 관리길이가 증가함에 따라 임계한계가 감소함을

알 수 있다. 또한 관리한계가 넓을수록 임계한계는 감소한다. 이는 동일한 관리상태 ARL을 유지하기 위해서는 의심영역에 허용하는 기간(관리길이)이 길수록, 또는 관리영역이 넓을수록 엄격한 일치영역을 적용해야 함을 의미한다.

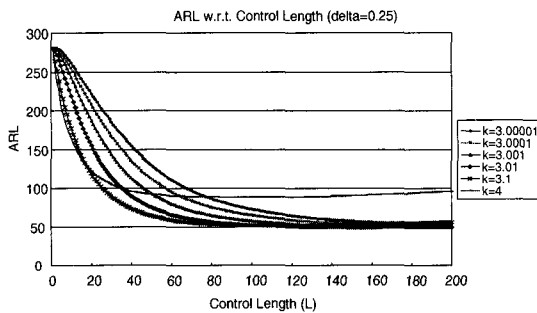
다음으로 슈하트 \bar{X} 관리도의 관리한계 $k_0 = 3$ 인 경우, $\delta = 0.25, 1.0, 2.0$ 등인 경우에 대하여 다양한 관리한계에 대한 ARL을 계산한 결과가 <그림 6>~<그림 8>과 같다. 공통적으로 관리길이가 증가함에 따라 ARL이 단조감소하다가 단조증가하는 특성을 보인다. 따라서 최적의 관리길이를 구하기 위해서는 ARL이 감소하다가 증가하기 직전의 값을 찾으면 된다. 또한 공통적으로 관리한계를 넓게 설정하면 ($k=4$) 최적의 ARL 값이 길어지므로 바람직하지 않다. 관리길이 $L=1$ 인 경우에는 관리한계와 상관없이 동일한 ARL 값을 가지며, 이 값은 바로 슈하트 \bar{X} 관리도의 ARL 값과 같다. 따라서 <그림 6>~<그림 8>은 S-MA 관리도에서 관리길이의 증가에 따라 슈하트 \bar{X} 관리도에 비해 ARL이 얼마나 감소하는지를 명확히 나타낸다. 관리한계를 k_0 에 가깝게 설정할수록 관리길이의 증가에 따른 ARL의 감소 속도는 줄어들며, 최적의 관리길이는 길어진다. 이는 공정평균의 이동폭에 따라 최적의 ARL을 나타낸 <표 5>로부터도 확인할 수 있다. 또한 공정평균의 이동폭이 작을수록 최적 관리길이는 길게 나타난다. $\delta=0.25$ 인 경우 모든 관리한계에 대하여 최적 관리길이는 100을 상회하며, $\delta=1.0$ 인 경우에는 7~37, $\delta=2.0$ 인 경우에는 2~11 구간에서 최적 관리길이가 나타났다. <표 5>와 그림들을 종합해보면, 관리한계가 3.01 이하인 경우에는 최적 ARL 값의 차이가 미미한 것을 알 수 있다.



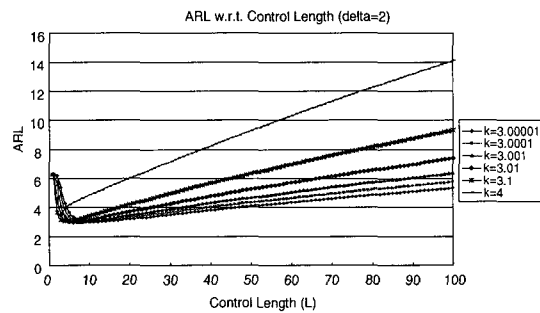
<그림 5> 관리길이와 관리한계에 따른 임계한계 ($k_0 = 3.0$)



<그림 7> 다양한 관리한계에 대하여 관리길이에 따른 ARL 추이 ($\delta = 1.0$)



<그림 6> 다양한 관리한계에 대하여 관리길이에 따른 ARL 추이 ($\delta = 0.25$)



<그림 8> 다양한 관리한계에 대하여 관리길이에 따른 ARL 추이 ($\delta = 2.0$)

