

## Elliptic Blending Model을 사용하여 자연대류 해석 시 난류열유속 처리법 비교

최 석 기,<sup>\*</sup> 김 성 오<sup>1</sup>

### COMPARISON OF THE TREATMENTS OF TURBULENT HEAT FLUX FOR NATURAL CONVECTION WITH THE ELLIPTIC-BLENDING SECOND-MOMENT CLOSURE

Seok-Ki Choi<sup>\*</sup> and Seong-O Kim<sup>1</sup>

*A comparative study on the treatment of the turbulent heat flux with the elliptic blending second-moment closure for a natural convection flow is performed. Three cases of different treating the turbulent heat flux are considered. Those are the generalized gradient diffusion hypothesis (GGDH), the algebraic flux model (AFM) and the differential flux model (DFM). The constants in the models are adjusted with a primary emphasis placed on the accuracy of predicting the local Nusselt number. These models are implemented in a computer code specially designed for evaluation of turbulent models. Calculations are performed for a turbulent natural convection in the 1:5 rectangular cavity and the calculated results are compared with the available experimental data. The results show that the three models produce nearly the same accuracy of solutions. These results show that the GGDH, AFM and DFM models for treating the turbulent heat flux are sufficient for this simple shear flow where the shear production is dominant. It is observed that, in the weakly stratified region at the center zone of the cavity, the vertical velocity fluctuation is nearly zero in the GGDH solutions, which shows that the GGDH model may not be suitable for the strongly stratified flow. Thus, further study on the strongly stratified flow should be followed.*

**Key Words :** Elliptic Blending Model, 자연대류(Natural Convection), 난류모델(Turbulence Model)

### 1. 서 론

자연대류 문제에 대한 정확한 해석은 사고 시 액체금속로 피동 잔열제거 계통 해석 및 원자로 내부 온도 해석 등에 필요한 열전달계수 설정에 매우 중요하다. 지금까지 액체금속로 피동 잔열제거 설계 시 사용되는 자연대류 현상에 대한 열전달계수의 실험자료는 매우 제한적이고, 기하학적조건이나 유동형태가 다르면 열전달계수의 설정이 다를 수 있다. 그러므로 실험적 자료가 정확한 유동에 적용하여 난류모델을 검증한 후, 그 난류모델을 사용하여 액체금속로 피동 잔열제거의 해석에 적용하면 비교적 정확한 열유동 설계를 수행할 수 있을 것이다. 난류 자연대류 유동은 실험을 수행하기가 매우 어

려워 현재까지 난류모델을 평가하기 위한 정확한 실험자료가 거의 희박한 편인데 난류자연대류 유동에 대한 난류모델을 평가할 수 있는 정확도의 실험자료는 King[1]의 자료가 있다.

본 연구에서는 비교적 최근에 개발된 Elliptic Blending Model (EBM)[2]을 사용할 때 난류열유속 처리법에 관하여 연구하고자 한다. 강제대류 열유동해석에 주로 사용되는 SGD(H)(Simple Gradient Diffusion Hypothesis)는 자연대류 열유동 해석에는 적당하지가 않다고 널리 알려져 있다. Ince와 Launder[3]는 자연대류 해석 시 Launder와 Sharma 모델[4]에 GGDH(General Gradient Diffusion Hypothesis) 모델을 장착하여 자연대류 유동을 해석하였다. 그러나 그들의 계산결과는 만족할 만한 수준의 정확한 해를 산출하지 못하였다. 본 저자들의 경험에 의하면 이 모델은 수치적으로 매우 불안정하였다. 최근 Choi와 Kim [5]은 GGDH 모델을 Thielens et al.[2]의 EBM에 적용하여 계산한 결과 지금까지 어느 해보다 정확한 해를 산출하였다. 이것은 EBM이 난류응력을 비교적 정확하게 계산

접수일: 2007년 3월 22일, 심사완료일: 2007년 6월 15일.

1 정회원, 한국원자력연구원

\* Corresponding author, E-mail: skchoi@kaeri.re.kr

하기 때문이라고 추정된다. Kenjeres와 Hanjalic[6]은 Launder와 Sharma[4] 모델에 AFM(Algebraic Flux Model)을 적용한 결과, 정확도와 수치적 안정성이 향상되는 현상을 발견하였다. 그러나 AFM이 EBM모델과 같이 사용했을 경우 해의 정확성에 관하여서는 알려지지 않고 있다. GGDH나 AFM의 다음 단계인 DFM(Differential Flux Model)에 관하여서는 Shin et al.[7]가 개발한 DFM이 있다. 이 모델에 관하여서는 아주 제한적인 검증만 행하여졌다.

Elliptic blending model은 최근에 개발되어 해석결과가 우수한 것으로 판명되고 있다. 이 모델은 기하학적 변수가 없어 상용코드에 도입이 용이하다. 그러므로 이 모델을 액체금속로의 중요한 열유동 현상인 자연대류 해석에 적용하여 평가하는 것은 중요한 의미가 있다. 본 연구에서는 위에서 설명한 GGDH, AFM 및 DFM을 EBM과 같이 사용할 때의 성능을 체계적으로 검증하고자 한다. 검증대상 실험은 난류모델 검증에 널리 사용된 King[1]이 행한 1:5 직사각형 내부에서의 자연대류이다.

## 2. 지배방정식

Elliptic blending model에서는 연속방정식, 운동방정식, Reynolds 응력항들과 난류에너지 소산항은 다음의 미분방정식으로 구한다.

$$\frac{D}{Dt}(\rho) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho U_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i u_j} \right) - \rho \beta g_i (\Theta - \Theta_{ref}) \tag{2}$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho \Theta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \overline{\rho \theta u_j} \right) \tag{3}$$

$$\frac{D}{Dt}(\overline{\rho u_i u_j}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \mu \delta_{kl} + C_s \rho \overline{u_k u_l} T \right) \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] + \rho (P_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} - \rho \varepsilon_{ij}) \tag{4}$$

$$\frac{D}{Dt}(\rho \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \mu \delta_{kl} + C_\varepsilon \rho \overline{u_k u_l} T \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right] + \frac{(C_{\varepsilon 1}(P_k + G_k) - \rho C_{\varepsilon 2} \varepsilon)}{T} \tag{5}$$

$$\frac{D}{Dt}(\overline{\rho \theta^2}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \frac{\mu}{Pr} \delta_{kl} + C_{\theta\theta} \rho \overline{u_k u_l} T \right) \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_l} \right] + \left( 2P_\theta - R \frac{\varepsilon}{k} \overline{\rho \theta^2} \right) \tag{6}$$

$$\alpha - L^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_j \partial x_j} = 1 \tag{7}$$

$$\Phi_{ij} = (1 - \alpha^2) \Phi_{ij}^w + \alpha^2 \Phi_{ij}^h \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^h = & - \left( C_1 + C_2 \frac{P}{\varepsilon} \right) \varepsilon A_{ij} + C_3 k S_{ij} \\ & + C_4 k \left( A_{ik} S_{jk} + A_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} \delta_{ij} A_{lk} S_{kl} \right) \\ & + C_{54} k (A_{ik} \Omega_{jk} + A_{jk} \Omega_{ik}) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{\overline{u_i u_k n_j n_k} + \overline{u_j u_k n_i n_k}}{-\frac{1}{2} C_1 \overline{u_k u_l n_l} (n_i n_j + \delta_{ij})} \right) \tag{10}$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^2) \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon + \frac{2}{3} \alpha^2 \varepsilon \delta_{ij} \tag{11}$$

$$A_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}, \quad n = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|} \tag{12}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \tag{13}$$

$$T = \max \left( \frac{k}{\varepsilon}, C_T \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right) \tag{14}$$

$$L = C_L \max \left( \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} C_s &= 0.21, C_\varepsilon = 0.18, C_{\varepsilon 1}^0 = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.83, C_{\theta\theta} = 0.22 \\ C_1 &= 1.7, C_2 = 0.9, C_3 = 0.8 - 0.65 A_2^{1/2}, C_4 = 0.62, C_5 = 0.2 \\ C_6 &= 0.3, C_T = 6.0, C_L = 0.161, C_\eta = 80., R = 2. \end{aligned} \tag{16}$$

$$C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 1}^0 \left( 1 + 0.03(1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{u_i u_j n_i n_j}} \right) \quad (17)$$

이다.