<표 5> 공정평균의 이동폭에 따른 최적의 ARL

δ	L	k	w	ARL	δ	L	k	w	ARL	δ	L	k	w	ARL
0.25	328	3.00001	0.0485	49.0693	0.25	270	3.0001	0.0485	49.0695	0.25	212	3.001	0.0485	49.0775
0.5	120	3.00001	0.1384	20.8936	0.5	100	3.0001	0.1388	20.8940	0.5	80	3.001	0.1395	20.9000
0.75	61	3.00001	0.2709	12.1580	0.75	52	3.0001	0.2680	12.1583	0.75	42	3.001	0.2702	12.1616
1	37	3.00001	0.4330	8.1595	1	31	3.0001	0.4378	8.1598	1	26	3.001	0.4292	8.1619
1.5	18	3.00001	0.8069	4.5726	1.5	15	3.0001	0.8227	4.5726	1.5	13	3.001	0.7925	4.5743
2	11	3.00001	1.1845	3.0051	2	9	3.0001	1.2248	3.0054	2	8	3.001	1.1653	3.0060
2.5	8	3.00001	1.4904	2.1726	2.5	6	3.0001	1.6342	2.1736	2.5	5	3.001	1.6346	2.1732
3	6	3.00001	1.8112	1.6792	3	5	3.0001	1.8456	1.6782	3	4	3.001	1.8964	1.6773
3.5	4	3.00001	2.3264	1.3717	3.5	4	3.0001	2.1253	1.3708	3.5	3	3.001	2.2655	1.3698
4	3	3.00001	2.6895	1.1792	4	3	3.0001	2.5029	1.1783	4	2	3.001	2.7665	1.1806
5	1	3.00001	3.0000	1.0233	5	1	3.0001	3.0000	1.0233	5	1	3.001	3.0000	1.0233
δ	L	k	w	ARL	δ	L	k	w	ARL	δ	L	k	w	ARL
0.25	156	3.01	0.0479	49.2297	0.25	111	3.1	0.0430	51.6336	0.25	108	4	0.0274	88.3195
0.5	61	3.01	0.1386	20.9756	0.5	45	3.1	0.1305	21.9265	0.5	22	4	0.2223	33.5265
0.75	33	3.01	0.2658	12.2040	0.75	24	3.1	0.2645	12.7089	0.75	11	4	0.4712	17.3870
1	20	3.01	0.4365	8.1877	1	15	3.1	0.4302	8.4984	1	7	4	0.7270	10.7452
1.5	10	3.01	0.8135	4.5845	1.5	7	3.1	0.8678	4.7320	1.5	4	4	1.1693	5.5205
2	6	3.01	1.2222	3.0100	2	4	3.1	1.3532	3.0905	2	2	4	1.9376	3.5025
2.5	4	3.01	1.6370	2.1745	2.5	3	3.1	1.6633	2.2188	2.5	2	4	1.9376	2.4499
3	3	3.01	1.9811	1.6805	3	2	3.1	2.1710	1.7072	3	1	4	3.0000	2.0000
3.5	3	3.01	1.9811	1.3763	3.5	2	3.1	2.1710	1.3951	3.5	1	4	3.0000	1.4462
4	2	3.01	2.5125	1.1790	4	1	3.1	3.0000	1.1886	4	1	4	3.0000	1.1886
5	1	3.01	3.0000	1.0233	5	1	3.1	3.0000	1.0233	5	1	4	3.0000	1.0233

4.2 S-MA 관리도의 통계적 설계 절차

이상의 결과를 토대로 S-MA 관리도의 통계적 설계 절차를 다음과 같이 제안한다.

[단계 0] 비교하고자 하는 Shewhart \bar{X} -관리도의 설계모수 n_0 , k_0 와 ARL_0 , δ 등을 정한다. 오차한계 ϵ 을 설정한다. 관리한계 k 의 최댓값 k_{max} 를 결정한다. 경험상 $k_{max} = k_0 + 1$ 로 놓으면 충분하다. $ARL_\delta^*(old) = \infty$ 로 초기화한다.

[단계 1] $L=1$, $k=k_{max}$, $ARL_\delta(old) = \infty$ 로 초기화 한다.

[단계 2] L , k 를 대입하여 식 (20)의 해 w 를 계산한다.

[단계 3] L , k , w 를 대입하여 식 (10)으로부터 초기 상태 확률 π_0 를 계산한다.

[단계 4] L , k , w 와 δ 를 대입하여 식 (12)~식 (19)로부터 $ARL_\delta(new)$ 를 계산한다.

[단계 5] $ARL_\delta(new) < ARL_\delta(old)$ 이면 $L \leftarrow L+1$ 로 놓고 [단계 2]로 간다.

$ARL_\delta(new) \geq ARL_\delta(old)$ 이면,
 $ARL_\delta^*(new) \leftarrow ARL_\delta(old)$, $L^* \leftarrow L-1$ 로 놓고 [단계 6]으로 간다.