### 3. 난류열유속 처리법

#### 3.1 Simple Gradient Diffusion Hypothesis

SGDH에서는 난류열유속을 아래와 같이 처리한다. 이 모델은 주로 2방정식 모델에서 사용되었다.

$$\overline{\theta u_i} = -\frac{v_t}{Pr_t} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad v_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (18)$$

위 식에서  $Pr_t$ 는 난류 Prandtl 계수이며 주로  $Pr_t = 0.9$ 를 사용한다. Kenjeres와 Hanjalic[6]은 이 모델이 자연대류 유동에 적당하지 않다고 보고하고 있어 본 연구의 해석대상에서는 제외하기로 한다. 관심 있는 독자는 최근의 Kenjeres et al.[8]을 참고하기 바란다.

#### 3.2 Generalized Gradient Diffusion Hypothesis

GGDH에서는 난류열유속은 다음의 대수학적 방정식으로부터 구한다.

$$\overline{\theta u_i} = -C_\theta \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (19)$$

Thielen et al.[2]은 위 식에서의 상수 값으로  $C_\theta = 0.3$ 을 사용하였다. 위 식에서 관찰할 수 있는 바와 같이 GGDH에서는 난류응력을 얼마나 정확하게 계산함에 따라 해의 정확도가 영향을 받는다. 최근 Choi와 Kim[5]은 GGDH 모델을 Thielen et al.[2]의 EBM에 적용하여 계산한 결과 지금까지 어느 해보다 정확한 해를 산출하였다. 그러나 이 모델은 Rayleigh-Benard의 유동해석에서는 수치적 불안정성을 일으킬 수 있다.

#### 3.3 Algebraic Flux Model

AFM에서는 난류열유속을 다음의 대수학적 방정식으로부터 구한다.

$$\overline{\theta u_i} = -C_\theta \frac{k}{\epsilon} \overline{(u_i u_j)} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \xi \overline{\theta u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \overline{\theta^2} \quad (20)$$

본 연구에서는 위 식들에서의 상수 값으로  $C_\theta = 0.2$ ,  $\eta = 0.6$ ,  $\xi = 0.6$ 을 사용하였다. 이 모델이 GGDH 보다 다른 점은 난류열유속을 계산할 때 temperature variance ( $\overline{\theta^2}$ )를 계산하여야 하는 추가계산이 필요하다. 그러나 이 모델은 Rayleigh-Benard 자연대류의 유동해석에 적용하여도 수치적 불안정성이 없다. 그 이유는 식 (20)의 마지막 항이 항상 양의 값을 산출하여 식 (5)의  $G_k$ 의 값이 크게 음의 값이 되는 것을 방지하기 때문이다.

#### 3.4 Differential Flux Model

Shin et al.[7]의 DFM에서는 난류 열유속을 다음의 미분 방정식의 해로 구한다.

$$\frac{D}{Dt} (\rho \overline{u_i \theta}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \left( \frac{1}{2} \left( \mu + \frac{\mu}{Pr} \right) \delta_{kl} + C_\theta \rho \overline{u_k u_l} T \right) \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_l} \right] + \rho (P_{i\theta} + G_{i\theta} + \Phi_{i\theta}^* - \epsilon_{i\theta}) \quad (21)$$

$$P_{i\theta} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} - u_k \theta \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (22)$$

$$G_{i\theta} = -g_i \beta \overline{\theta^2} \quad (23)$$

$$\Phi_{i\theta}^* = (1 - \alpha^2) \Phi_{i\theta}^w + \alpha^2 \Phi_{i\theta}^h \quad (24)$$

$$\epsilon_{i\theta} = (1 - \alpha^2) \epsilon_{i\theta}^w + \alpha^2 \epsilon_{i\theta}^h \quad (25)$$

$$\Phi_{i\theta}^h = -C_{1\theta} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i \theta} + C_{2\theta} \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + C_{3\theta} g_i \beta \overline{\theta^2} \quad (26)$$

$$\Phi_{i\theta}^w = -\frac{\epsilon}{k} \overline{u_k \theta} n_k n_i \quad (27)$$

$$\epsilon_{i\theta}^h = 0, \quad \epsilon_{i\theta}^w = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\epsilon}{k} \overline{(u_i \theta + u_k \theta) n_k n_i} \quad (28)$$

$$C_{1\theta} = 3.75, \quad C_{2\theta} = 0.5, \quad C_{3\theta} = 0.5 \quad (29)$$

## 4. 결과 및 토의

본 연구에서 해석하는 자연대류문제는 Fig. 1과 같이 높이

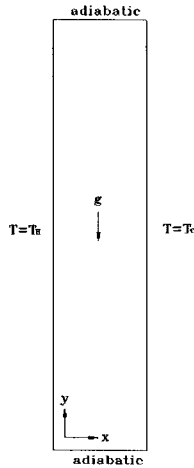


Fig. 1 A schematic diagram of 1:5 rectangular cavity

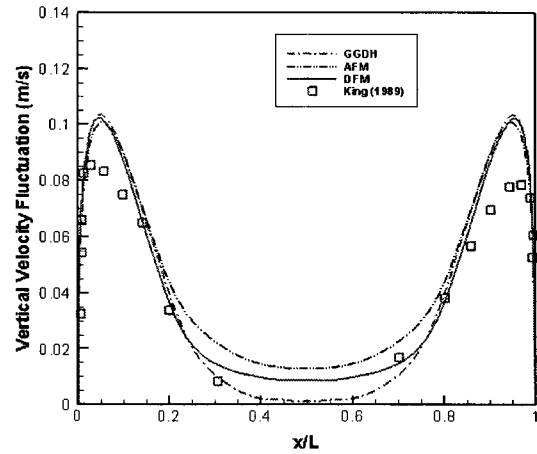
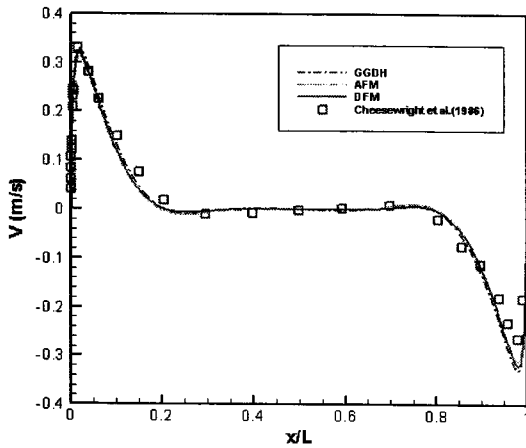