[단계 6] 주어진 k 에 대해 최적해와 $ARL_\delta^*(new)$ 가 구해지면 이전의 $ARL_\delta^*(old)$ 와 비교한다. $|ARL_\delta^*(new) - ARL_\delta^*(old)| \leq \epsilon$ 이면 최적해로 간주하고 [단계 7]로 간다. 아니면, 이 분법을 적용하여 k 값을 바꾸고 $L=1$ 로 재설정 후 [단계 2]로 간다.

[단계 7] $ARL_\delta^*(new)$ 와 $ARL_\delta^*(old)$ 를 비교하여 최소의 경우에 대한 L , k , w 를 최적해로 한다.

좋지 않다.

- ② 관리한계가 k_0 에 가까울수록 공정평균의 이동폭에 따른 최적 관리길이의 편차가 커진다.
- ③ 관리한계가 3.01 이하인 경우에는 최적 ARL 값의 차이가 미미하다.
- ④ 공정평균의 이동폭이 적은 경우에는 관리길이를 길게, 이동폭이 큰 경우에는 짧게 설정하는 것이 바람직하다.

이러한 결과를 바탕으로 S-MA 관리도의 현실적인 운용방안을 다음과 같이 제안한다.

- ① 관리한계는 3.01로 설정한다.
- ② 공정평균의 이동폭에 따라 다음과 같이 관리길이를 설정한다.

$$\delta \leq 0.5 \Rightarrow L=100,$$

$$0.75 \leq \delta \leq 1.5 \Rightarrow L=20, \delta \geq 2 \Rightarrow L=4$$

이러한 운용방안에 따른 ARL을 $k=3.01$ 에서의 최적해와 비교한 결과는 <표 6>과 같다. 평균적으로 4.3%의 상대오차를 보임으로써 현장에서 적용하기에 큰 문제가 없는 것으로 판단된다.

Reynolds et al.[7]의 <표 2>에 나타난 CUSUM 관리도의 ARL과 비교한 결과를 <표 7>에 정리하였다. 단, CUSUM 열에서 참조값은 감지하고자 하는 공정평균 목표값으로부터의 이탈도 등을 나타낸다. 대부분의 경우에 있어서 S-MA 관리도의 ARL_δ 값이 현저히 감소한 것을 알 수 있다. 단, 공정한 비교를 위하여 Reynolds et al.(1990)이 사용한 보정된(adjusted) ARL_δ 를 다음과 같이 계산하여 사용하였다.

$$AARL_\delta = \pi^T [(I - Q_\delta)^{-1} - 1/2] \mathbf{1}_M \quad (21)$$

Lucas and Saccucci[4]가 제안한 EWMA 관리도의 최적 ARL과 비교한 결과는 <표 8>과 같다. 표에서 EWMA 관리도의 ARL_δ 는 Lucas and Saccucci[4]의 <표 3>에서 각 δ 에 대한 최소값을 정리한 것이다. 대부분의 경우에 있어서 S-MA 관리도의 ARL이 감소한 것을 알 수 있다. 마지막 두 행에서 $\delta=4, 5$ 인 경우에는 S-MA 관리도의 ARL이 더 크게 나타났으나, 실제적인 차이는 미미하며 식 (21)과 같이 보정하면 더 줄어든다.

5. 민감도 분석

실제 공정에서 공정평균의 이동폭 δ 를 정확히 아는 경우는 흔치 않으며, 하나의 δ 값에 대응하는 최적 설계가 다른 δ 값에 대해서는 좋지 않은 결과를 가져올 수 있다. 따라서 δ 의 범위에 따라 적절한 관리한계 및 관리길이를 정하여 관리도를 운용할 필요가 있다. 4.1절에서 발견한 사실을 토대로 다음과 같은 결과를 정리할 수 있다.

- ① 관리한계가 k_0 에서 먼 경우($k=4$) ARL 성능이

<표 6> 현실적인 운용방안과 최적해의 비교

δ	L	k	w	ARL	L	w	ARL	상대오차
0.25	156	3.01	0.0479	49.2297	100	0.0799	52.1222	5.9%
0.5	61	3.01	0.1386	20.9756	100	0.0799	22.0606	5.2%
0.75	33	3.01	0.2658	12.2040	20	0.4365	12.9586	6.2%
1	20	3.01	0.4365	8.1877	20	0.4365	8.1877	0.0%
1.5	10	3.01	0.8135	4.5845	20	0.4365	4.9684	8.4%
2	6	3.01	1.2222	3.0100	4	1.637	3.1582	4.9%
2.5	4	3.01	1.6370	2.1745	4	1.637	2.1745	0.0%
3	3	3.01	1.9811	1.6805	4	1.637	1.694	0.8%
3.5	3	3.01	1.9811	1.3763	4	1.637	1.4187	3.1%
4	2	3.01	2.5125	1.1790	4	1.637	1.248	5.9%
5	1	3.01	3.0000	1.0233	4	1.637	1.0944	6.9%
							평균오차	4.3%