Fig. 3 Vertical velocity fluctuation profiles at y/H=0.5



(a) Total view

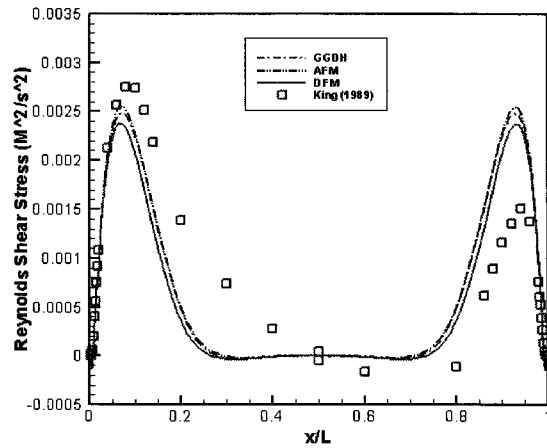
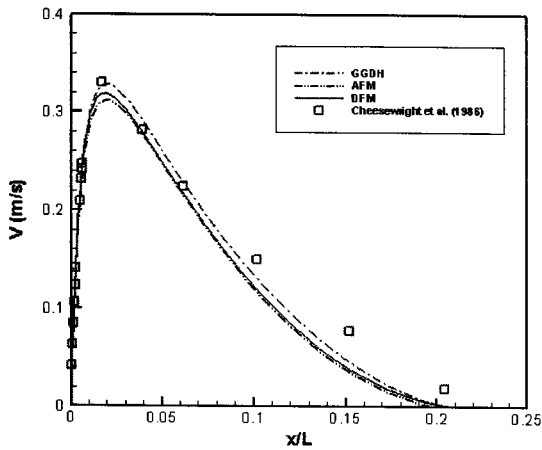


Fig. 4 Reynolds shear stress profiles at y/H=0.5.



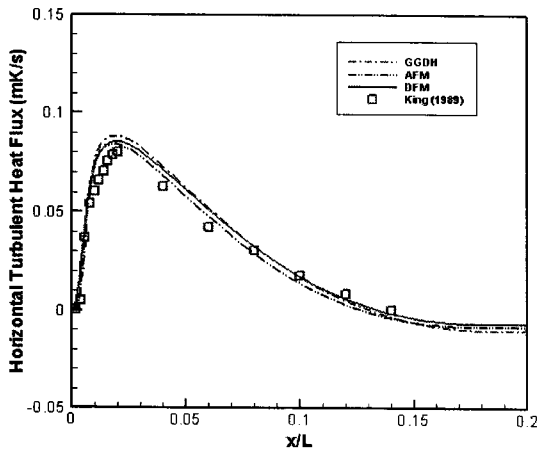
(b) Partial view near the wall

Fig. 2 Mean vertical velocity profiles at y/H=0.5.

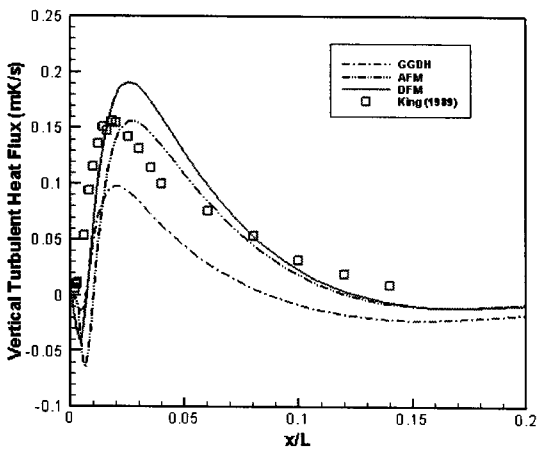
와 폭의 비가 5:1인 직사각형 공동(cavity)에서의 자연대류 문제이다. 직사각형 공동의 높이  $H=2.5m$  이고 폭  $L=0.5m$  이고, 높은 벽과 낮은 벽의 온도차는  $45.8K$ 이다. 직사각형 높이를 기준으로 한 Rayleigh 수는  $Ra=4.5 \times 10^{10}$ 이고, Prandtl 수는  $Pr=0.7$ 이다. King[1]이 광범위하게 실험을 수행하였다. 계산은  $102 \times 152$  격자를 사용하여 수행하였다.

Fig. 2는 계산된 수직방향 속도성분의 분포를 실험데이터와 같이 보여주고 있다. AFM과 DFM은 거의 같은 수준의 정확도를 보여주고 있고, GGDH는 약간 크게 예측하고 있다. 여기서 GGDH의 해는 Choi와 Kim[5]의 해를 의미한다. 이들 그림에서 관찰할 수 있는 바와 같이 본 문제와 같은 단순 전단유동(shear flow)에서는 GGDH도 정확한 해를 산출함을 관찰할 수 있다.

Fig. 3은 계산된 수직방향의 속도요동 값을, Fig. 4는 난류



(a) Horizontal turbulent heat flux



(b) Vertical turbulent heat flux

Fig. 5 Turbulent heat fluxes profiles at  $y/H=0.5$

전단응력 값을 실험데이터와 함께 보여주고 있다. 여기서 실험데이터와 비교하여 볼 때 수직방향의 속도요동 값은 약간 과다하게 예측하고, 난류 전단응력은 약간 과소하게 예측함을 관찰 할 수 있다. 이 실험의 문제점은 상단부분이 정확하게 단열되어 있지 않아서 고온 측 벽 근처에서는 유동이 약간 과속되고 저온 측 벽 근처에서는 약간 저속 됨을 관찰 할 수 있다. 그러므로 Fig. 3의 수직방향의 속도요동의 실험치는 그 정확성이 의심된다. 그러나 3모델들 모두 비슷한 정확도의 해를 산출하나, 중앙영역에서의 수직방향 속도요동의 값은 다르게 예측하고 있다. Fig. 3에서 GGDH 모델은 중앙영역에서 과소하게 예측함을 관찰할 수 있고, 이것은 이 모델이 강하게 성층화 되어있는 유동해석에서는 수치적 불안정성을 일으킬 수 있음을 추정할 수 있다.

Fig. 5는 계산된 수평방향 및 수직방향 난류 열유속 값의

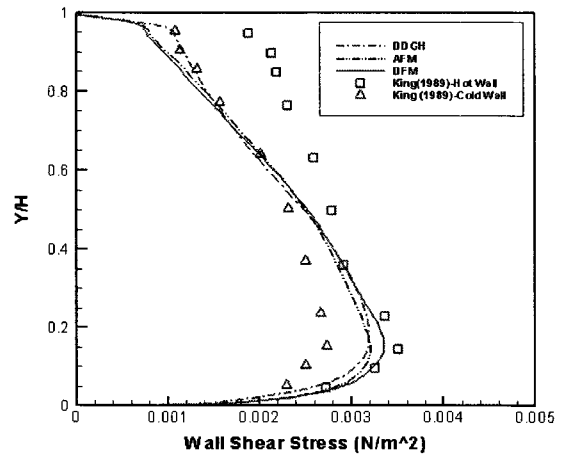


Fig. 6 Wall shear stress profile along the hot wall

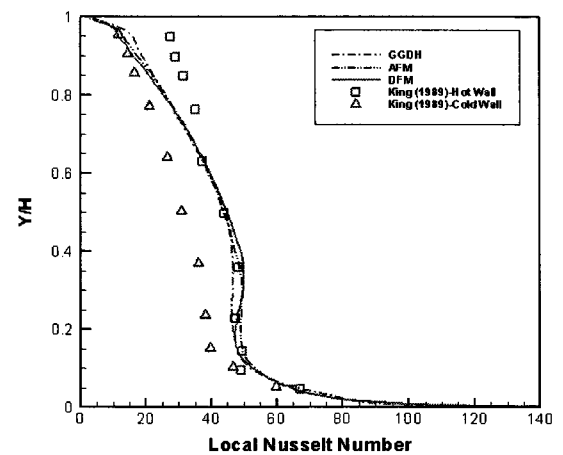


Fig. 7 Local Nusselt number along the hot wall

분포를 실험데이터와 함께 보여주고 있다. 이들 그림에서 관찰 할 수 있는 바와 같이 수평방향 난류열유속은 3모델이 모두 비교적 같은 정도의 정확성을 갖는 해를 산출하나, 수직방향 난류열유속은 차이가 있다. 수직방향 열유속의 경우 AFM이 가장 정확한 해를 산출하고, GGDH는 약간 과소하게, DFM은 약간 과다하게 예측함을 관찰 할 수 있다. GGDH가 수직방향 열유속을 약간 과소하게 예측하는 것은 잘 알려져 있으나, DFM이 약간 과다하게 예측하는 것은 의외의 결과이다. 이것은 DFM에 있는 상수를 결정할 때 수직방향 열유속의 분포보다 국부 Nusselt 수를 정확하게 예측하도록 조정하였기 때문이다. 만약에 DFM에 있는 상수를 결정할 때 수직방향 열유속의 분포를 실험결과와 비슷하게 결정할 때는 국부 Nusselt 수가 과다하게 예측함을 관찰 할 수 있었다. 그러나 Fig. 5(b)에서 DFM의 수직방향 열유속의 과다 예측정도는 크지 않음을 관찰할 수 있다.