<표 7> CUSUM 관리도와의 ATS_δ 비교

δ	S-MA					CUSUM(참조값 = 0.25)		CUSUM(참조값 = 1.0)	
	L	k	w	ARL_δ	$AARL_\delta$	FSI	감소율	FSI	감소율
0				370.3984	370.3984	370.4		370.4	
0.25	100	3.01	0.0799	52.1222	51.6222	76.3	32.3%	195.2	73.6%
0.5	100	3.01	0.0799	22.0606	21.5606	25.1	14.1%	68.0	68.3%
1	20	3.01	0.4365	8.1877	7.6877	9.4	18.2%	12.8	39.9%
1.5	20	3.01	0.4365	4.9684	4.4684	5.6	20.2%	4.8	6.9%
2	4	3.01	1.637	3.1582	2.6582	4.0	33.5%	2.7	1.5%
3	4	3.01	1.637	1.694	1.194	2.5	52.2%	1.3	8.2%
4	4	3.01	1.637	1.248	0.748	1.8	58.4%	0.8	6.5%

<표 8> EWMA 관리도와의 ARL_δ 비교

δ	L	k	w	ARL_δ	λ	ARL_{EWMA}	감소율
0.25	100	3.01	0.0799	52.1222	0.03	74.1	29.7%
0.5	100	3.01	0.0799	22.0606	0.05	28.6	22.9%
0.75	20	3.01	0.4365	12.9586	0.1	15.5	16.4%
1	20	3.01	0.4365	8.1877	0.1	10.1	18.9%
1.5	20	3.01	0.4365	4.9684	0.25	5.37	7.5%
2	4	3.01	1.637	3.1582	0.4	3.47	9.0%
2.5	4	3.01	1.637	2.1745	0.5	2.47	12.0%
3	4	3.01	1.637	1.694	0.75	1.87	9.4%
3.5	4	3.01	1.637	1.4187	0.75	1.46	2.8%
4	4	3.01	1.637	1.248	1	1.22	-2.3%
5	4	3.01	1.637	1.0944	1	1.03	-6.3%

6. 요약 및 결론

본 논문에서는 S-MA 관리도의 샘플링 프로세스를 마코프(Markov) 연쇄로 모형화하여 정상 ARL을 계산하는 알고리즘 및 통계적 최적설계 절차를 제시하였다. 제안된 알고리즘은 관리길이 L 이 큰 경우에도 통계적 특성을 계산할 수 있는 장점이 있다. CUSUM 관리도와 적응형 관리도의 특성을 결합하여 만든 S-MA 관리도는 기존의 CUSUM 관리도나 EWMA 관리도에 비해 우수한 ARL 성능을 나타냈다. S-MA 관리도는 적응형 관리도와는 달리 표본크기나 샘플링 간격은 일정하게 유지하면서, 단지 관리통계량의 계산방식만을 바꾸기 때문에 관리도의 운용이 간편한 장점이 있다. 또한 현실적인 적용방안을 제시함으로써 CUSUM 관리도나 EWMA 관리도에 비해 현장에서 쉽게 사용할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- [1] Brook, D. and Evans, D. A.(1972), "An approach to the probability distribution of CUSUM run length", *Biometrika*, Vol. 59, pp. 639-549.
- [2] Costa, A. F. B.(1997), " \bar{x} Chart with Variable Sample Size and Sampling Interval", *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, pp. 197-204.
- [3] Lim, T. J.(2005), "A selectively cumulative sum (S-CUSUM) control chart", *J. Korean Society for Quality Management*, Vol. 33, No. 3, pp. 126-134.
- [4] Lucas, J. M. and Saccucci, M. S.(1990), "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes : Properties and Enhancements", *Technometrics*, Vol. 32, pp. 1-12.
- [5] Page, E. S. (1954), "Continuous Inspection Schemes", *Biometrika*, Vol. 41, pp. 100-114.
- [6] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1994), "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval \bar{x} Control Scheme", *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, pp. 164-176.
- [7] Reynolds, M. R. and Arnold, J. C.(2001), "EWMA control charts with variable sample sizes and sampling intervals", *IIE Transactions*, Vol. 33, pp. 511-530.