Fig. 6과 Fig. 7은 예측된 고온 벽에서의 수직방향의 벽면 전단응력과 국부 Nusselt 수의 분포를 실험결과와 함께 보여 주고 있다. 3모델이 거의 같은 정도의 해를 산출함을 보여주고 있다. DFM이 약간 더 정확한 해를 산출하나, 차이는 거의 없음을 관찰 할 수 있다. 이것은 위에서 언급한 바와 같이 모델 상수를 결정할 때 국부 Nusselt 수를 정확하게 예측하도록 조정하였기 때문이다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 최근에 개발되어 비교적 정확도가 높다고 알려진 Elliptic Blending Model을 사용하여 자연대류 해석 시 난류열유속의 처리법에 관하여 연구를 수행하였다. 난류모델 검증에 널리 이용되고 있는 실험에 적용하여 각 모델의 정확성을 평가하였다. 평가대상 모델은 GGDH, AFM과 DFM이다. 난류모델의 수식들을 공식화하였으며, 기존의 실험을 해석한 결과, AFM과 DFM은 거의 같은 수준의 해를 산출하였으며, GGDH는 약간 차이가 나는 해를 산출하였다. 본 문제와 같이 간단 전단유동인 경우 GGDH는 수치적 불안정성을 보이지 않았으나, Rayleigh-Benard의 유동해석에서는 수치적 불안정성을 일으킬 수 있음을 추정할 수 있었다. Rayleigh-Benard의 유동해석에서의 난류 열유속 처리법에 관한 연구가 수행되어야 할 것이다.

### 감사의 글

본 연구는 과학기술부의 원자력 중장기 연구개발 사업의 지원에 의하여 수행되었다. 또한 이 연구는 KISTI의 제 8차 전략과제에서 제공하는 슈퍼컴퓨터 을 사용하여 연구를 수행하였고, 이에 관계자에게 고마움을 표시한다.

### 참고문헌

- [1] King, K.V., 1989, "Turbulent natural convection in rectangular air cavities," Ph.D Thesis, Queen Mary College, University of London, UK.
- [2] Thielen, L., Hanjalic, K, Jonker, H. and Manceau, 2005, "Predictions of flow and heat transfer in multiple impinging jets with an elliptic-blending second-moment closure," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.48, pp.1583-1598.
- [3] Ince, N.Z. and Launder, B.E., 1989, "On the computation of buoyancy-driven turbulent flows in rectangular enclosures," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol.10, pp.110-117.
- [4] Launder, B.E. and Sharma, B.I., 1974, "Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near spinning disc," *Lett. In Heat and Mass Transfer*, Vol.1, pp.131-138.
- [5] Choi, S.K. and Kim, S.O., 2006, "Computation of a turbulent natural convection in a rectangular cavity with the elliptic blending second moment closure," *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Vol.33, pp.1217-1224.
- [6] Kenjeres, S. and Hanjalic, K., 1995, "Prediction of turbulent thermal convection in concentric and eccentric annuli," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol.16, pp.428-439.
- [7] Shin, J.K., An, J.S. and Choi, Y.D., 2005, "Elliptic relaxation second moment closure for turbulent heat Flux," *Proceedings of 4th Int. Symp. Turbulence and Shear Flow Phenomenon*, Williamsburg, VA USA, pp.271-277.
- [8] Kenjeres, S., Gunarjo, S. B. and Hanjalic, K., 2005, "Contribution to elliptic relaxation modelling of turbulent natural and mixed convection," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol.26, pp.569-586.